

Hoofdstuk 10: Rotatie om een vaste as

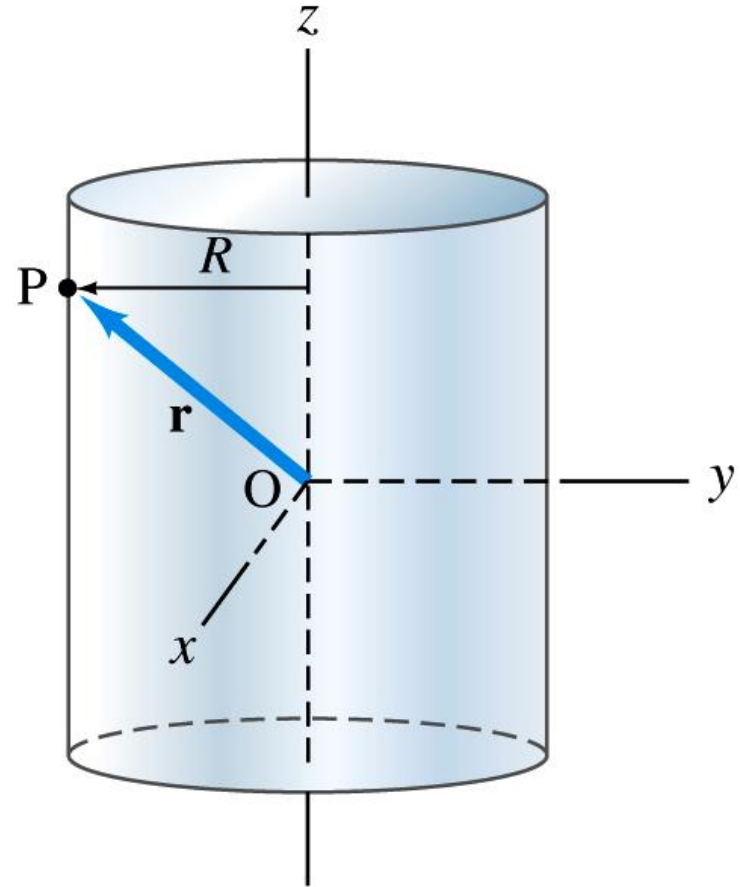


Definities

- **Star lichaam**: voorwerp met een onveranderlijke vorm
- **Zuivere rotatie**: alle punten van het lichaam doorlopen een cirkel; middelpunten van al deze cirkels liggen op één as, de **rotatie-as** of **draaias**

Grootheden bij rotatie (10.1)

- r : (zowel scalair als vector): plaats van een punt ten opzichte van de coördinaat-oorsprong
- R : (scalair): loodrechte afstand van een punt tot de rotatie-as



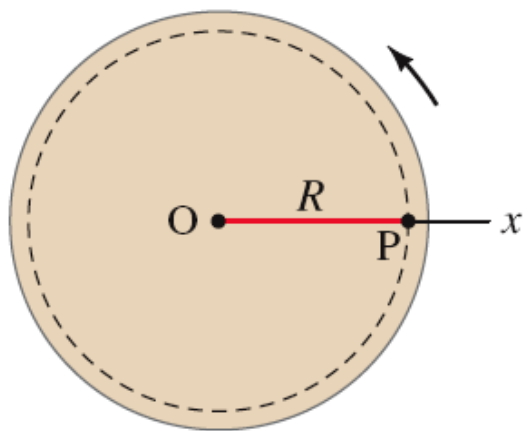
Hoekverplaatsing – hoeksnelheid - hoekversnelling

- Hoekverplaatsing van elk punt van het voorwerp (zuivere rotatie van een star lichaam):

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

met ℓ de lengte van de doorlopen boog en R de afstand tot de rotatie-as; θ staat dan in radialen

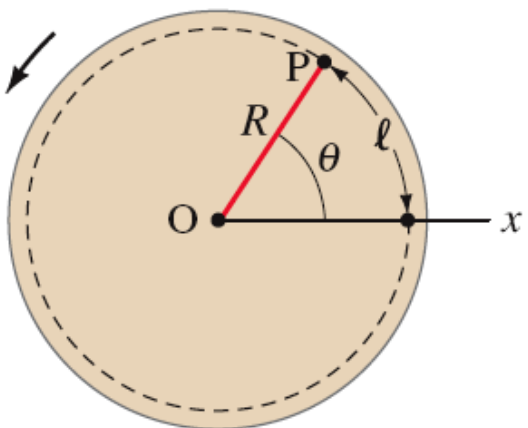
- **Dit is iets anders dan de cirkelbeweging van een puntmassa!** (dat was translatie volgens een cirkel)



$$\theta = \frac{\ell}{R}$$

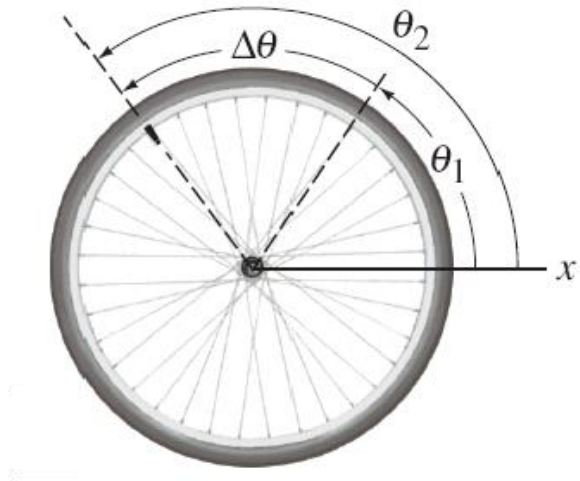
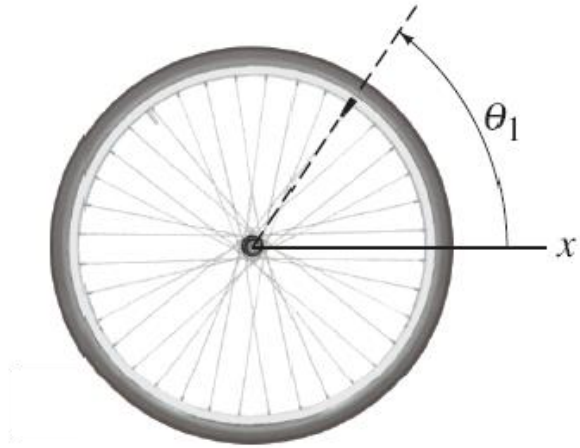
$$\ell = R\theta$$

$$\theta = 360^\circ \rightarrow \ell = 2\pi R$$



$$\rightarrow \theta = \frac{\ell}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad}$$

Definitie van de radiaal!



Hoekverplaatsing:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Gemiddelde hoeksnelheid:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Momentane hoeksnelheid:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

- Gemiddelde en momentane hoeksnelheid van elk punt van het draaiende lichaam:

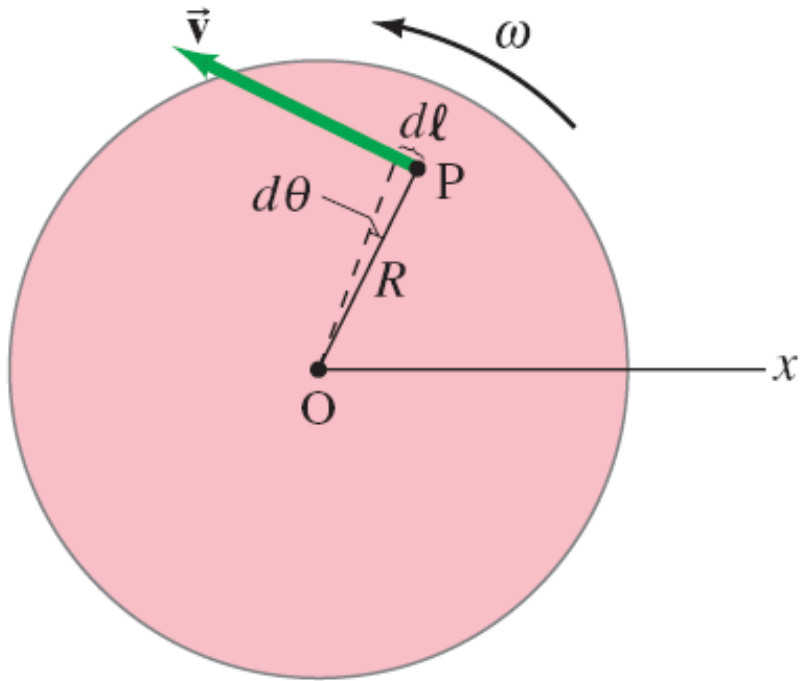
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Gemiddelde en momentane hoekversnelling van elk punt:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- Hoekverplaatsing, hoeksnelheid en hoekversnelling zijn gelijk voor alle punten van het lichaam!

Verband met lineaire snelheid



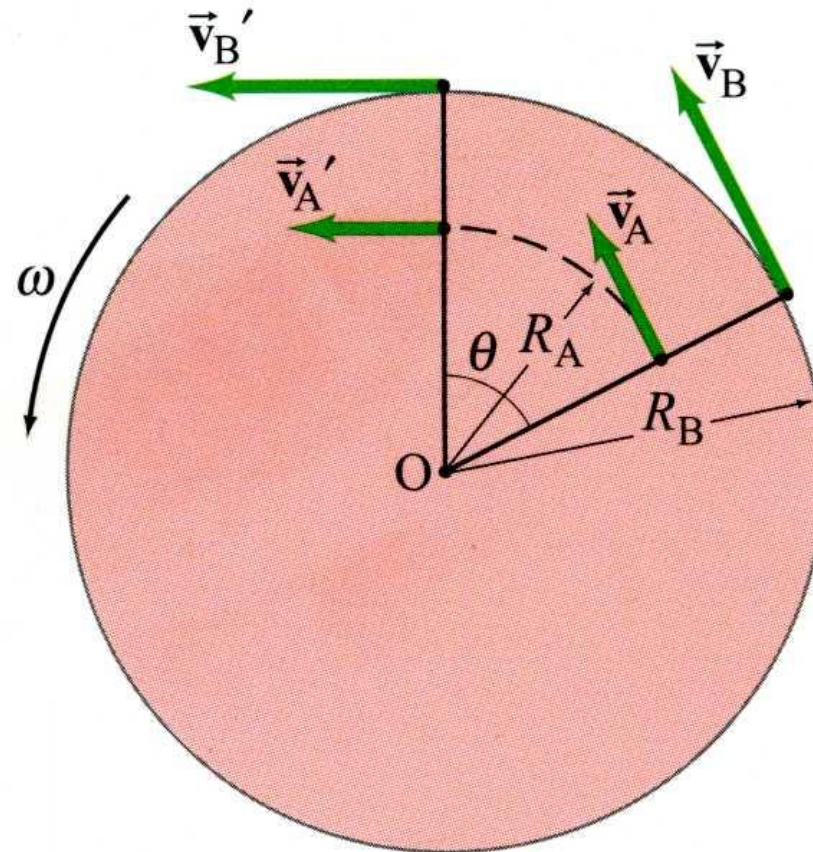
$$\ell = R\theta \Rightarrow \frac{d\ell}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = R\omega$$

De lineaire snelheid is wel verschillend voor verschillende punten van het lichaam!

Conceptvoorbeeld 10.2 Is de leeuw sneller dan het paard?

Een kind zit in een draaimolen op een paard dat aan de buitenrand van de molen opgesteld is en een ander kind zit op een leeuw die halverwege het middelpunt en de buitenrand van de draaimolen staat. (a) Welk kind heeft de grootste lineaire snelheid? (b) Welk kind heeft de grootste hoeksnelheid?





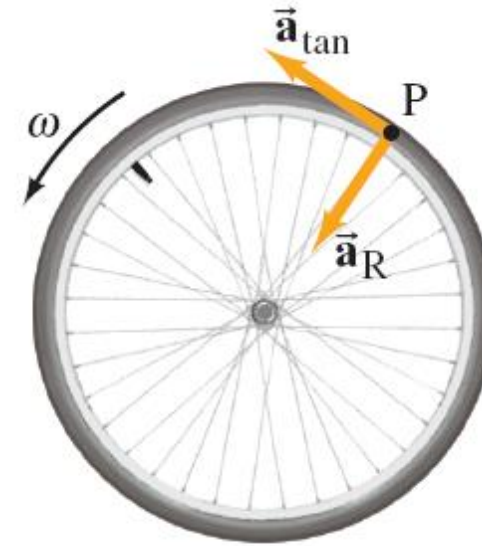
Hoekversnelling en lineaire versnelling

$$v = R\omega \rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

$$\rightarrow a_{\text{tan}} = R\alpha$$

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R$$

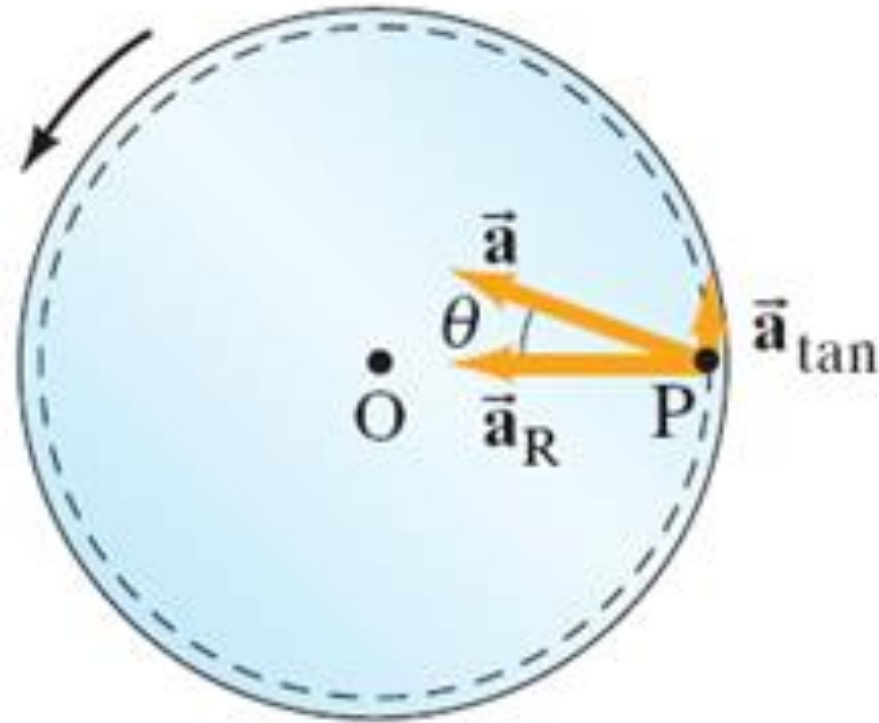
$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{tan}} + \vec{a}_R$$



Lineair	Soort	Rotationeel	Relatie (θ in radialen)
x	Verplaatsing	θ	$x = R\theta$
v	Snelheid	ω	$v = R\omega$
a_{tan}	Versnelling	α	$a_{\text{tan}} = R\alpha$

Voorbeeld 10.3 Rotationale en lineaire snelheden en versnellingen

Een draaimolen staat in eerste instantie stil. Op $t = 0$ krijgt de draaimolen een constante hoekversnelling $\alpha = 0,060 \text{ rad/s}^2$, waardoor de hoeksnelheid gedurende 8,0 s toeneemt. Bereken op $t = 8,0 \text{ s}$ de grootte van de volgende grootheden: (a) de hoeksnelheid van de draaimolen; (b) de lineaire snelheid van een kind (fig. 10.8a) op 2,5 m vanaf het middelpunt, punt P in fig. 10.8b; (c) de tangentiale (lineaire) versnelling van het kind; (d) de centripetale versnelling van het kind en (e) de totale lineaire versnelling van het kind.



$$(a) : \alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \rightarrow \Delta\omega = \alpha \cdot \Delta t = 0,060 \frac{rad}{s^2} \cdot 8,0s = 0,48 \frac{rad}{s}$$

$$(b) : v = R\omega = 2,5m \cdot 0,48 \frac{rad}{s} = 1,2 \frac{m}{s}$$

$$(c) : a_{\text{tan}} = R\alpha = 2,5m \cdot 0,060 \frac{rad}{s^2} = 0,15 m/s^2$$

$$(d) : a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(1,2 m/s)^2}{2,5m} = 0,58 m/s^2$$

$$(e) : a = \sqrt{a_{\text{tan}}^2 + a_R^2} = \sqrt{(0,15 m/s^2)^2 + (0,58 m/s^2)^2} = 0,60 m/s^2$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_{\text{tan}}}{a_R}\right) \approx 15^\circ$$

Hoeksnelheid en rotatiefrequentie

Frequentie f

Periode T

$$1 \text{ omw/s} = 2\pi \text{ rad/s} = 1\text{Hz}$$

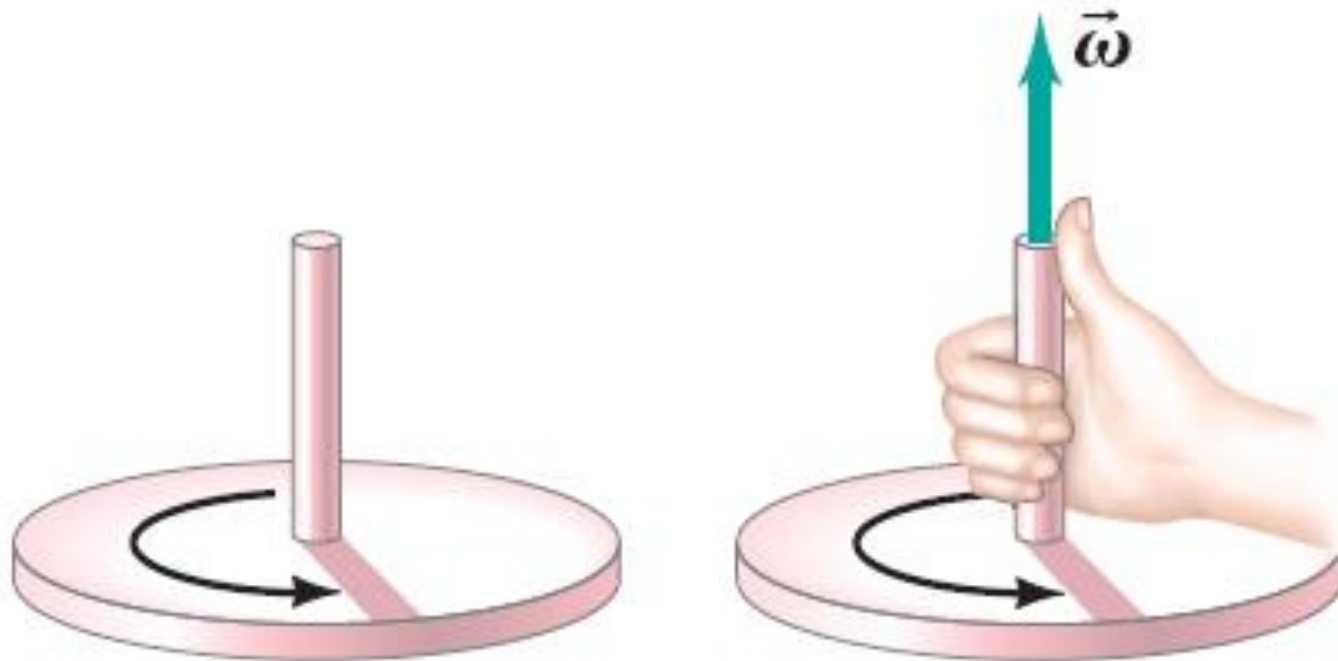
$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad \omega = 2\pi f$$

$$T = \frac{1}{f}$$

Vectoriële aard van rotatiegrootheden (10.2)

- Enige richting die vast met de rotatie kan verbonden worden: richting van de rotatie-as
- Welke zin kiezen voor $\vec{\omega}$: Rechterhandregel (of rechtse schroef)
- Richting van $\vec{\alpha}$: ook langs de rotatie-as, + of – afhankelijk van draaizin en versnelling of vertraging





$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Dus is de hoekversnelling ook een vector langs de rotatie-as. Richting: kijken naar de verandering van $\vec{\omega}$

Constance hoekversnelling (10.3)

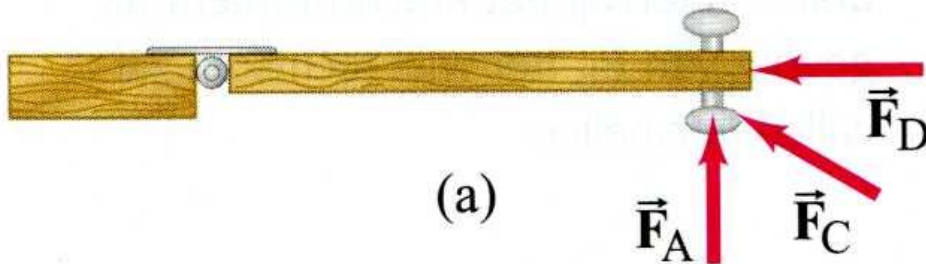
Rotationeel	Lineair	
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$	[constante α, a]
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	[constante α, a]
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	[constante α, a]
$\bar{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$	$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}$	[constante α, a]

Krachtmoment (10.4)

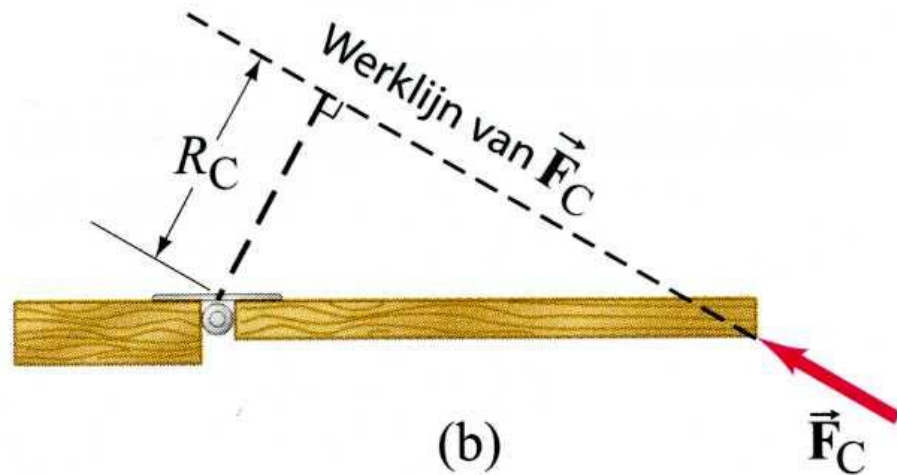
- **Doel:** dynamica van rotatie
- Rotatie-equivalent van de eerste wet van Newton: een vrij draaiend lichaam blijft draaien met een constante hoeksnelheid als er geen krachten (krachtmomenten) op inwerken
- **Tweede wet van Newton???**

Definitie van krachtmoment

- Gemak om een deur te openen:



(a)



(b)

Hoekversnelling is niet enkel afhankelijk van de grootte van de kracht maar ook van het aangrijpingspunt!

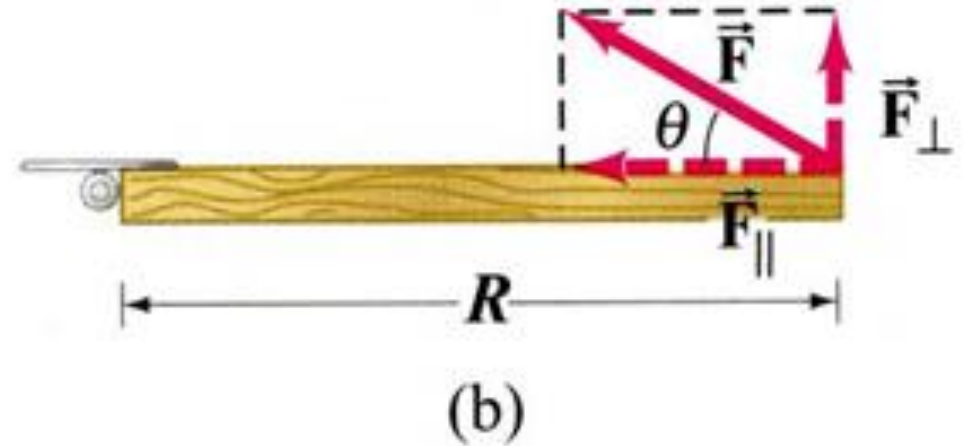
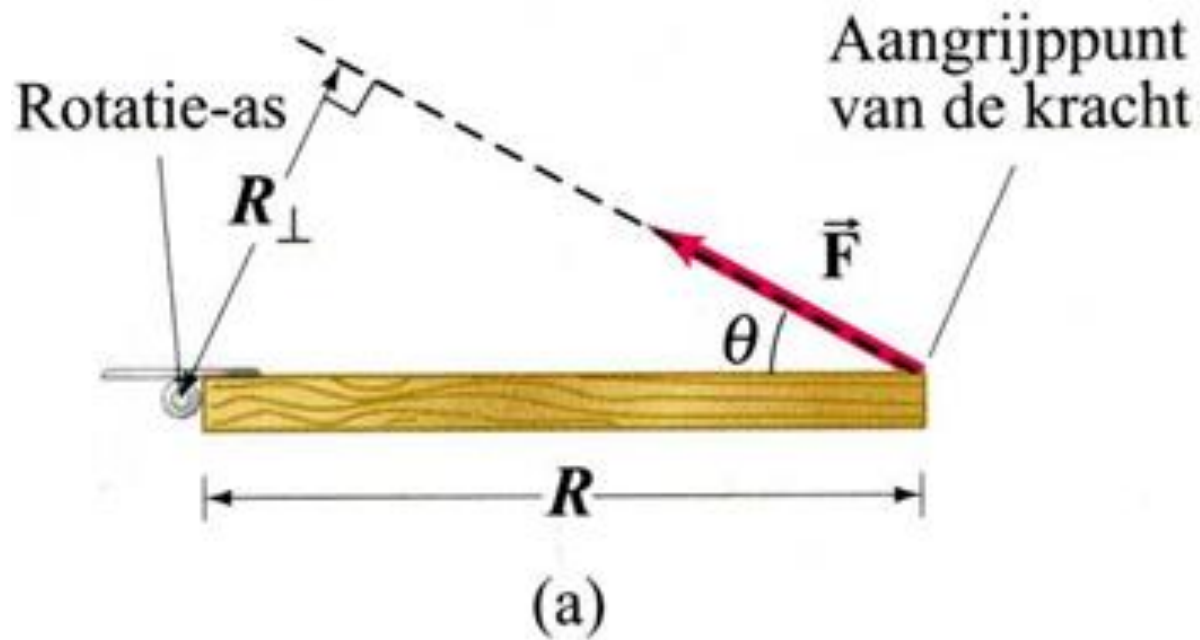
Moment van de kracht om een as = τ =
krachtmoment = draaimoment = product van de
kracht en de arm:

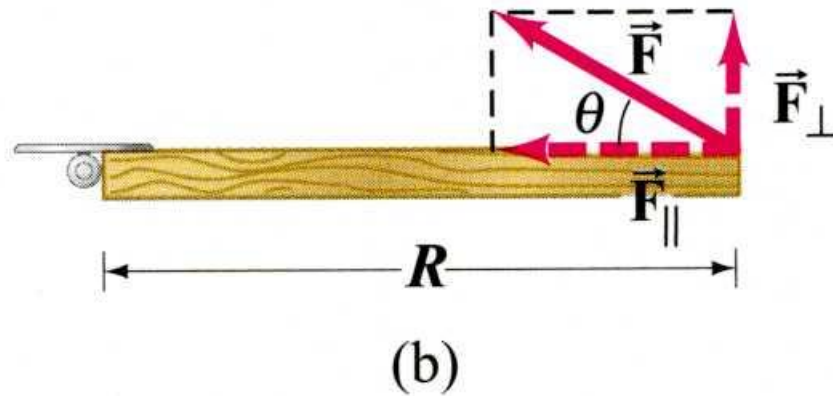
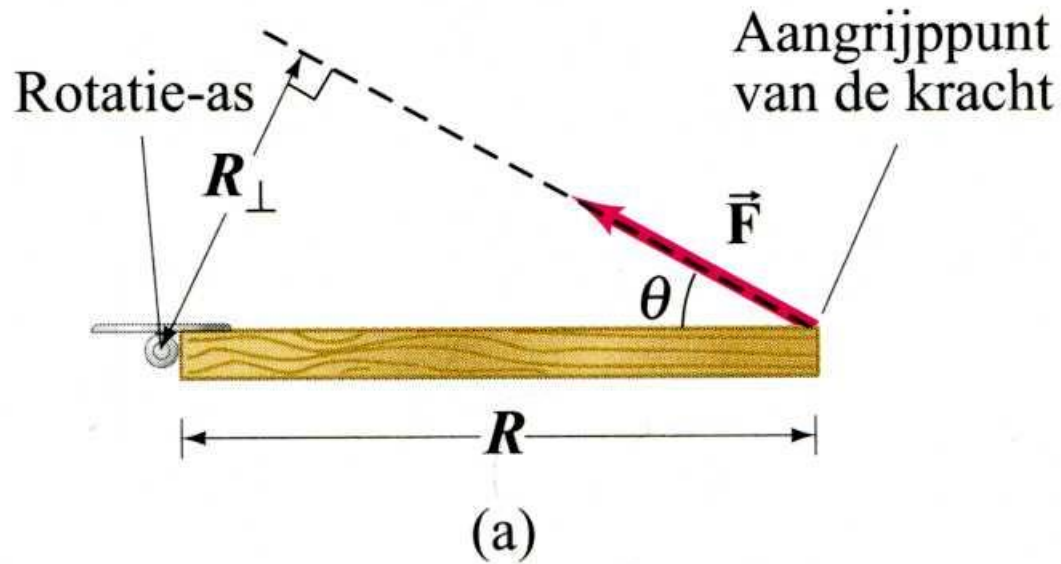
$$\alpha \propto \tau$$

Evenredigheidsconstante berekenen
we later

Definitie van krachttarm

- Arm = loodrechte afstand van de werklijn van de kracht tot de rotatie-as (= de kortste afstand tussen het verlengde van de krachtvector en de rotatie-as):





- Krachtmoment:

$$\tau = R_{\perp} F$$

met $R_{\perp}$ de loodrechte afstand van de werkingslijn van de kracht tot de rotatie-as

- Alternatief:

$$\tau = R F_{\perp}$$

- Allebei equivalent met:

$$\tau = R F \sin \theta$$

Eenheid van krachtmoment

- Eenheid van τ :
 - kracht x afstand
 - N x m
 - Joule (wordt **NIET** gebruikt voor krachtmomenten, enkel voor energie en arbeid)
- Praktijkvoorbeeld: “momentsleutels”: geijkt in Nm





Axis of rotation



Axis of rotation



Accu boor- en schroefmachine LXT 14,4V

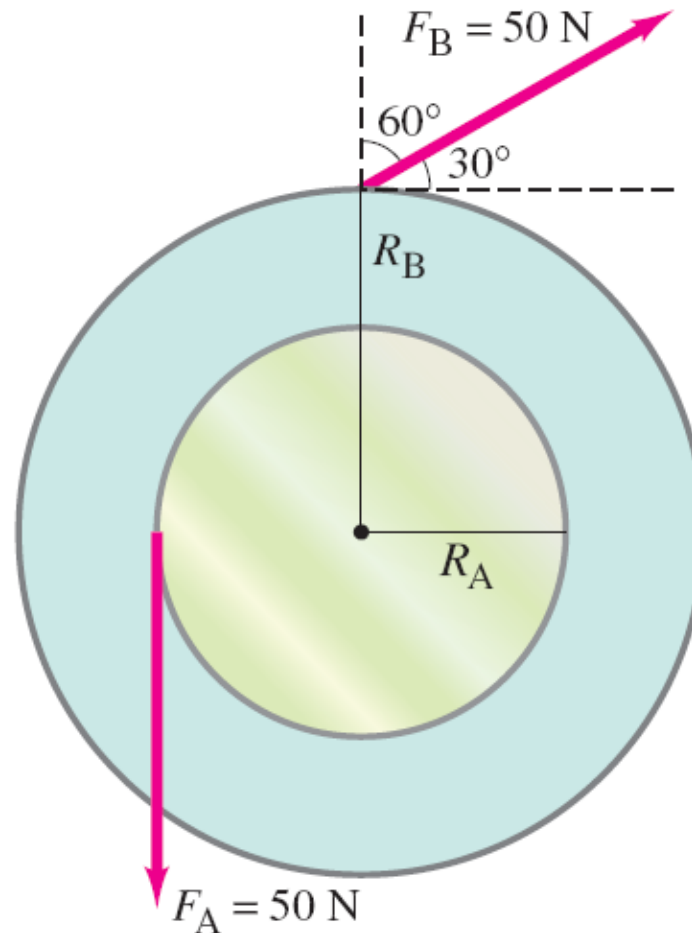


Instelbereik koppelregeling	1 - 5 Nm
Batterijchemie	Li-Ion
Nominale accuspanning	14,4 V
Batterijcapaciteit	4,0 Ah
Gemiddelde oplaadtijd	36 min
Aantal bijgeleverde accu's	2
Toerental onbelast 1	0-400 t.p.m.
Toerental onbelast max.	0-1550 t.p.m.
Blokkeerkoppel	48 Nm
Max. koppel (zachte verbinding)	30 Nm
Max. koppel (harde verbinding)	46 Nm
Maximale boordiameter in staal	13 mm
Maximale boordiameter in hout	38 mm
Spanwijdte boorkop	1,5 - 13 mm
Motorrem	✓

Voorbeeld 10.7 Krachtmoment op een samengesteld wiel

Twee dunne, ronde wielen met stralen $R_A = 30$ cm en $R_B = 50$ cm, zijn aan elkaar bevestigd op een as door het middelpunt van de beide wielen, op de manier zoals is weergegeven in fig. 10.15. Bereken het netto krachtmoment op dit samengestelde wiel als gevolg van de twee krachten in de figuur die elk 50 N groot zijn.

De positie van de as is vast!



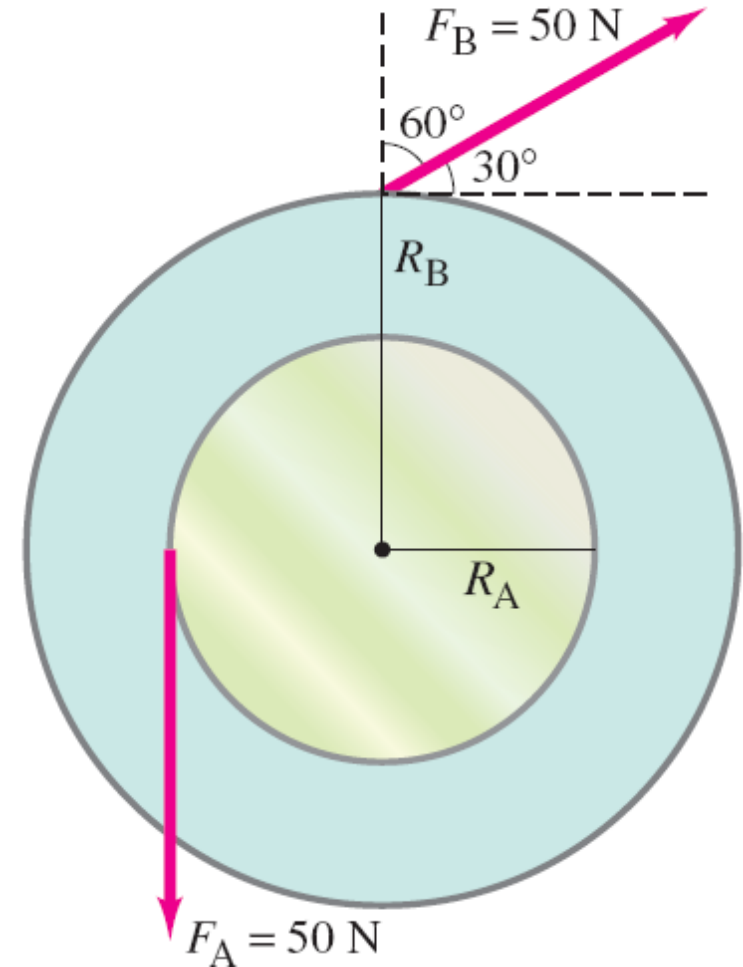
Kiezen we tegenwijzerzin als de positieve zin van rotatie:

$$\tau_A = R_A F_A = 0,30m \cdot 50N = 15Nm$$

$$\begin{aligned}\tau_B &= -R_B F_{B\perp} = -R_B F_B \sin 60^\circ \\ &= -0,50m \cdot 50N \cdot \sqrt{3}/2 = -21,7Nm\end{aligned}$$

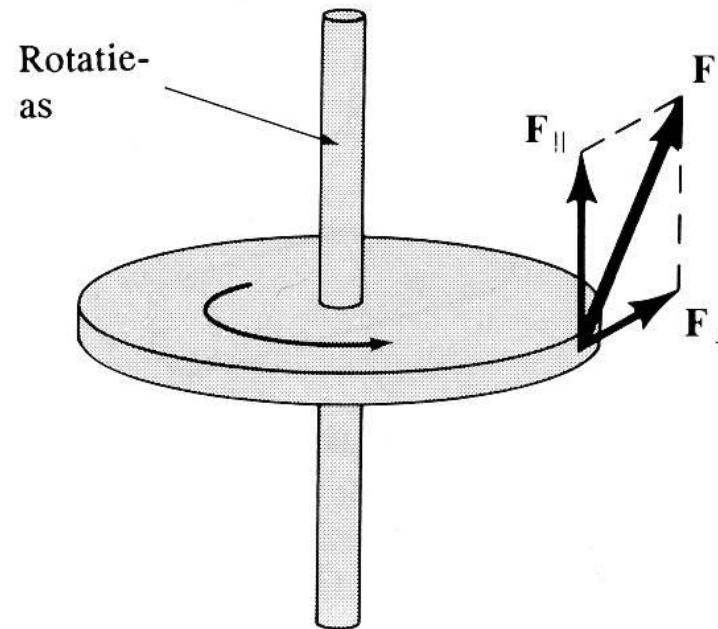
$$\tau = \tau_A + \tau_B = -6,7Nm$$

Het wiel zal dus in wijzerzin draaien



Beperking van dit hoofdstuk

Rotatie om een vaste as: alleen krachten (of componenten van krachten) loodrecht op de rotatie-as spelen een rol



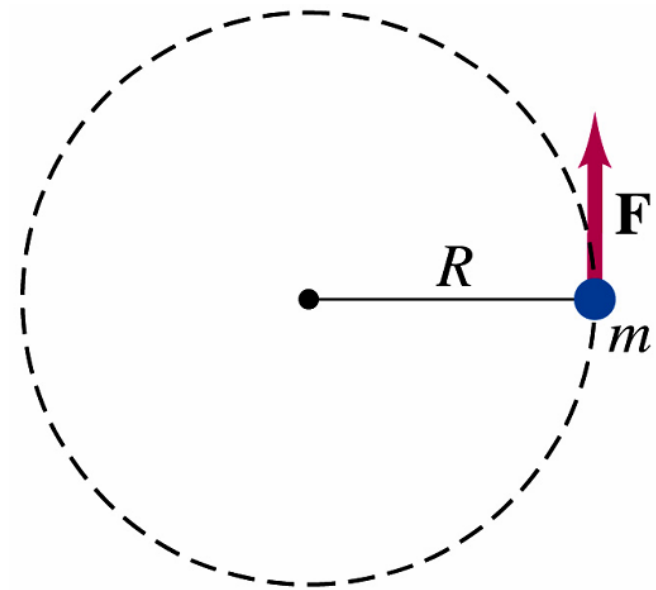
Rotationele dynamica; krachtmoment en rotationele traagheid (10.5)

$$\alpha \propto \tau$$

- Stel een puntmassa, ronddraaiend aan het einde van een massaloze staaf met lengte R , terwijl een kracht F op de massa inwerkt:

$$\left. \begin{array}{l} F = ma = mR\alpha \\ \tau = RF \end{array} \right\} \tau = mR^2\alpha$$

- **mR^2 = traagheidsmoment van de puntmassa**



Traagheidsmoment van een vast lichaam

- Voor een verzameling puntmassa's:

$$\tau = \sum \tau_i = \left(\sum m_i R_i^2 \right) \alpha$$

$$I = \sum m_i R_i^2$$

$$\tau = I \alpha$$

- = rotatie-equivalent van de 2^e Wet van Newton
- Geldig voor rotatie om een as met een vaste oriëntatie (als de as zelf een translatie ondergaat moeten I en α t.o.v. het massamiddelpunt berekend worden)
- τ = de som van de uitwendige krachtmomenten
- I = het traagheidsmoment van het lichaam (eenheid: kg.m²)

2^e Wet van Newton voor rotatie om een vaste as

- **Translatie**: alleen de grootte van de massa is van belang
- **Rotatie**: massaverdeling is van belang; het traagheidsmoment is afhankelijk van deze massaverdeling

