

28 OKTOBER 2021

TOEPASSINGEN VAN INTEGRALEN

Prof. dr. ir. Jan Baetens

Notes

Notes

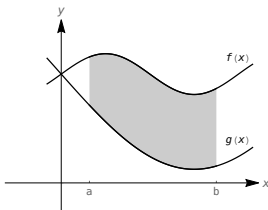
OVERZICHT

- 1 OPPERVLAKTES
- 2 VOLUMES
- 3 BOOGLENGTE
- 4 MANTELOPPERVLAKTE
- 5 ARBEID

Prof. dr. ir. Jan Baetens

2 / 41

OPPERVLAKTE IN CARTESISCHE COÖRDINATEN



$$\text{Oppervlakte} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Notes

Oppervlaktes

EXTRA VOORBEELD

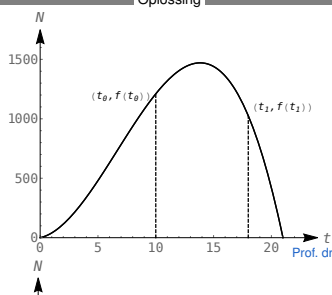


Een typisch ziekteverloop voor de mazelen wordt beschreven door

$$N = f(t) = -t(t - 21)(t + 1),$$

waarbij N het aantal geïnfecteerde cellen per ml bloedplasma voorstelt. Op basis van de grafiek van f kan de besmettelijkheid van een patiënt berekend worden als de oppervlakte begrepen tussen de grafiek en de rechte door $(t_0, f(t_0))$ en $(t_1, f(t_1))$, met t_0 en t_1 resp. de start en het einde van de besmettelijke periode. Bereken de besmettelijkheid van een patiënt waarvoor $t_0 = 10$ en $t_1 = 18$.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

5 / 41

Notes

EXTRA VOORBEELD



Een typisch ziekteverloop voor de mazelen wordt beschreven door

$$N = f(t) = -t(t - 21)(t + 1),$$

waarbij N het aantal geïnfecteerde cellen per ml bloedplasma voorstelt. Op basis van de grafiek van f kan de besmettelijkheid van een patiënt berekend worden als de oppervlakte begrepen tussen de grafiek en de rechte door $(t_0, f(t_0))$ en $(t_1, f(t_1))$, met t_0 en t_1 resp. de start en het einde van de besmettelijke periode. Bereken de besmettelijkheid van een patiënt waarvoor $t_0 = 10$ en $t_1 = 18$.

Prof. dr. ir. Jan Baetens

6 / 41

Notes

EXTRA VOORBEELD



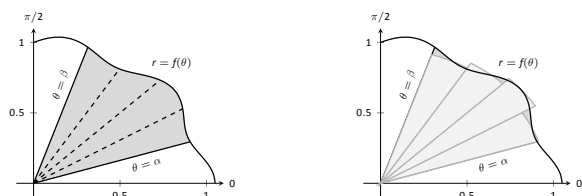
Bepaal de oppervlakte tussen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$.



Prof. dr. ir. Jan Baetens

7 / 41

Notes

OPPERVLAKTE IN POOLCOÖRDINATEN:
CIRKELSECTOREN

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f(c_i)^2 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

8 / 41

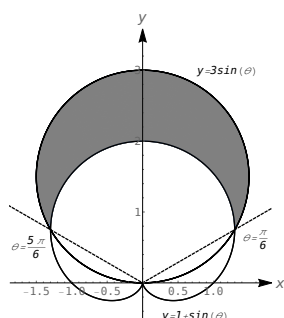
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de oppervlakte binnen de cirkel $r = 3 \sin(\theta)$ en buiten de cardioïde $r = 1 + \sin(\theta)$.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

9 / 41

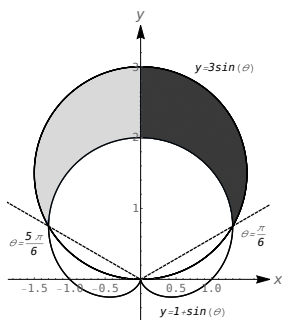
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de oppervlakte binnen de cirkel $r = 3 \sin(\theta)$ en buiten de cardioïde $r = 1 + \sin(\theta)$.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

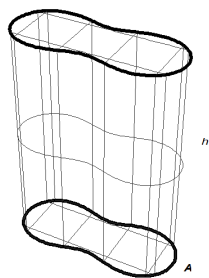
10 / 41

Notes

Notes



VOLUME OP BASIS VAN DWARSDOORSNEDE



$$\text{Volume} \approx \sum_{i=1}^n [\text{Area} \times \text{thickness}]$$

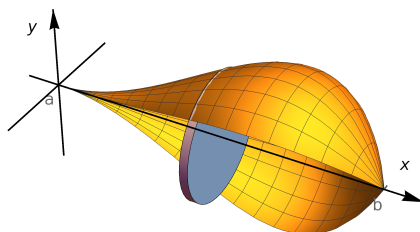
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n A(x_i) \Delta x_i \\ &= \int_a^b A(x) dx \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

12 / 41

Notes

VOLUME VAN OMWENTELINGSLICHAAMEN



$$V = \pi \int_a^b R(x)^2 dx$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

13 / 41

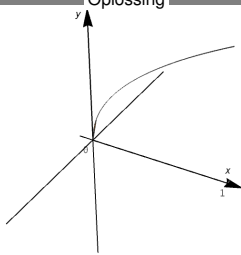
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$ te wentelen om de x -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

14 / 41

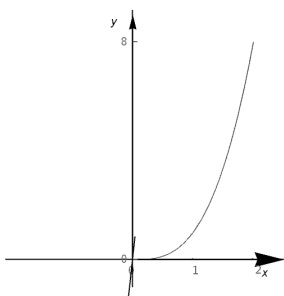
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = x^3$, $y = 8$ en $x = 0$ te wentelen om de y -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

15 / 41

Notes

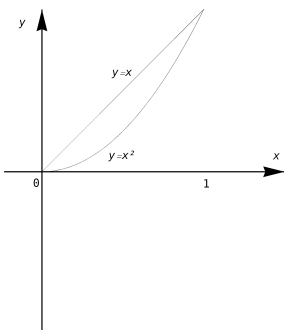
EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = x$ en $y = x^2$ te wentelen om de x -as.



Oplossing

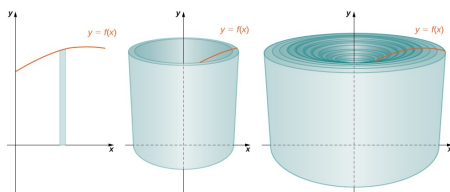


Prof. dr. ir. Jan Baetens

16 / 41

Notes

VOLUME OP BASIS VAN CILINDERS



$$\text{Volume} \approx \sum_{i=1}^n 2\pi r_i h_i \Delta x_i$$

$$\text{Volume} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n 2\pi r_i h_i \Delta x_i$$

$$= 2\pi \int_a^b r(x) h(x) dx$$

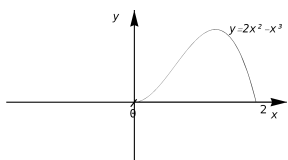
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = 2x^2 - x^3$ en $y = 0$ te wentelen om de y -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

20 / 41

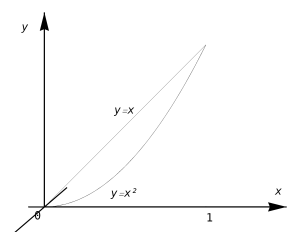
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = x$ en $y = x^2$ te wentelen om de y -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

21 / 41

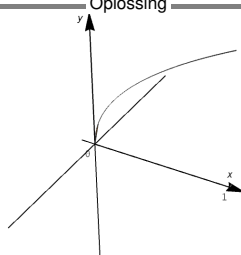
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$ te wentelen om de x -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

22 / 41

Notes

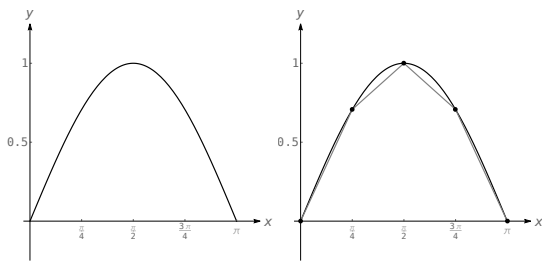
Notes

**CALCULATE
ARC LENGTH
OF A FUNCTION
WITH INTEGRALS**

QUESTION 3



BOOGLENGTE IS DE SOM DER LENGTES

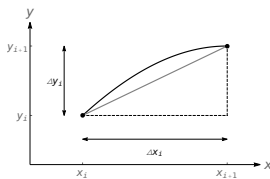


Prof. dr. ir. Jan Baetens

24 / 41

Notes

BOOGLENGTE IS DE SOM DER LENGTES



$$L \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

25 / 41

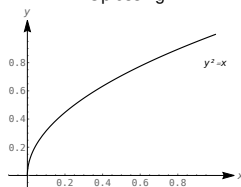
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de booglengte van de parabool $y^2 = x$ van $(0, 0)$ tot $(1, 1)$.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

26 / 41

Notes

BOOGLENGTE VANUIT PARAMETERVOORSTELLING

- Parametervoorstelling: $x = f(t)$ and $y = g(t)$
- Booglengte

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{g'(t)^2}{f'(t)^2}} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{g'(t)^2}{f'(t)^2}} f'(t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

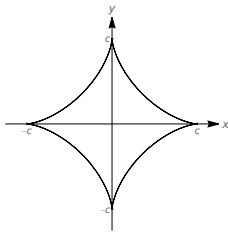
27 / 41

Notes

VOORBEELD 13.16

Bepaal de booglengte van de astroïde beschreven door $x = c \cos^3(t)$ en $y = c \sin^3(t)$.

Oplossing



■ Gezochte booglengte

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{3c}{2} \sin(2t) dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3c}{2} \sin(2t) dt = 6c \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

28 / 41

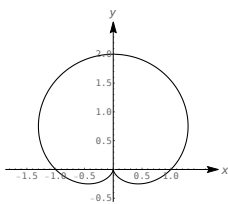
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de booglengte van de cardioïde beschreven door $r = 1 + \sin(\theta)$.

Oplossing



■ Parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = (1 + \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ y = (1 + \sin(\theta)) \sin(\theta) \end{cases}$$

■ Afgeleiden

$$\begin{cases} x' = -\sin(\theta) + \cos(2\theta) \\ y' = \cos(\theta) + \sin(2\theta) \end{cases}$$

■ Argument van $\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}$

$$\begin{aligned} x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= \sin^2(\theta) + \cos^2(2\theta) - 2\sin(\theta)\cos(2\theta) \\ &\quad + \cos^2(\theta) + \sin^2(2\theta) + 2\cos(\theta)\sin(2\theta) \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

29 / 41

Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de booglengte van de cardioïde beschreven door $r = 1 + \sin(\theta)$.

Oplossing

■ Argument van $\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}$

$$\begin{aligned} x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 &= 2 - 2\sin(\theta)\cos(2\theta) + 2\cos(\theta)\sin(2\theta) \\ &= 2 + 2\sin(\theta)\cos^2(\theta) + 2\sin^3(\theta) = 2 + 2\sin(\theta) \end{aligned}$$

■ Booglengte

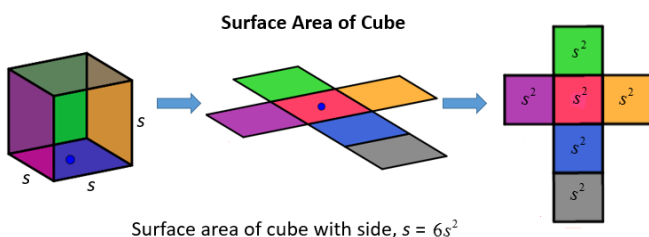
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\sin(\theta)} d\theta = 8$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

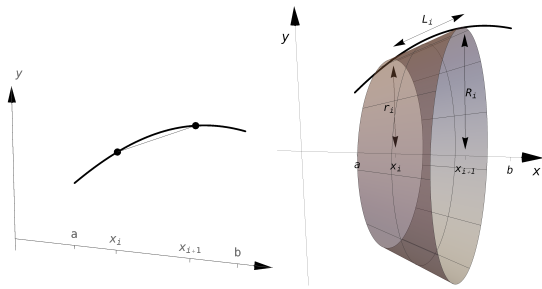
30 / 41

Notes

Notes



MANTELOPPERVLAKE IS DE SOM DER OPPERVLAKTES



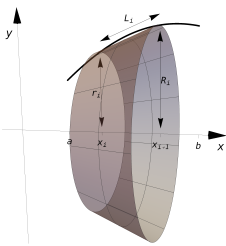
A_i = manteloppervlakte afgeknotte kegel

Prof. dr. ir. Jan Baetens

32 / 41

Notes

MANTELOPPERVLAKE IS DE SOM DER OPPERVLAKTES



$$\begin{aligned}
 A &\approx \sum_i A_i \\
 &= \text{som mantelopp. afgeknotte kegels} \\
 &= \sum_i 2\pi \left(\frac{r_i + R_i}{2} \right) L_i \\
 &= \sum_i 2\pi \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \left(\sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i \right) \\
 &= \sum_i 2\pi f(d_i) \left(\sqrt{1 + f'(c_i)^2} \Delta x_i \right)
 \end{aligned}$$

■ Gezochte manteloppervlakte

$$SA = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

33 / 41

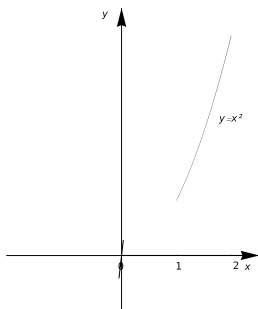
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = x^2$, $y = 1$ en $y = 4$ te wentelen om de y -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

34 / 41

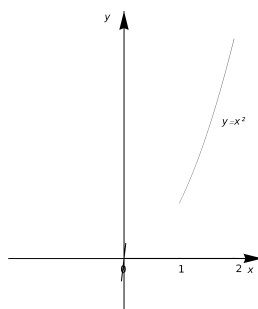
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de manteloppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door het gebied begrensd door $y = x^2$, $y = 1$ en $y = 4$ te wentelen om de y -as.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

35 / 41

Notes

MANTELOPPERVLAKTE VANUIT PARAMETERVOORSTELLING

- Parametervoorstelling: $x = f(t)$ and $y = g(t)$
- Manteloppervlakte bij wenteling om x -as

$$\begin{aligned} SA &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} g(t) \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} f'(t) dt \\ &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} g(t) \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt \end{aligned}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

36 / 41

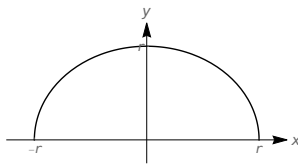
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de manteloppervlakte van een bol met straal r .

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

37 / 41

Notes

OVERZICHT

- 1 OPPERVLAKTES
- 2 VOLUMES
- 3 BOOGLENGTE
- 4 MANTELOPPERVLAKTE
- 5 ARBEID

Prof. dr. ir. Jan Baetens

38 / 41

Notes

ARBEID IS KRACHT MAAL VERPLAATSING

- Constante kracht $[N=(kg\ m)/s^2]$

$$W = F \Delta x$$

- Variabele kracht $F(x)$

$$W = \sum_{i=1}^n F(c_i) \Delta x_i$$

met $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$

- Continuüm limiet

$$W = \int_a^b F(x) dx$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

39 / 41

Notes

VOORBEELD 13.22

Een klimtouw (66 g/m) van 60 m hangt over de rand van een klif. Hoeveel arbeid verricht een klimmer bij het binnenhalen van dit touw?

Oplossing

Krachtenfunctie

$$F(x) = mg = (0.066)(60 - x)(9.8)$$

Verichte arbeid

$$W = \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b (0.066)(60 - x)(9.8) \, dx = \int_0^{60} (0.066)(60 - x)(9.8) \, dx$$

Notes

EVEN RECAPITULEREN....

Notes

Notes

Notes
