

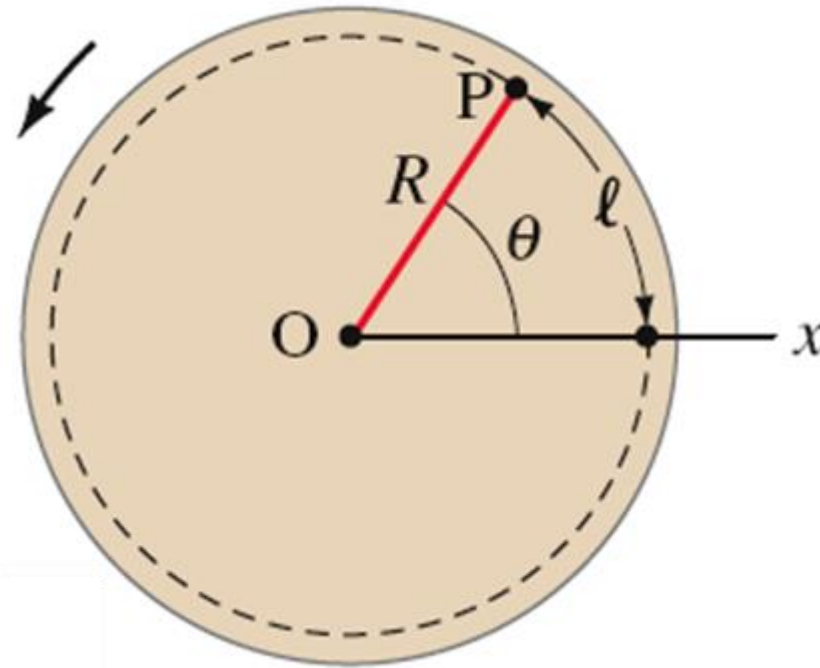
Hoofdstuk 10: Rotatie om een vaste as



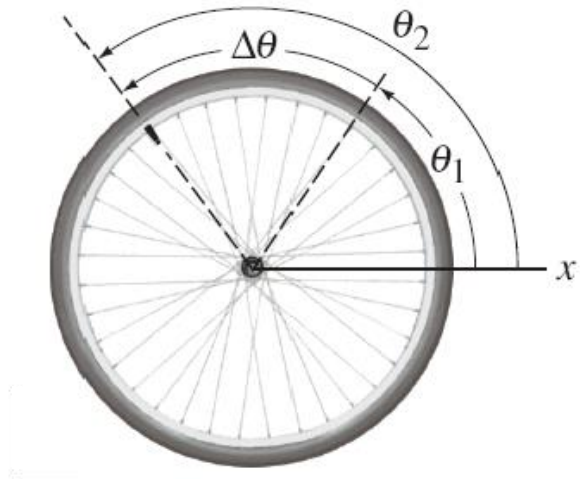
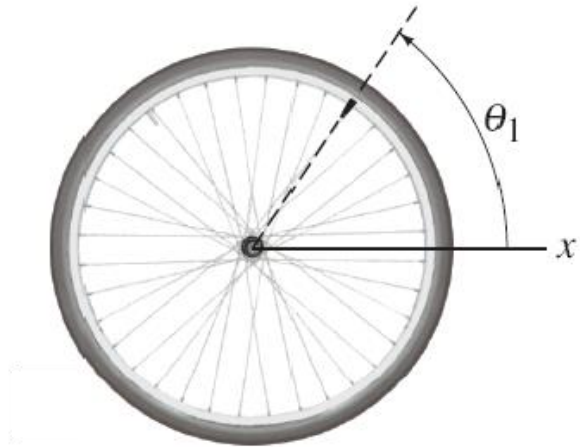
Hoekverplaatsing – hoeksnelheid - hoekversnelling

- Hoekverplaatsing van elk punt van het voorwerp (zuivere rotatie van een star lichaam):

$$\theta = \frac{\ell}{R}$$



Definitie van de radiaal!



Hoekverplaatsing:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Gemiddelde hoeksnelheid:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Momentane hoeksnelheid:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

- Gemiddelde en momentane hoeksnelheid van elk punt van het draaiende lichaam:

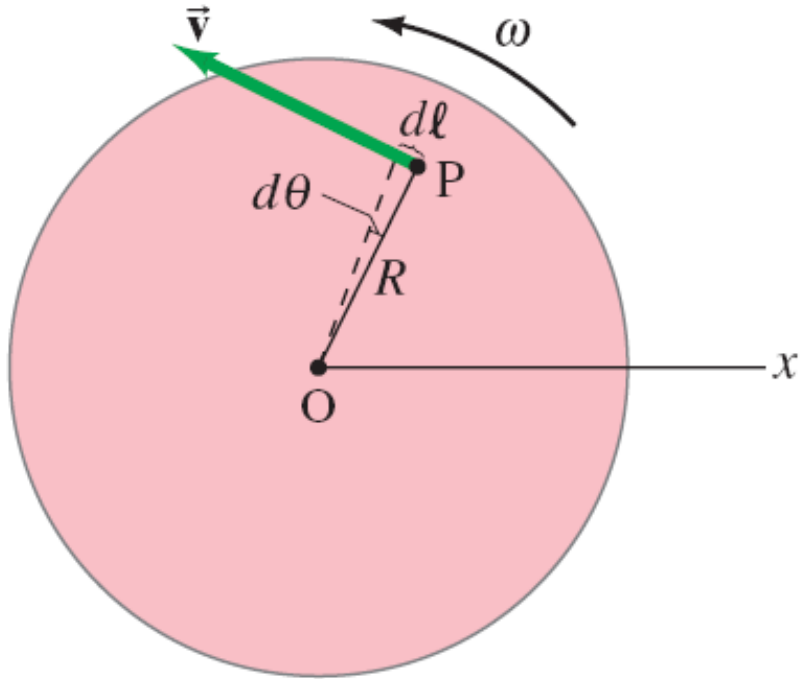
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Gemiddelde en momentane hoekversnelling van elk punt:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad ; \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- Hoekverplaatsing, hoeksnelheid en hoekversnelling zijn gelijk voor alle punten van het lichaam!

Verband met lineaire snelheid



$$\ell = R\theta \Rightarrow \frac{d\ell}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = R\omega$$

<i>Lineair</i>	<i>Soort</i>	<i>Rotationeel</i>	<i>Relatie (θ in radialen)</i>
x	Verplaatsing	θ	$x = R\theta$
v	Snelheid	ω	$v = R\omega$
a_{tan}	Versnelling	α	$a_{\text{tan}} = R\alpha$

Hoeksnelheid en rotatiefrequentie

$$1 \text{ omw/s} = 2\pi \text{ rad/s} = 1\text{Hz}$$

Frequentie f

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad \omega = 2\pi f$$

Periode T

$$T = \frac{1}{f}$$

Vectoriële aard van rotatiegrootheden (10.2)

- Enige richting die vast met de rotatie kan verbonden worden: richting van de rotatie-as
- Welke zin kiezen voor $\vec{\omega}$: Rechterhandregel (of rechtse schroef)
- Richting van $\vec{\alpha}$: ook langs de rotatie-as, + of – afhankelijk van draaizin en versnelling of vertraging

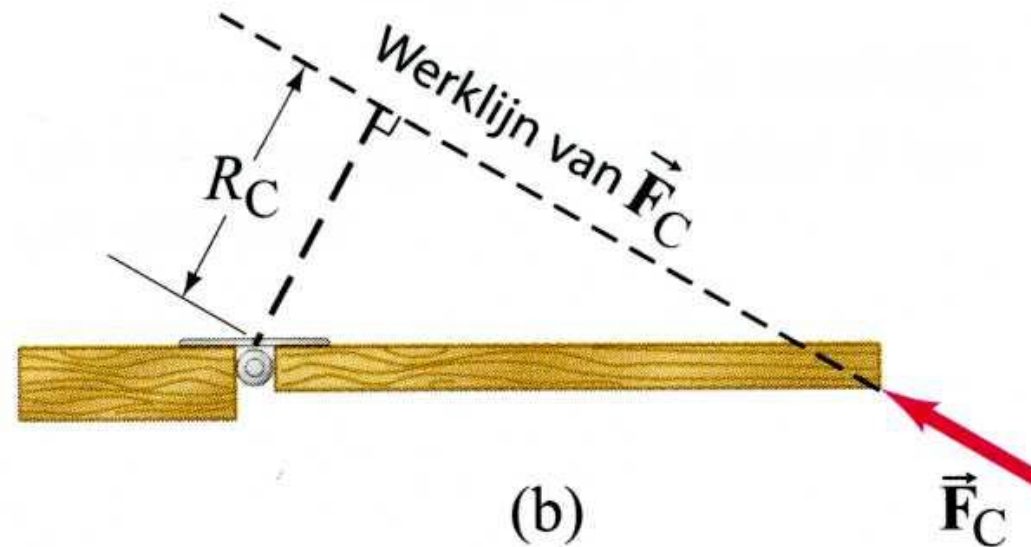
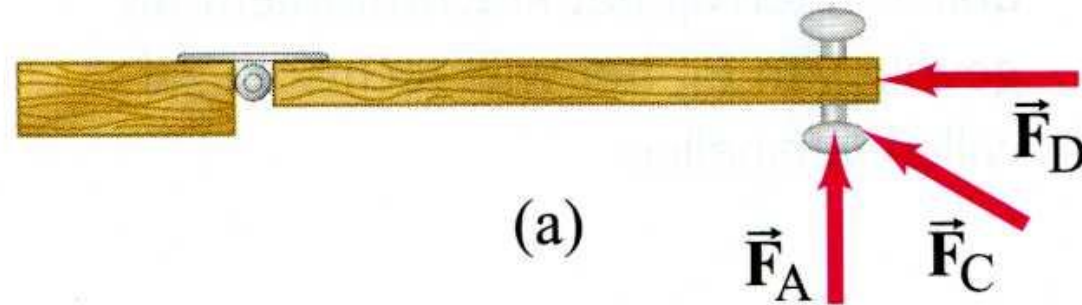


Krachtmoment (10.4)

- **Doel:** dynamica van rotatie
- Rotatie-equivalent van de eerste wet van Newton: een vrij draaiend lichaam blijft draaien met een constante hoeksnelheid als er geen krachten (krachtmomenten) op inwerken
- **Tweede wet van Newton voor rotatiebewegingen?**

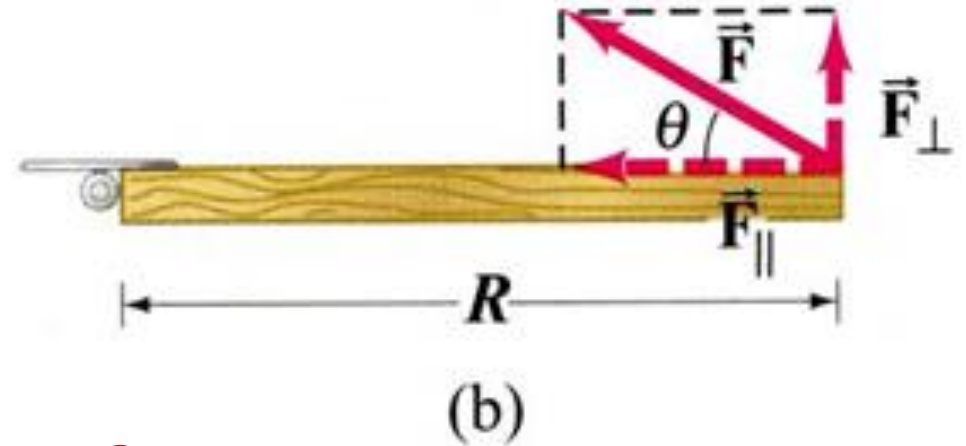
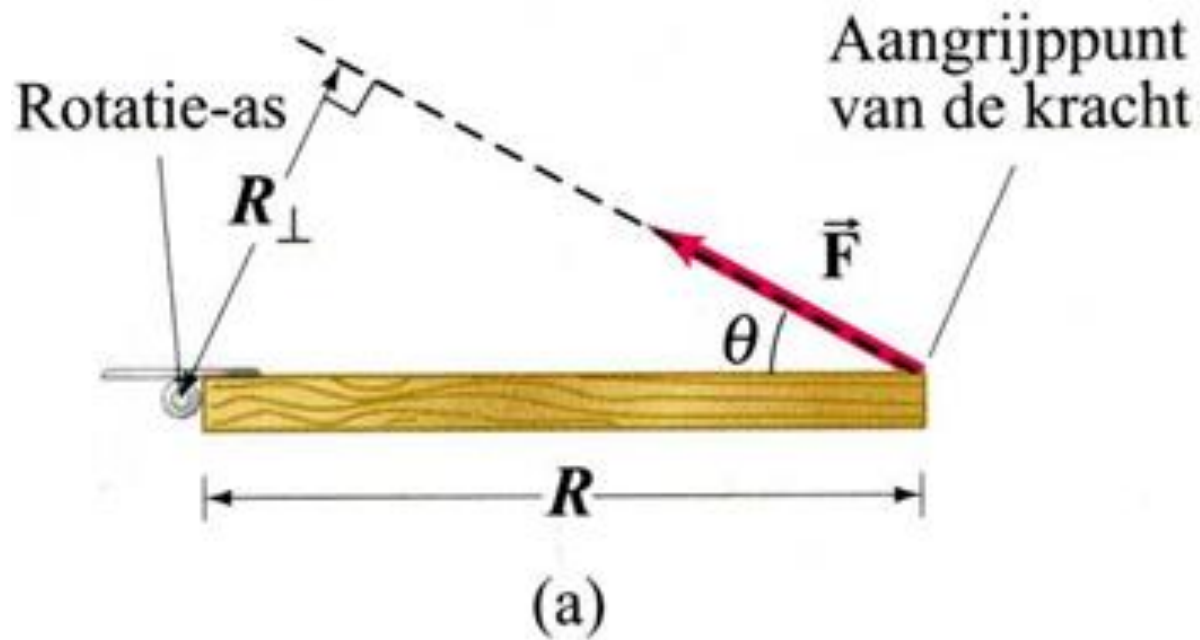
Definitie van krachtmoment

- Gemak om een deur te openen:



Definitie van krachtmoment

- Arm = loodrechte afstand van de werklijn van de kracht tot de rotatie-as (= de kortste afstand tussen het verlengde van de krachtvector en de rotatie-as):



$$\tau = RF \sin \theta$$

Eenheid van krachtmoment

- Eenheid van τ :
 - kracht x afstand
 - N x m
 - Joule (wordt **NIET** gebruikt voor krachtmomenten, enkel voor energie en arbeid)



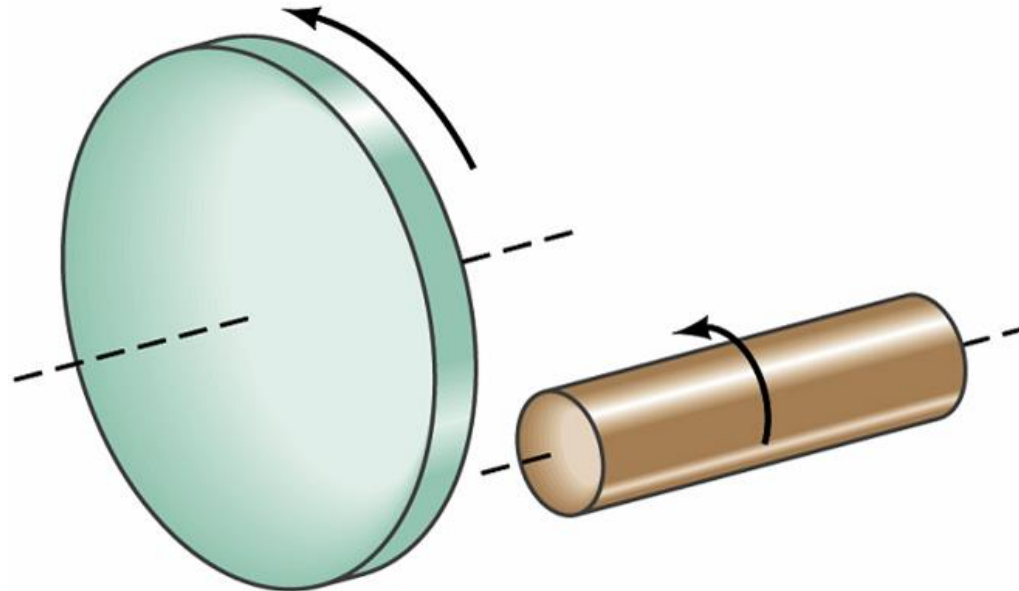
Axis of rotation



Axis of rotation

2^e Wet van Newton voor rotatie om een vaste as

- **Translatie**: alleen de grootte van de massa is van belang
- **Rotatie**: massaverdeling is van belang; het traagheidsmoment is afhankelijk van deze massaverdeling



Traagheidsmoment van een vast lichaam

- Voor een verzameling puntmassa's:

$$\tau = \sum \tau_i = \left(\sum m_i R_i^2 \right) \alpha$$

$$I = \sum m_i R_i^2$$

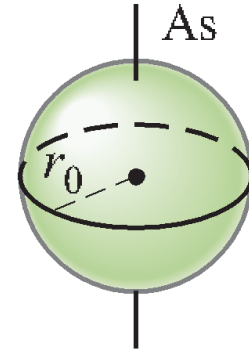
$$\tau = I \alpha$$

- = rotatie-equivalent van de 2^e Wet van Newton
- τ = de som van de uitwendige krachtmomenten
- I = het traagheidsmoment van het lichaam (eenheid: kg.m²)

Voorwerp	Locatie van de rotatie-as	Traagheids- moment
(a) Dunne hoepel, straal R_0	Door middenpunt	MR_0^2
(b) Dunne hoepel, straal R_0 breedte w	Door centrale diameter	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
(c) Massieve cilinder, straal R_0	Door middenpunt	$\frac{1}{2}MR_0^2$
(d) Holle cilinder, inwendige straal R_1 uitwendige straal R_2	Door middenpunt	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

- (e) **Homogene bol,**
straal r_0

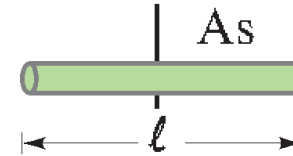
Door
middelpunt



$$\frac{2}{5}Mr_0^2$$

- (f) **Lange homogene
stang,**
lengte ℓ

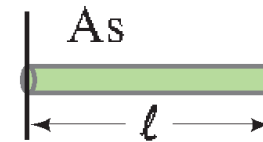
Door
middelpunt



$$\frac{1}{12}M\ell^2$$

- (g) **Lange homogene
stang,**
lengte ℓ

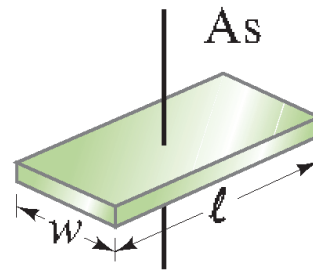
Door
uiteinde



$$\frac{1}{3}M\ell^2$$

- (h) **Rechthoekige
dunne plaat,**
lengte ℓ , breedte w

Door
middelpunt



$$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$$

35. (II) Een draaimolen versnelt vanuit rust naar 0,72 rad/s in 34 s. Veronderstel dat de draaimolen een homogene schijf met een straal van 7,0 m is en een massa van 31.000 kg heeft. Bereken het benodigde netto krachtmoment om de draaimolen te versnellen.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0,72 \text{ rad/s}}{34 \text{ s}} = 0,021 \text{ rad/s}^2$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \cdot 31 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot (7,0 \text{ m})^2 = 760 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2$$

$$\tau = I \alpha = \frac{0,021 \text{ rad}}{\text{s}^2} \cdot 760 \cdot 10^3 \text{ kgm}^2 = 16 \cdot 10^3 \text{ Nm}$$

Voorbeeld 10.9 Een zware katrol

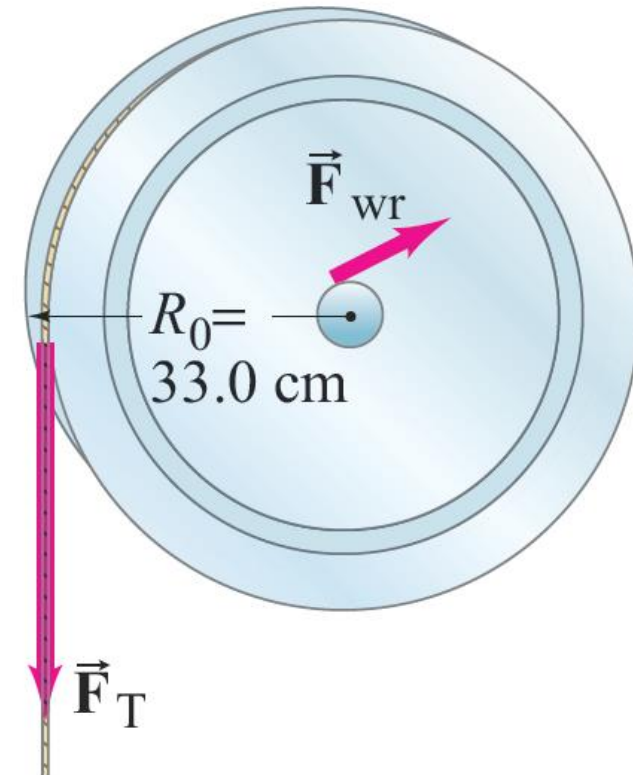
Op een touw wordt een kracht van 15,0 N (voorgesteld door $\vec{F}_T$) uitgeoefend. Het touw is om een katrol gewikkeld die een massa $M = 4,00$ kg en een straal $R_0 = 33,0$ cm heeft, fig. 10.21. De katrol versnelt eenparig vanuit rust en bereikt een hoeksnelheid van 30,0 rad/s in 3,00 s. Bereken het traagheidsmoment van de katrol als er een krachtmoment is als gevolg van de wrijving, τ_{wr} van 1,10 Nm op de as van de katrol. De katrol roteert om zijn middelpunt.

$$\tau_{net} = 0,330m \cdot 15,0N - 1,10Nm = 3,85Nm$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30,0 rad/s}{3,00s} = 10,0 rad/s^2$$

$$\tau_{net} = I\alpha$$

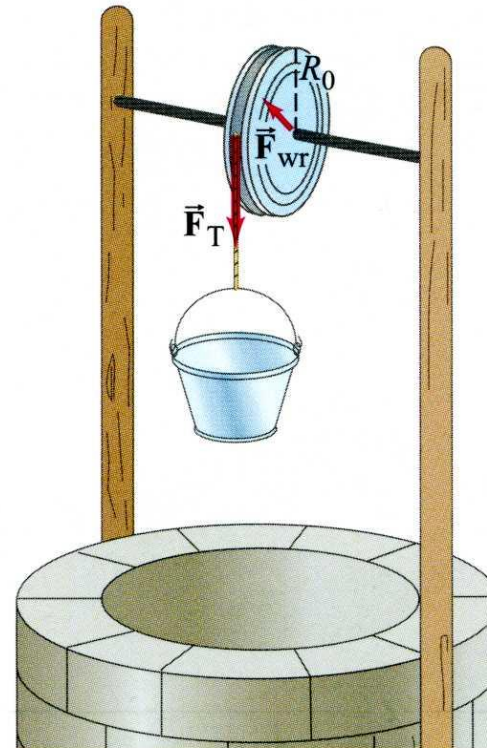
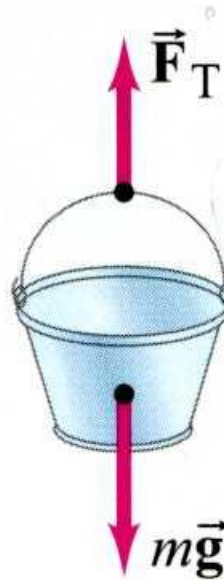
$$\Rightarrow I = \frac{\tau_{net}}{\alpha} = \frac{3,85Nm}{10,0 rad/s^2} = 0,385 kgm^2$$



Voorbeeld 10.10 Katrol en emmer

Bekijk de katrol in fig. 10.21 en voorbeeld 10.9 met dezelfde wrijving nog een keer. Dit keer wordt er echter geen constante kracht van 15,0 N op het touw uitgeoefend, maar hangt er een emmer met een gewicht $w = 15,0$ N (massa $m = w/g = 1,53$ kg) aan het touw. Zie fig. 10.22a. We veronderstellen dat het touw een verwaarloosbare massa heeft en niet rekt of slipt over de katrol. (a) Bereken de hoekversnelling α van de katrol en de lineaire versnelling a van de emmer. (b) Bereken de hoeksnelheid ω van de katrol en de lineaire snelheid v van de emmer op $t = 3,00$ s als de katrol (en de emmer) in rust zijn op $t = 0$.

Dit is hetzelfde wiel als in voorbeeld 10.9



$$I = 0,385 \text{kgm}^2$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{F_T R_0 - \tau_{wr}}{I}$$

$$\left. \begin{array}{l} ma = mg - F_T \\ R_0 \alpha = a \end{array} \right\} F_T = mg - mR_0 \alpha$$

$$\alpha = \frac{(mg - mR_0 \alpha) R_0 - \tau_{wr}}{I}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{mgR_0 - \tau_{wr}}{I + mR_0^2} = \frac{15 \text{N} \cdot 0,330 \text{m} - 1,10 \text{Nm}}{0,385 \text{kgm}^2 + 1,53 \text{kg} \cdot (0,330 \text{m})^2} = 6,98 \text{rad/s}^2$$

$$a = R_0 \alpha = 0,330 \text{m} \cdot 6,98 \text{rad/s}^2 = 2,30 \text{m/s}^2$$

$$(b) : \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + 6,98 \text{rad/s}^2 \cdot 3 \text{s} = 20,9 \text{rad/s}$$

$$v = R_0 \omega = 0,330 \text{m} \cdot 20,9 \text{rad/s} = 6,91 \text{m/s}$$

$$v = v_0 + at = 0 + 2,30 \text{m/s}^2 \cdot 3 \text{s} = 6,90 \text{m/s}$$

Traagheidsmomenten bepalen (10.7)

- Bepaling van het traagheidsmoment I van een willekeurig lichaam om een willekeurige as: experimenteel het krachtmoment meten om een bepaalde hoekversnelling te bekomen:

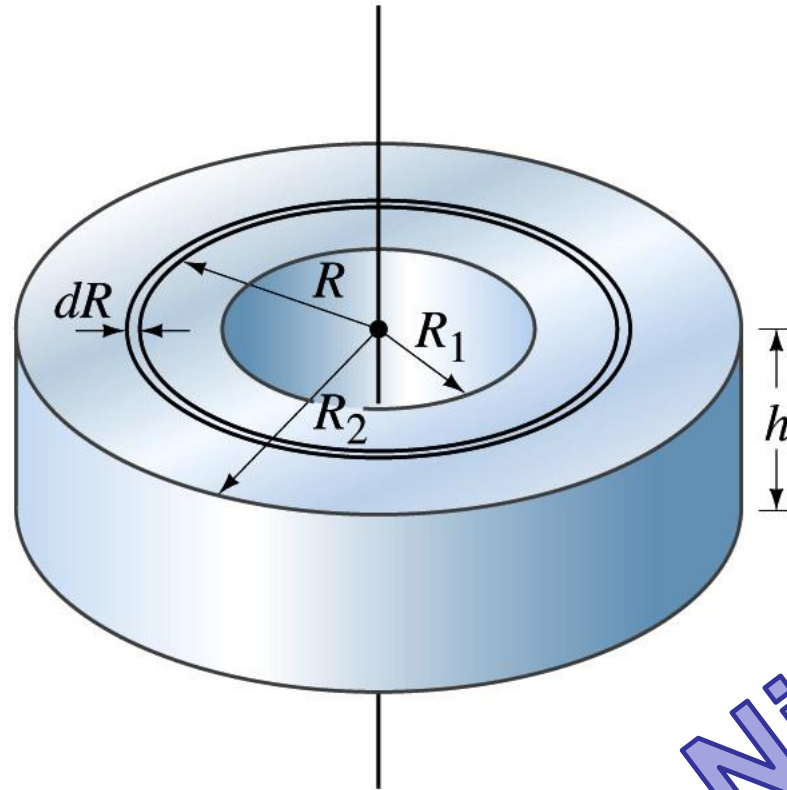
$$I = \tau / \alpha$$

- Voor lichamen met een continue massaverdeling (R = loodrechte afstand tot de rotatie-as; dm = infinitesimaal massapunt van het lichaam):

$$I = \int R^2 dm$$

Voorbeeld 10.12 Cilinder, massief of hol

(a) Toon aan dat het traagheidsmoment van een eenvormige holle cilinder met een inwendige straal R_1 , een uitwendige straal R_2 en een massa M gelijk is aan $I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$, zoals in fig. 10.20d, als de rotatie-as door het middelpunt loopt langs de symmetrieas. (b) Bepaal het traagheidsmoment van een massieve cilinder.



Niet te kennen

$$I = \int R^2 dm$$

$$dm = \rho dV$$

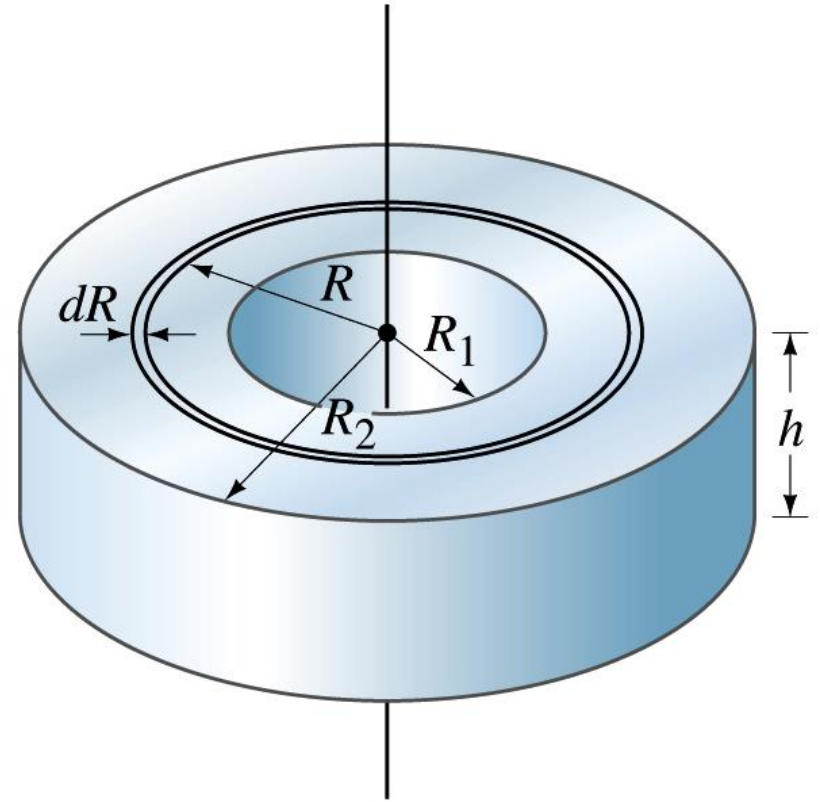
$$dV = (2\pi R)(dR)(h) \left. \vphantom{\int} \right\} dm = 2\pi\rho h R dR$$

$$I = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho h R^3 dR = 2\pi\rho h \left[\frac{R^4 - R_1^4}{4} \right]$$

$$M = \rho V = \rho h (\pi R_2^2 - \pi R_1^2)$$

$$R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)$$

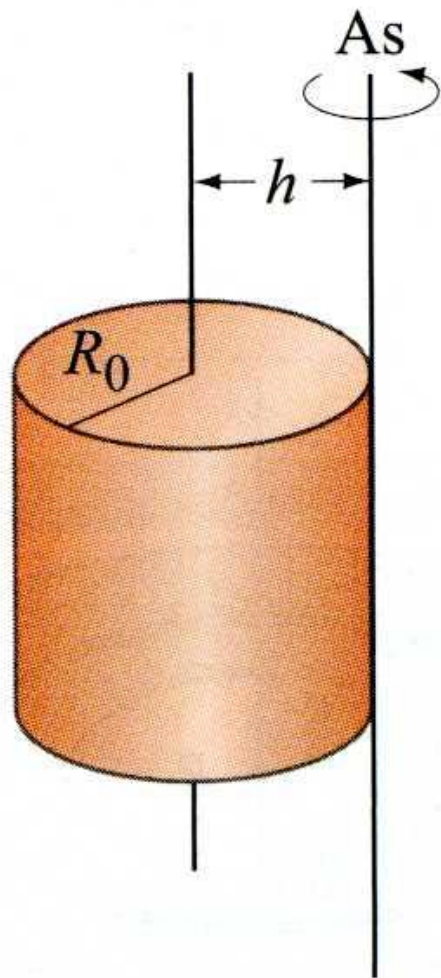
$$\Rightarrow I = \frac{\pi\rho h}{2} (R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2) = \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$



Kan ook zonder integreren: zie vraagstukken!

Niet te kennen

Evenwijdige-assenstelling of verschuivingsstelling (stelling van Steiner), geldig voor alle objecten: voor een rotatie-as op afstand h parallel aan een as door het massamiddelpunt geldt voor het traagheidsmoment van object met massa M :



$$I = I_{MM} + Mh^2$$

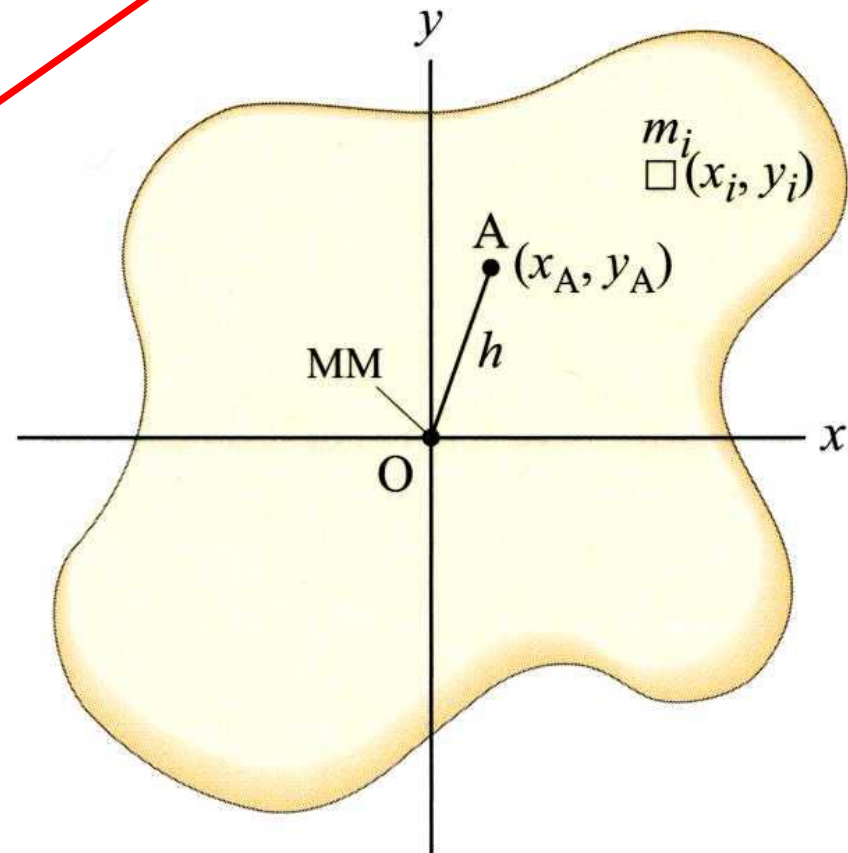
$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}MR^2$$

Evenwijdige-assenstelling: bewijs

$$\begin{aligned} I_A &= \sum m_i \left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 \right] \\ &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2x_A \sum m_i x_i - 2y_A \sum m_i y_i + \left(\sum m_i \right) (x_A^2 + y_A^2) \\ &= I_{MM} + 0 + 0 + Mh^2 \end{aligned}$$

Massamiddelpunt is door de oorsprong gekozen

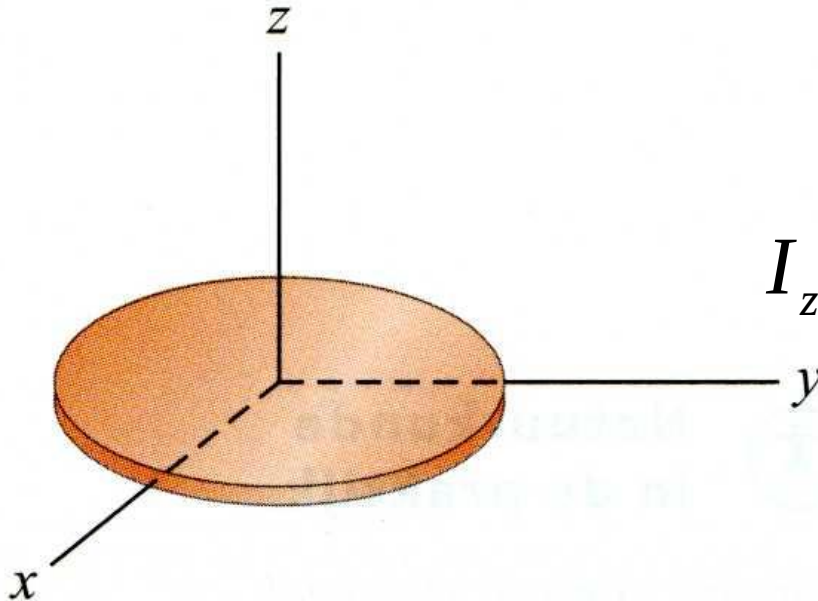


Loodrechte-assenstelling (enkel voor vlakke objecten!): voor een dun of een 2-dimensionaal object geldt dat de som van traagheidsmomenten van twee loodrechte assen in het vlak gelijk is aan het traagheidsmoment van de loodrecht daarop staande as die door het snijpunt van de 2 assen gaat:

$$I_z = I_x + I_y$$

Bewijs:

$$I_z = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_y + I_x$$



Rotationele kinetische energie (10.8)

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$K = \sum E_{kin} = \sum \left(\frac{1}{2}m_i v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \sum m_i (\omega R_i)^2$$

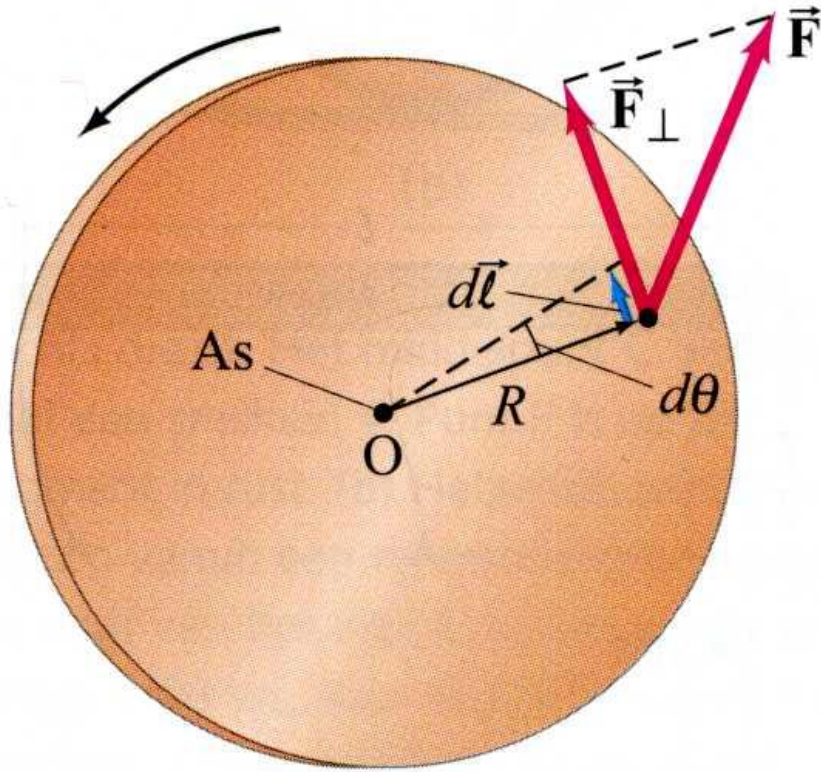
$$= \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Geldt voor rotatie rond een vaste as!

- 11.** Als je 100 J energie zou gebruiken om een bal te gooien, zou de bal dan verder komen dan wanneer je de bal op één van de volgende wijzen zou gooien (verwaarloos de luchtweerstand)?
- (a) Zodanig dat hij ook roteerde.
 - (b) Zodanig dat hij niet roteerde.
 - (c) Het maakt geen verschil.

Arbeid en vermogen bij rotaties



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$W = \int F_\perp R d\theta$$

$$W = \int \tau d\theta \quad ; \quad dW = \tau d\theta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega$$

Rotationele kinetische energie

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad W = \int \tau d\theta$$

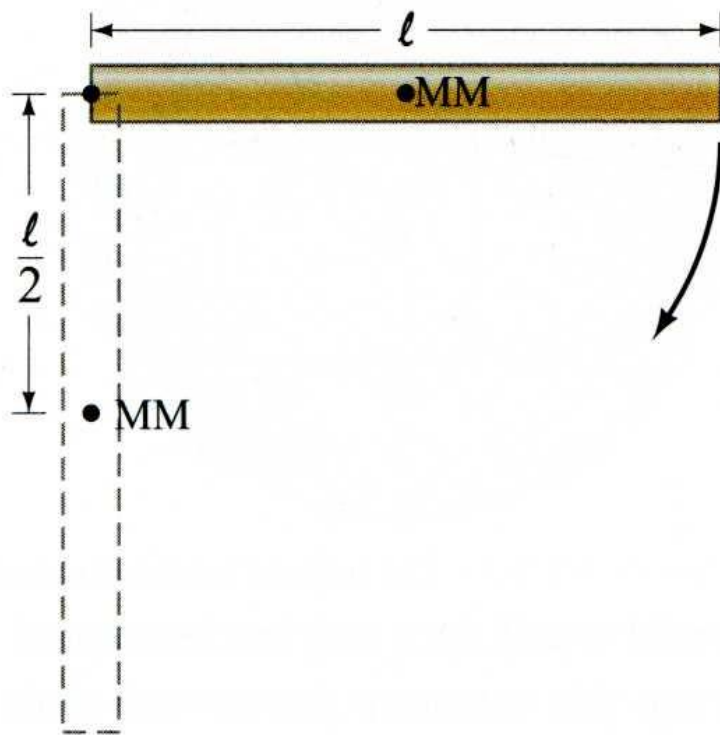
$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

= Arbeid – energie principe voor rotaties

Voorbeeld 10.15 Roterende stang

Een stang met massa M scharniert aan een uiteinde van een wrijvingsloos scharnier, op de manier zoals is weergegeven in fig. 10.29. De stang wordt horizontaal in rust gehouden en vervolgens losgelaten. Bereken de hoeksnelheid van de stang wanneer deze de verticale positie bereikt en de snelheid van de tip van de stang op dat moment.



$$W_g = Mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \frac{1}{3} M \ell^2$$

$$Mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{3g/\ell}$$

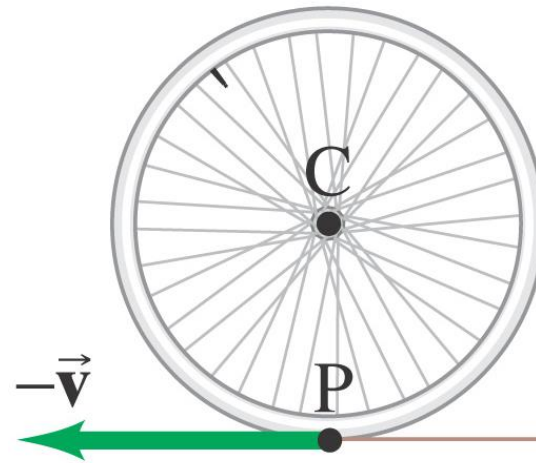
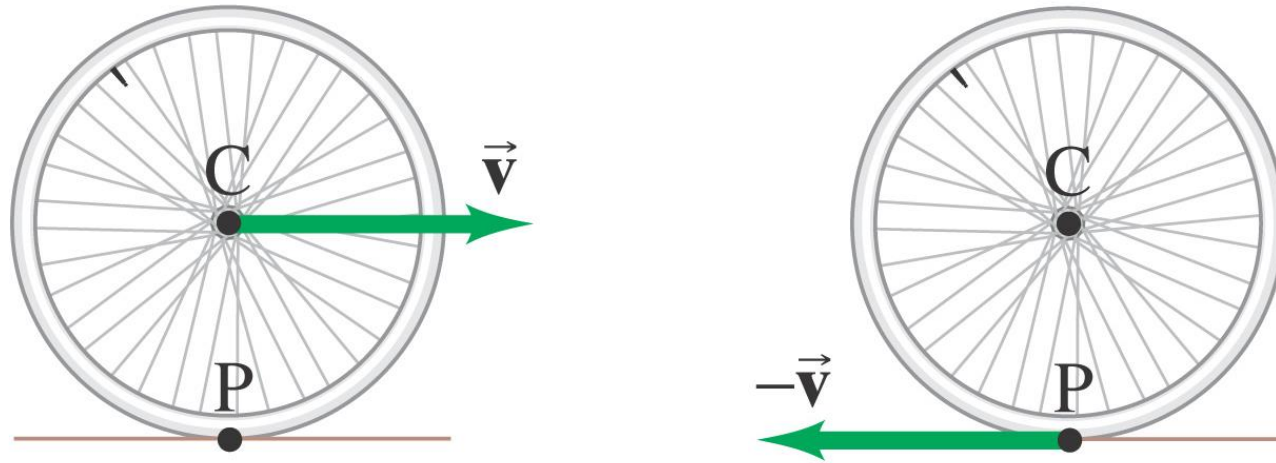
$$v = \omega \ell = \sqrt{3g\ell}$$

Voor een “gewoon”vallende stok: $\frac{1}{2} mv^2 = mg\ell \rightarrow v = \sqrt{2g\ell}$

Rotationele plus translationele beweging; rollen (10.9)

- Rollen zonder slippen:
 - rotatie + translatie
 - Statische wrijving speelt een rol
 - Verband lineaire snelheid en hoeksnelheid (alleen als het voorwerp niet slipt!):

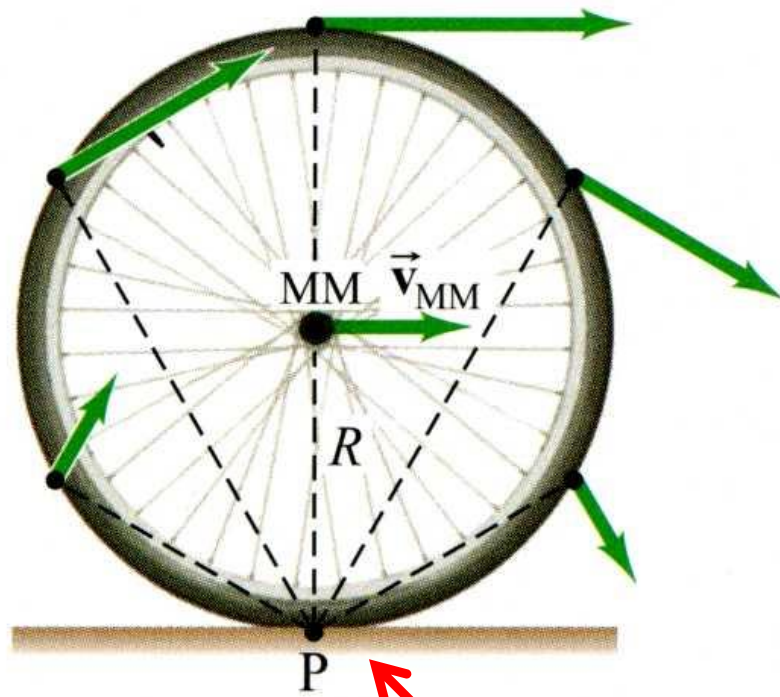
$$v = R\omega$$



Snelheid van punt P ten opzichte van C: $-v$, met $v = R\omega$

Dus: snelheid van C ten opzichte van P: v , met $v = R\omega$

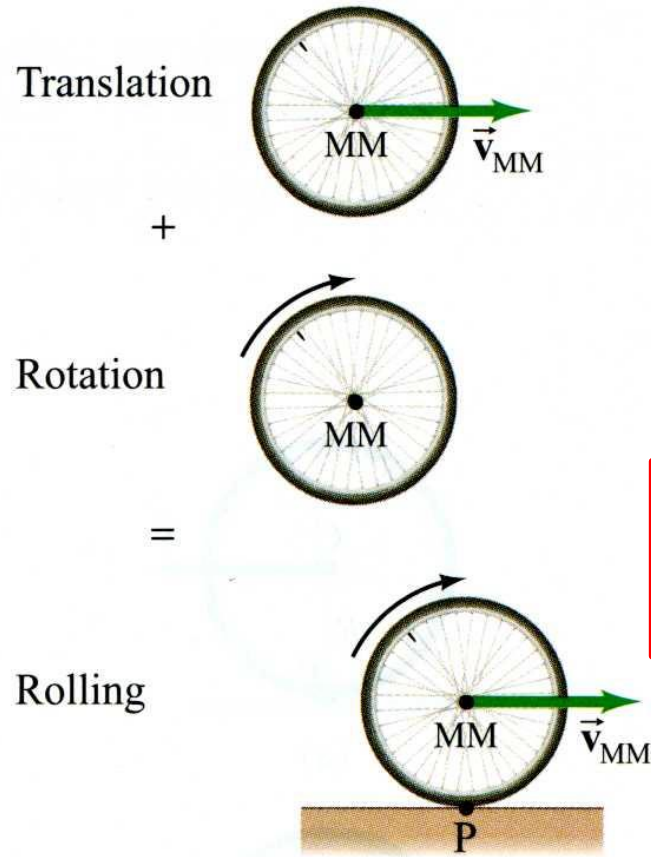
Momentane as



(b)

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc.

Snelheid nul



$$\left. \begin{aligned} K_{tot} &= \frac{1}{2} I_P \omega^2 \\ I_P &= I_{MM} + MR^2 \end{aligned} \right\} K_{tot} = \frac{1}{2} I_{MM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$\text{Rollen: } R\omega = v_{MM}$$

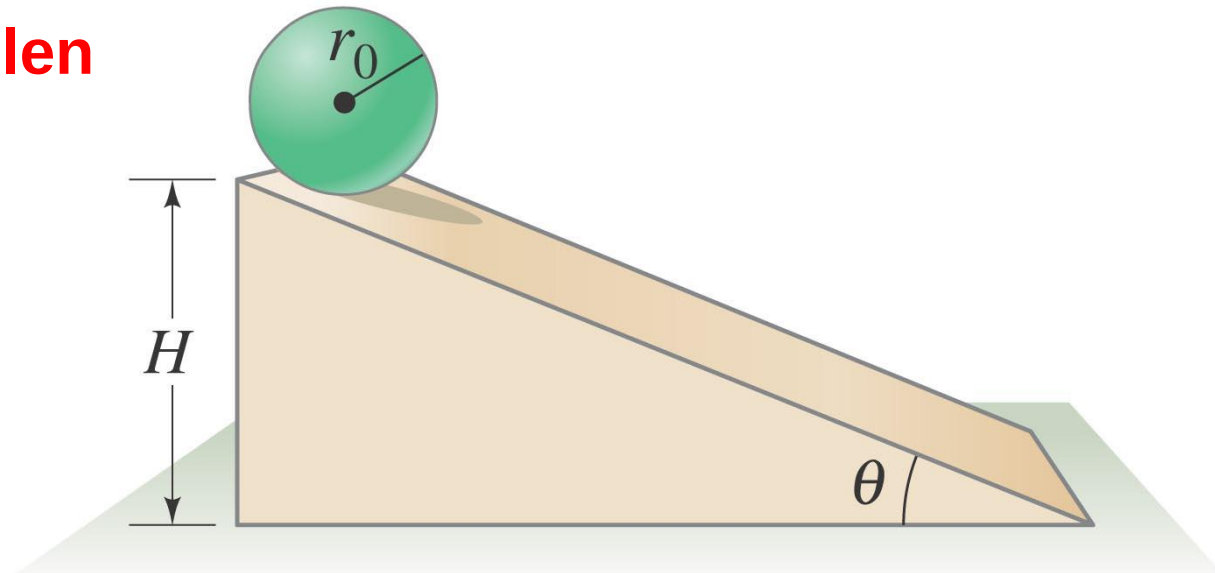
$$K = \frac{1}{2} I_{MM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{MM}^2$$

**Algemeen geldig voor rotatie
om een as met vaste oriëntatie**

Voorbeeld 10.16 Bol die omlaag rolt van een helling

Welke snelheid zal een massieve bol met massa M en straal r_0 hebben wanneer deze zonder slippen onderaan een helling aankomt en bovenaan de helling vanuit rust startte vanaf een verticale hoogte H ? Zie fig. 10.33. (Veronderstel dat er geen slip optreedt als gevolg van de statische wrijving, die geen arbeid verricht.) Vergelijk je resultaat met dat voor een voorwerp dat omlaag *glijdt* over een wrijvingsloze helling.

Er is WEL wrijving, anders glijdt de bol naar beneden in plaats van te rollen



$$E_{tot} = \frac{1}{2} M v_{MM}^2 + \frac{1}{2} I_{MM} \omega^2 + Mgy$$

$$E(boven) = E(onder) \Rightarrow 0 + 0 + MgH = \frac{1}{2} M v_{MM}^2 + \frac{1}{2} I_{MM} \omega^2$$

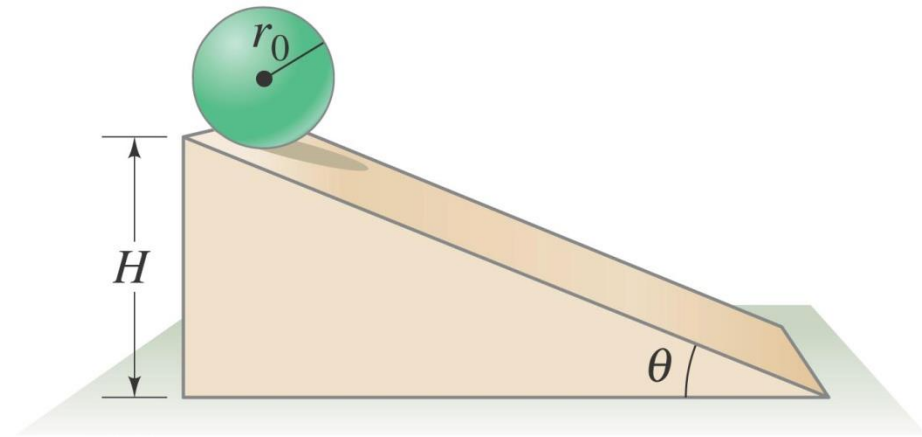
$$I_{MM} = \frac{2}{5} M r_0^2 \quad ; \quad \omega = \frac{v_{MM}}{r_0} (!!!)$$

$$\frac{1}{2} M v_{MM}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} M r_0^2 \left(\frac{v_{MM}}{r_0} \right)^2 = MgH$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) v_{MM}^2 = gH \Rightarrow v_{MM} = \sqrt{\frac{10}{7} gH}$$

$$\text{Zonder rotatie : } v_{MM} = \sqrt{2gH}$$

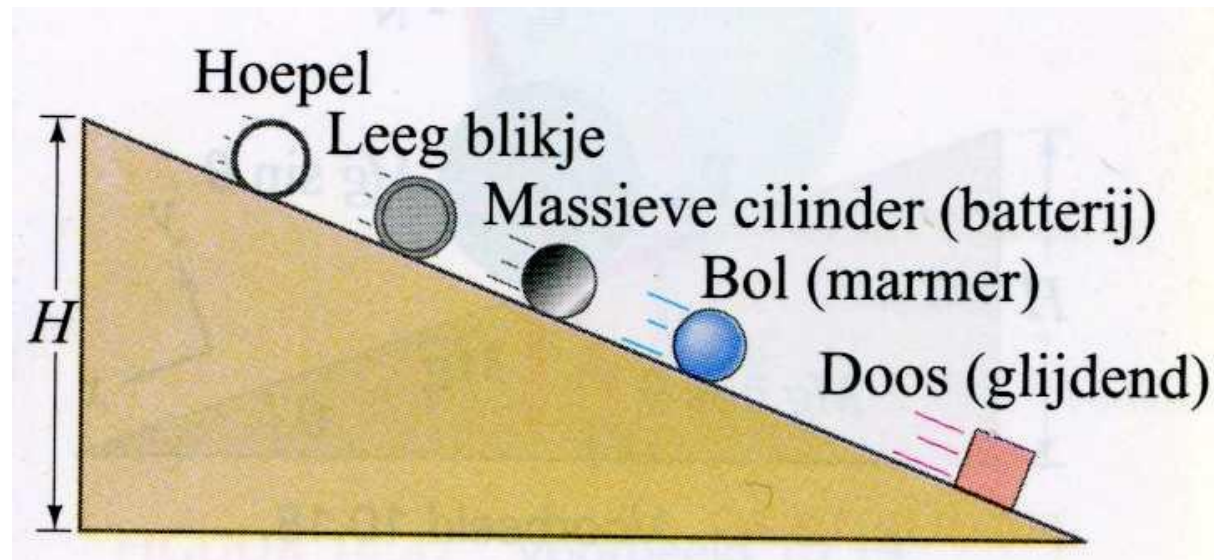
**Onafhankelijk
van de straal!**



Conceptvoorbeeld 10.17 Welke is het snelst?

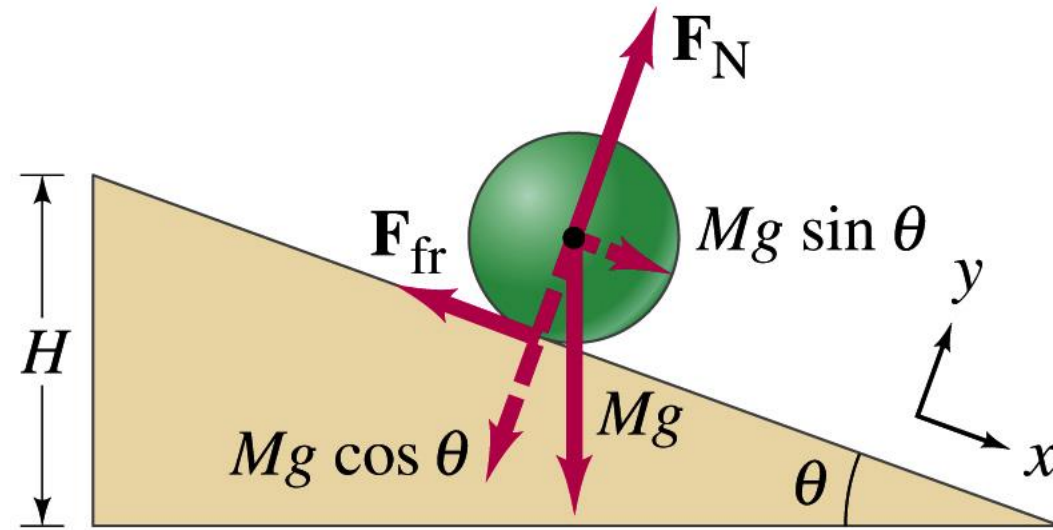
Verschillende voorwerpen rollen, allemaal vanuit rust, zonder te slippen van een helling met een verticale hoogte H omlaag. De voorwerpen zijn een dunne hoepel (bijvoorbeeld een gladde trouwring), een marmeren bol, een massieve cilinder (een AA-batterij) en een leeg conservenblikje. In welke volgorde komen ze onderaan de helling aan? Maak ook een vergelijking met een ingevet doosje dat van dezelfde helling afglijdt, waarbij de wrijving verwaarloosbaar is.

$$MgH = \frac{1}{2} Mv_{MM}^2 + \frac{1}{2} I_{MM} \omega^2$$





VOORBEELD 10-20 Analyseer de rollende bol uit voorbeeld 10-19 en figuur 10-33 in termen van krachten en krachtmomenten. Bereken met name de snelheid v , en de grootte van de wrijvingskracht, F_{fr} , in figuur 10-34.



$$(x) : Mg \sin \theta - F_{wr} = Ma$$

$$(y) : F_N - Mg \cos \theta = 0 \Rightarrow F_N = Mg \cos \theta$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow F_{wr} r_0 = \left(\frac{2}{5} Mr_0^2 \right) \alpha \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \tau = I\alpha \\ \alpha = a/r_0 \end{matrix}} \right\} F_{wr} = \frac{2}{5} Ma$$

$$\alpha = a/r_0$$

$$Mg \sin \theta - \frac{2}{5} Ma = Ma \Rightarrow a = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

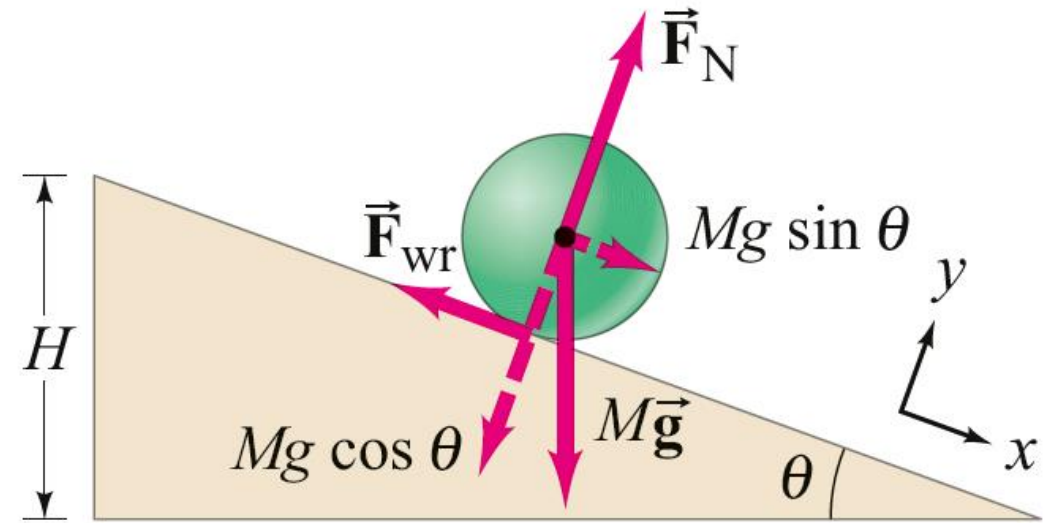
(Wrijvingsloos glijden : $a = g \sin \theta$)

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \left(\frac{5}{7} g \sin \theta \right) \left(\frac{H}{\sin \theta} \right)} = \sqrt{\frac{10}{7} gH}$$

$$F_{wr} = \frac{2}{5} Ma = \frac{2}{7} Mg \sin \theta$$

$$F_{wr} (\max) = \mu_s F_N = \mu_s Mg \cos \theta$$

$$\frac{2}{7} Mg \sin \theta > \mu_s Mg \cos \theta \Rightarrow \text{slippen} : \tan \theta > \frac{7}{2} \mu_s$$



Voorbeeld 10.19 Een vallende jojo

Om een eenvormige massieve cilinder (zoals bij een jojo) met massa M en straal R is een touwtje gewikkeld en de cilinder begint te vallen vanuit rust, fig. 10.37a. Bereken (a) de versnelling en (b) de trekkracht in het touwtje tijdens de val van de cilinder.

$$Ma = Mg - F_T$$

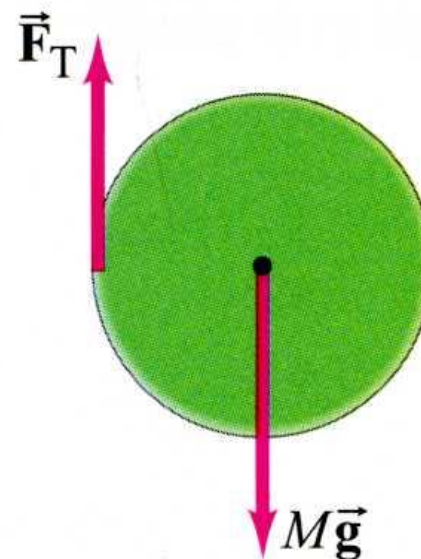
$$\tau_{MM} = I_{MM} \alpha_{MM} \rightarrow F_T R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha$$

$$a = \alpha R \rightarrow F_T R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} MRa$$

$$\rightarrow F_T = \frac{1}{2} Ma$$

$$Ma = Mg - F_T = Ma = Mg - \frac{1}{2} Ma \rightarrow a = \frac{2}{3} g$$

$$\rightarrow F_T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2} M \frac{2}{3} g = \frac{1}{3} Mg$$



Voorbeeld 10.20 Wat gebeurt er als een rollende bal slipt?

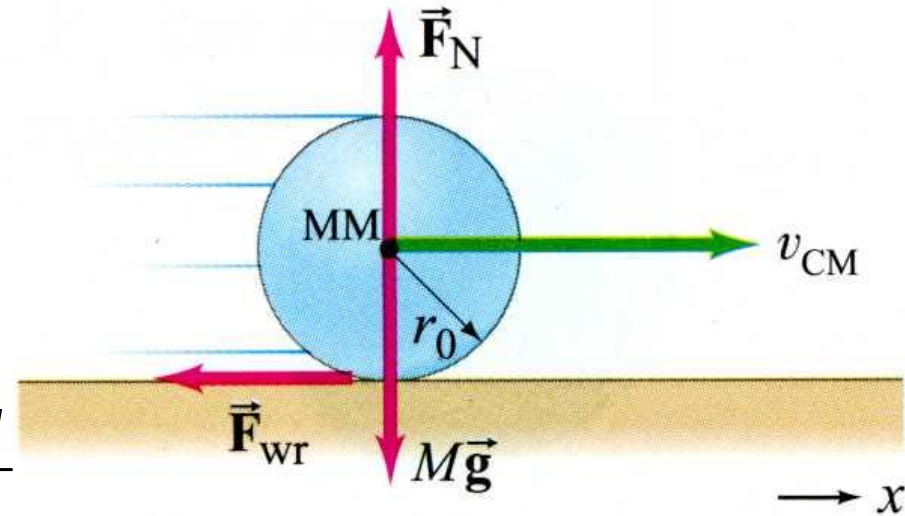
Een bowlingbal met massa M en straal r_0 wordt over een vlak oppervlak geworpen, zodat de bal ($t = 0$) in eerste instantie met een lineaire snelheid v_0 glijdt, maar niet roteert. Terwijl de bal glijdt begint deze te rollen zonder te slippen. Hoe lang duurt het voordat de bal begint te rollen zonder te slippen?

$$F = -\mu_k F_N = -\mu_k mg = ma$$

$$\Rightarrow a = -\mu_k g$$

$$\tau_{MM} = Fr = \mu_k mg \cdot r = I\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\mu_k mg \cdot r}{\frac{2}{5} \cdot mr^2} = \frac{\mu_k g}{\frac{2}{5} \cdot r} = \frac{5\mu_k g}{2r}$$



Geen berekeningen te kennen

Waarom vertraagt een bol (10.10)

Niet te kennen