

Hoofdstuk 8: Behoud van energie



Conservatieve en niet-conservatieve krachten (8-1)

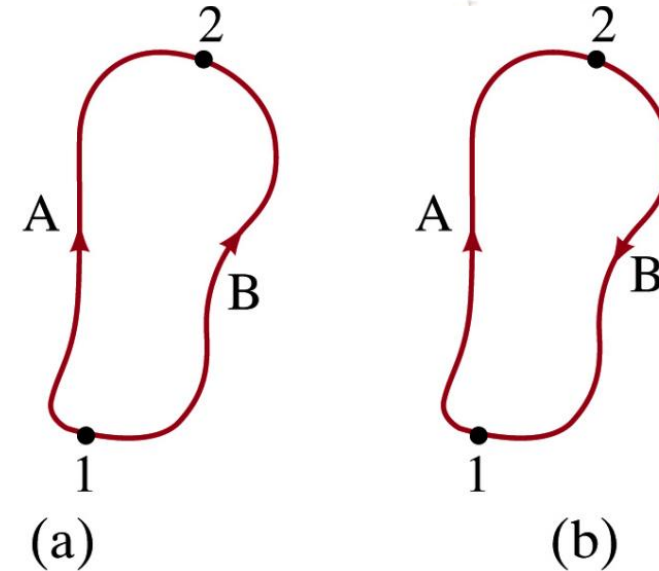
Per definitie zullen we een kracht **conservatief** noemen als

de verrichte arbeid door de kracht op een voorwerp dat van een punt naar een ander punt beweegt alleen afhankelijk is van de begin- en de eindpositie van het voorwerp en onafhankelijk is van de gevolgde baan.

Conservatieve kracht: alternatieve definitie

een kracht is conservatief als de nettoarbeid die verricht wordt door de kracht op een voorwerp dat een willekeurige gesloten baan beschrijft, nul is.

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = - \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -W_{21}$$
$$\Rightarrow W_{12} + W_{21} = 0$$

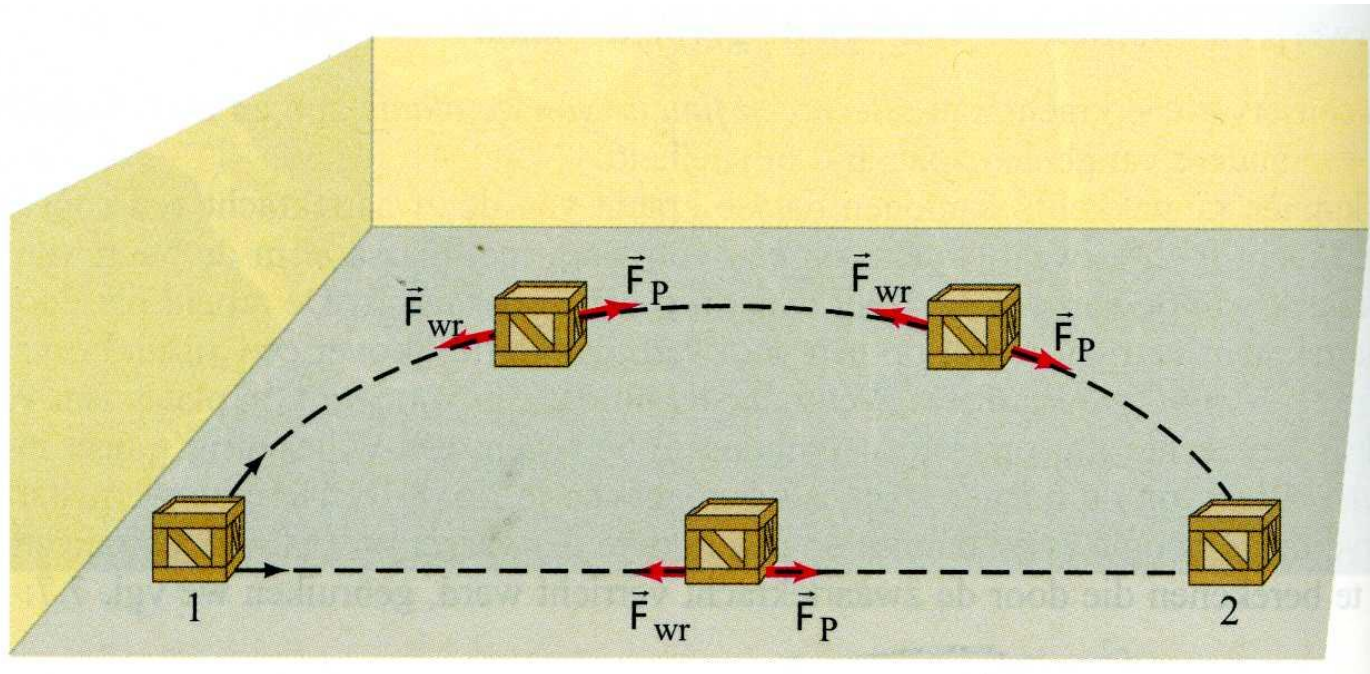


de arbeid die door een conservatieve kracht wordt verricht, kan worden teruggewonnen

Wrijvingskracht: niet-conservatief

$W_{wr} = -F_{wr}d$ met d de afgelegde afstand en F_{wr} de constante wrijvingskracht:

- Altijd negatief, dus niet terugwinbaar
- Afhankelijk van de afgelegde afstand, dus van het gevolgde traject



Conservatieve krachten

Zwaartekracht

Veerkracht

Elektrische
kracht

Niet-conservatieve krachten

Wrijving

Luchtweerstand

Trekkraft in
een touw

Motor- of
raketaandrijving

Drukken of trekken
door iemand

Potentiële energie (8-2)

- Houdt verband met de positie of configuratie van een voorwerp t.o.v. de omgeving
- $\sim$ het vermogen om arbeid te verrichten
- Kan alleen worden gedefinieerd in relatie met een **conservatieve kracht**
- Voorbeelden:
 - Opgewonden veer van een klok
 - Potentiële energie in een gravitatieveld
 - Ingeduwde of uitgerekte springveer

Potentiële energie in het gravitatieveld van de aarde

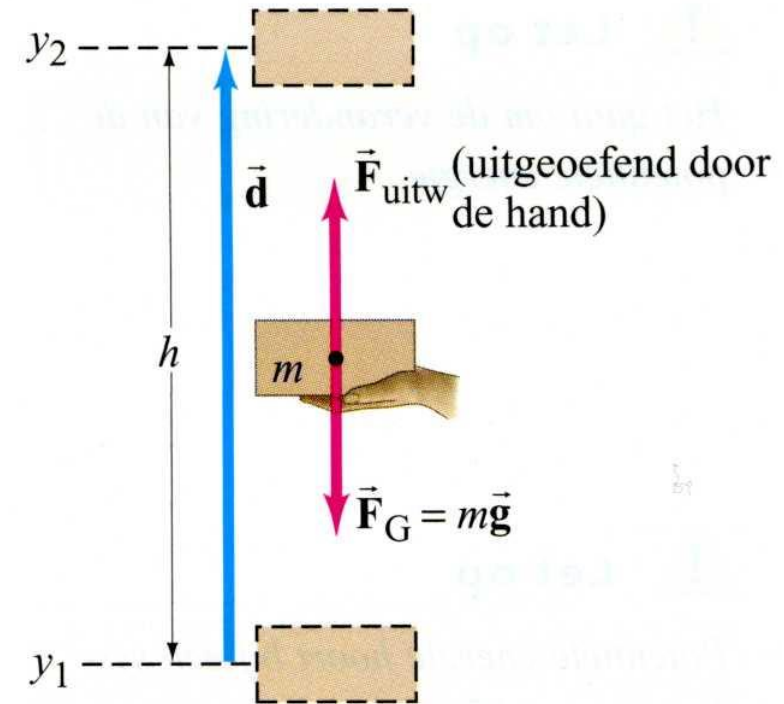
- Arbeid, nodig om een voorwerp met massa m van hoogte y_1 naar y_2 op te tillen:

$$W = mg(y_2 - y_1) = -W_g$$

met W_g de arbeid geleverd door het gravitatieveld

- **Definitie** van de verandering in potentiële energie (PE) van een voorwerp in het gravitatieveld U :

$$\Delta U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$



- Potentiële energie t.o.v. een (willekeurig) referentiepunt:

$$U = mgy$$

- PE is maar op een constante na bepaald (keuze v.h. referentiestelsel, bvb. tafel of grond):

$$U = mgy + C$$

Potentiële energie: algemene definitie

Naast deze potentiële energie zijn er ook nog andere soorten potentiële energie. In het algemeen definiëren we de *verandering van de potentiële energie die gekoppeld is aan een bepaalde conservatieve kracht $\vec{F}$ als min de arbeid die door die kracht verricht wordt:*

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -W, \quad (8.4)$$

**Alleen een waarde die niet afhangt van het gekozen traject
als de kracht conservatief is.**

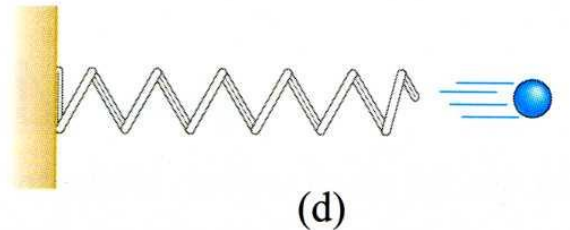
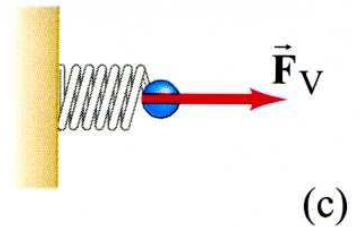
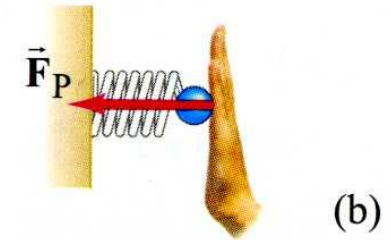
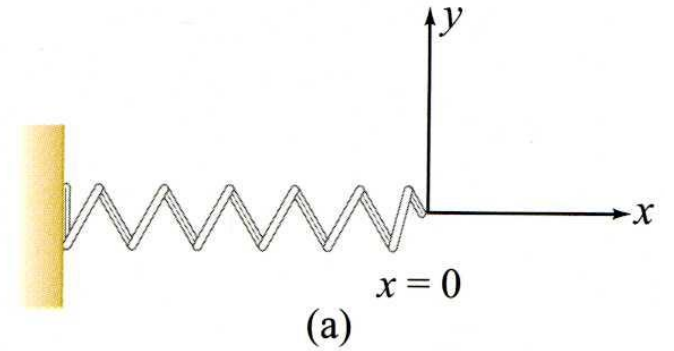
PE van een veer

- Kracht, nodig om een veer ingedrukt (of uitgerekt) te houden (wet van Hooke):

$$F = kx$$

- Kracht, uitgeoefend door de veer (3^e wet):

$$F_{\text{veer}} = -kx$$



PE van een veer

- Verandering van de potentiële energie van de veer:

$$\Delta U = U(x) - U(0) = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

- Kiezen we de evenwichtsstand als $x=0$:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

PE in één dimensie

- PE voor een conservatieve kracht in één dimensie:

$$U(x) = -\int F(x) dx$$

- Bepaling van F(x) uit U(x): $\frac{d}{dx} \left[\int F(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [-U(x)]$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx}$$

Bepaling van $\mathbf{F}$ uit U in 3D

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U = -\nabla U$$

$$\text{grad} = \nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

VECTOR

Nabla

SCALAIR

Mechanische energie en behoud daarvan (8-3)

Beschouw een conservatief systeem waarin KE en PE in elkaar kunnen omgezet worden (bvb. massa aan een veer of in het zwaartekrachtsveld van de aarde):

– Arbeid-energiestelling: netto-arbeid die op het deeltje verricht wordt = verandering in KE: $W = \Delta K$

– Netto-arbeid i.f.v. PE: $\Delta U = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W$

Dus: $\Delta K + \Delta U = 0$ [alleen conservatieve krachten]

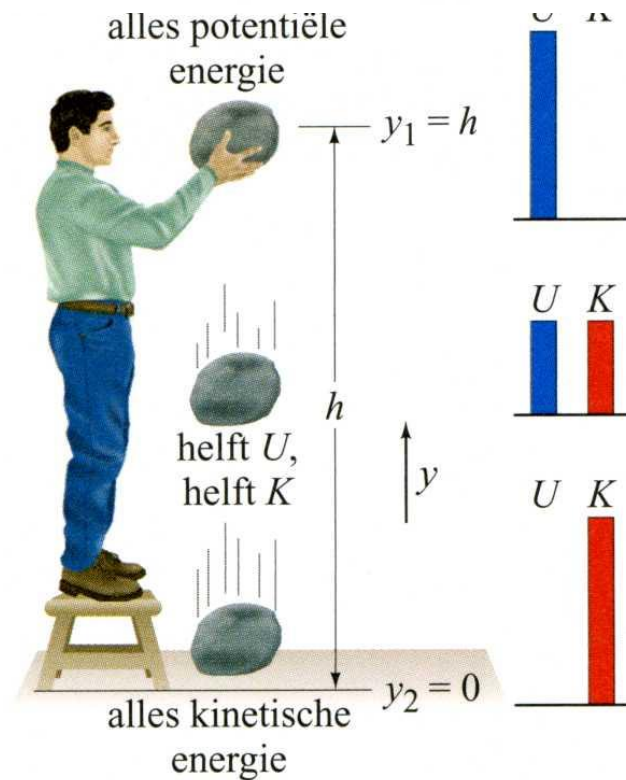
Als alleen conservatieve krachten arbeid verrichten, neemt de totale mechanische energie van een systeem in een willekeurig proces niet af, maar ook niet toe. De totale hoeveelheid mechanische energie blijft daarmee behouden.

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad [\text{alleen conservatieve krachten}]$$

Vraagstukken oplossen met behulp van behoud van mechanische energie (8.4)

Voorbeeld 8.3 Vallende steen

Veronderstel dat de oorspronkelijke hoogte van de steen in fig. 8.7 $y_1 = h = 3,0$ m is. Bereken de snelheid van de steen wanneer deze zich 1,0 m boven de grond bevindt.



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

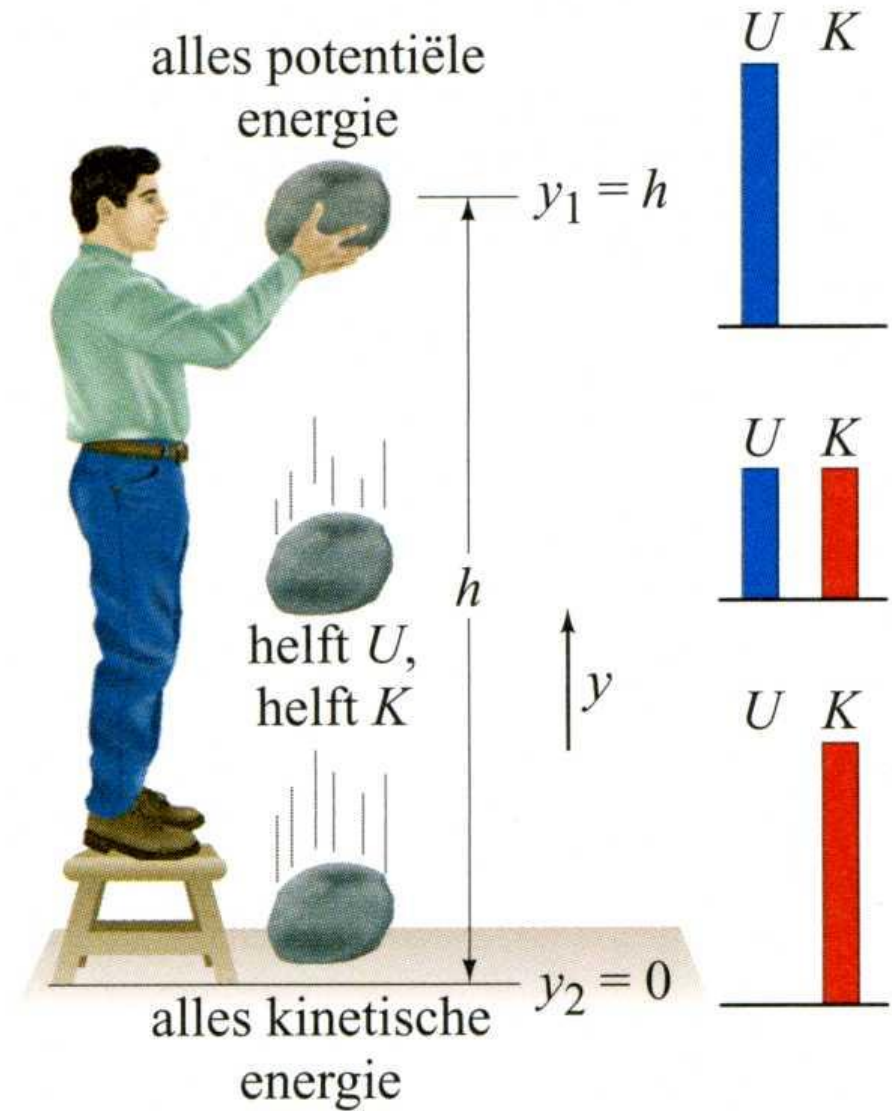
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

Stel $y_0 = 3,0\text{m}$, wat is de snelheid van de steen op 1m hoogte?

$$0 + mg \cdot 3,0\text{m} = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot 1,0\text{m}$$

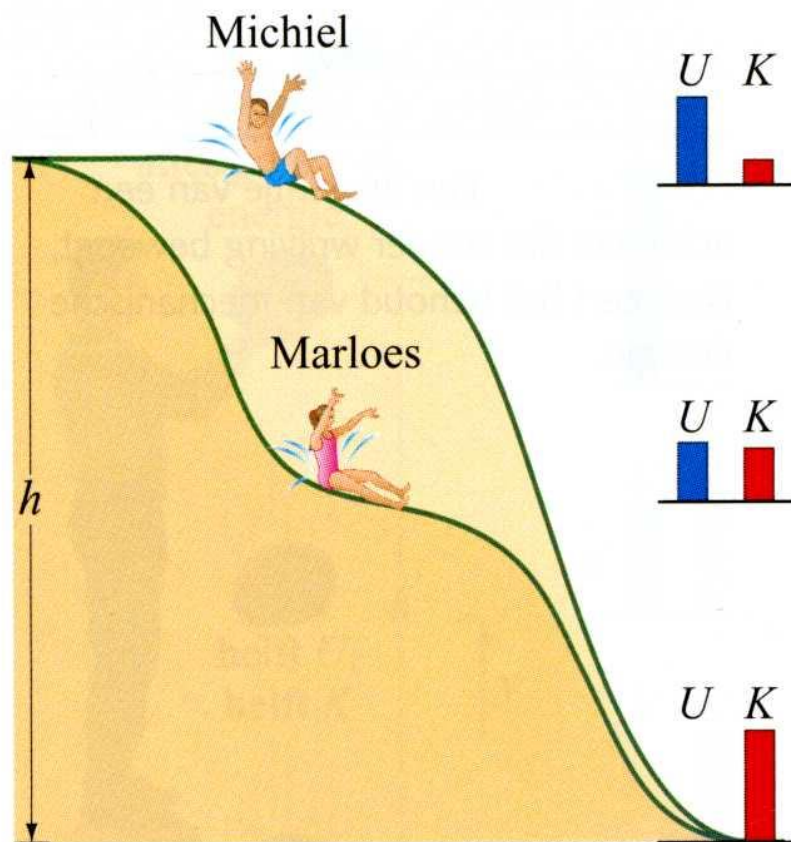
$$\frac{1}{2}mv^2 = mg \cdot 2,0\text{m}$$

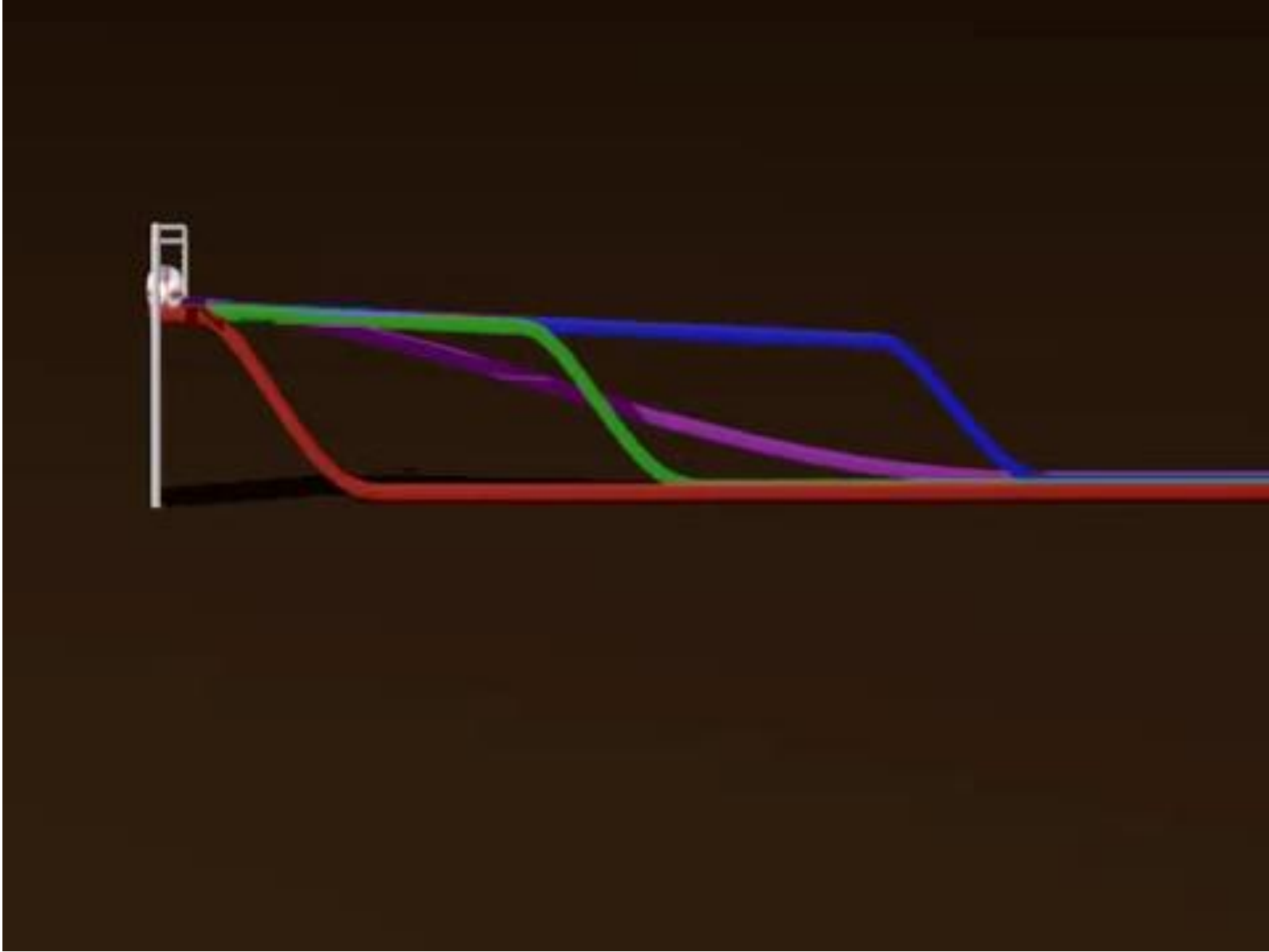
$$v = \sqrt{4m \cdot g} = \sqrt{39,2} \text{ m/s} = 6,3 \text{ m/s}$$



Conceptvoorbeeld 8.5 Snelheden op twee waterglijbanen

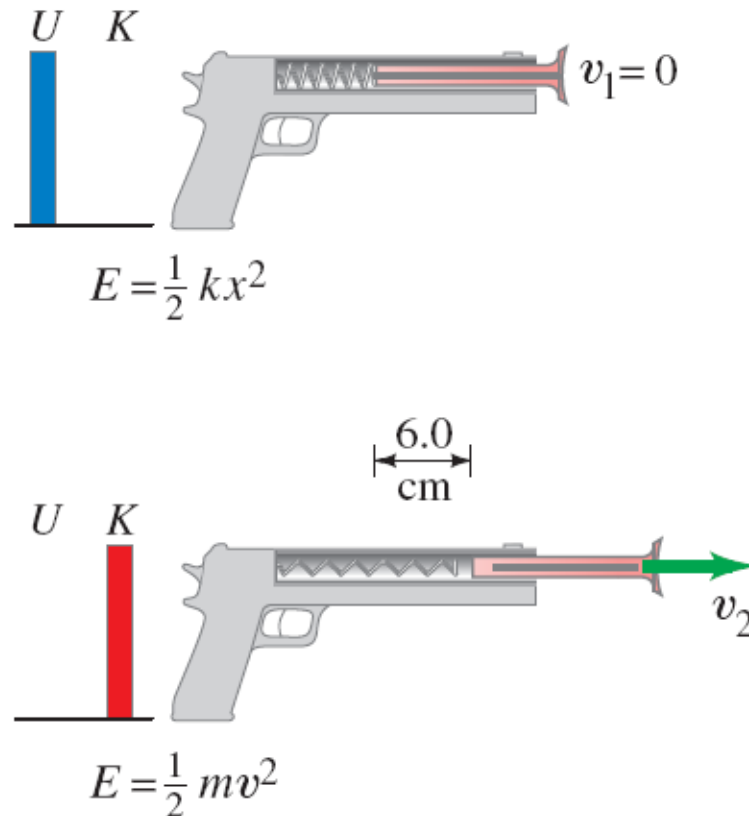
Twee waterglijbanen bij een zwembad hebben verschillende vormen, maar beginnen op dezelfde hoogte h (fig. 8.9). Twee badgasten, Michiel en Marloes, starten gelijktijdig vanuit rust op de verschillende glijbanen. (a) Welke badgast, Michiel of Marloes, heeft de hoogste snelheid onder aan de glijbaan? (b) Welke badgast komt het eerst aan bij het eind van de glijbaan? Verwaarloos de wrijving en veronderstel dat beide glijbanen even lang zijn.





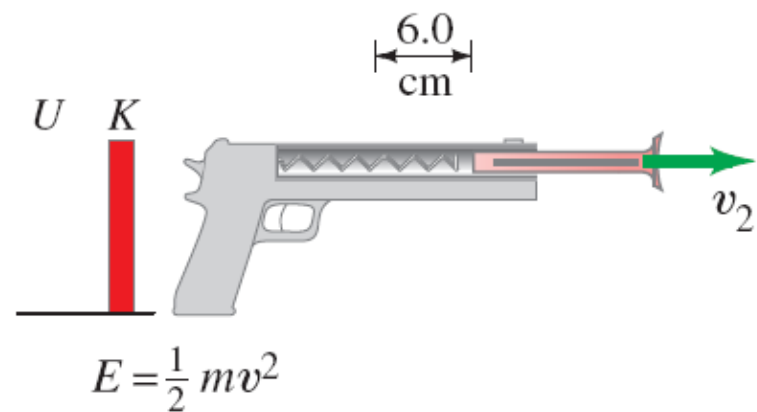
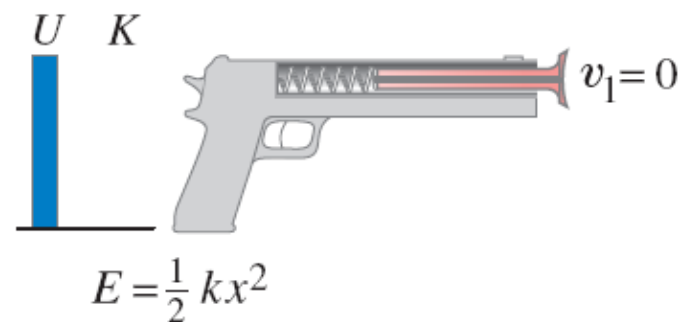
Voorbeeld 8.7 Speelgoedpistool

Een pijltje met een massa van 0,100 kg wordt tegen de veer van een speelgoedpistool gedrukt, op de manier zoals is weergegeven in fig. 8.12a. De veer (met veerconstante $k = 250 \text{ N/m}$ en verwaarloosbare massa) wordt 6,0 cm samengedrukt en losgelaten. Als het pijltje loskomt van de veer wanneer de veer zijn oorspronkelijke lengte ($x = 0$) heeft gekregen, welke snelheid heeft het pijltje dan?



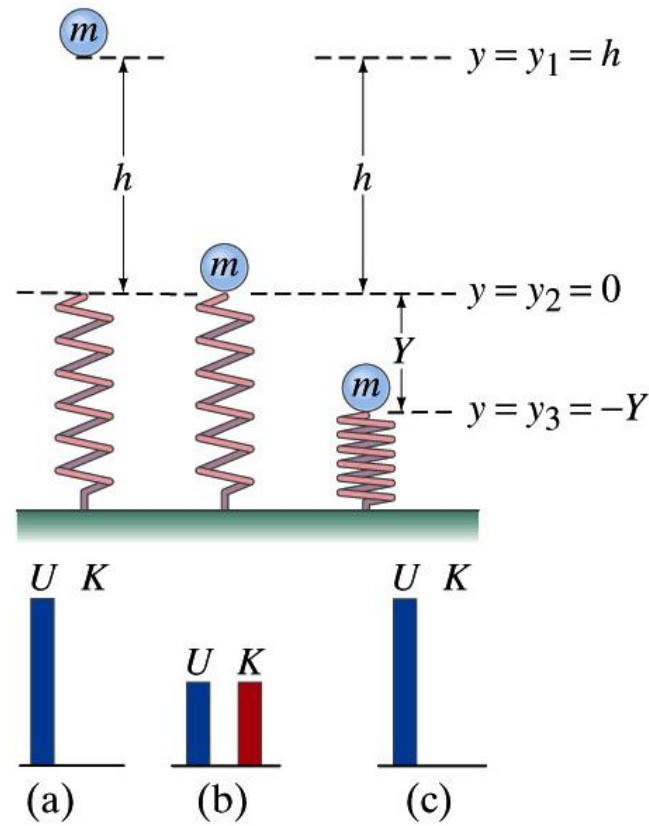
$$0 + \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{kx_1^2}{m}} = \sqrt{\frac{250 \text{ N/m} \cdot (-0,060\text{m})^2}{0,100\text{kg}}} = 3,0 \text{ m/s}$$



Voorbeeld 8.8 Twee soorten potentiële energie

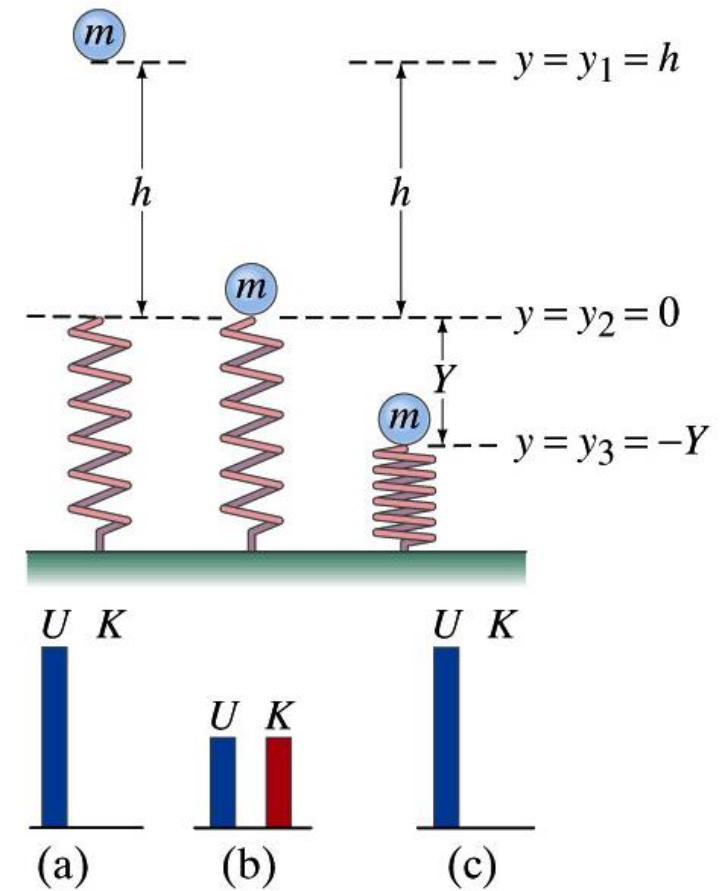
Een bal met massa $m = 2,60 \text{ kg}$ is in eerste instantie in rust, valt over een verticale afstand $h = 55,0 \text{ cm}$ en komt dan terecht op een verticale schroefveer, die daardoor $y = 15,0 \text{ cm}$ samengedrukt wordt (fig. 8.13). Bereken de veerconstante k van de veer. Veronderstel dat de veer een verwaarloosbare massa heeft en laat de luchtweerstand buiten beschouwing. Meet alle afstanden vanaf het punt waar de bal de ontspannen veer raakt ($y = 0$ op dat punt).



$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}ky^2 \text{ (veer)} = cte.$$

$$0 + mgh + 0 = 0 - mgY + \frac{1}{2}kY^2$$

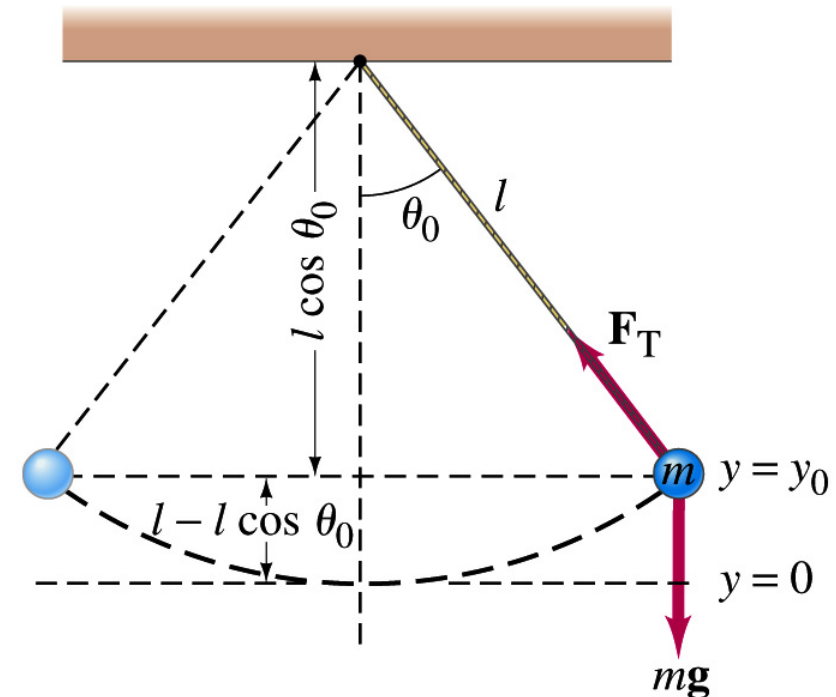
$$k = \frac{2mg(h+Y)}{Y^2} = \frac{2 \cdot 2,60\text{kg} \cdot (0,550\text{m} + 0,150\text{m})}{(0,150\text{m})^2} = 1590 \text{ N/m}$$



Voorbeeld 8.9 Een bewegende slinger

De eenvoudige slinger in fig. 8.14 bestaat uit een klein gewicht met massa m dat opgehangen is aan een touw met lengte ℓ . Het gewicht wordt losgelaten (zonder dat het geduwd wordt) op $t = 0$, terwijl het touw een hoek $\theta = \theta_0$ maakt met de verticaal. (a) Beschrijf de beweging van het gewicht in termen van kinetische energie en potentiële energie. Bereken vervolgens de snelheid van het gewicht (b) als functie van de positie θ terwijl het heen en weer beweegt en (c) op het laagste punt van de slingerbeweging. (d) Bepaal de trekkracht in het touw, $\vec{F}_T$. Verwaarloos de wrijving en de luchtweerstand.

(a): PE is maximaal in het hoogste punt; KE is daar nul; tijdens het slingeren worden KE en PE steeds uitgewisseld; in het laagste punt is de KE maximaal, want de PE minimaal



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$(b): t = 0: v = 0 \Rightarrow E = mgy_0$$

$$y = l - l \cos \theta; y_0 = l - l \cos \theta_0$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0$$

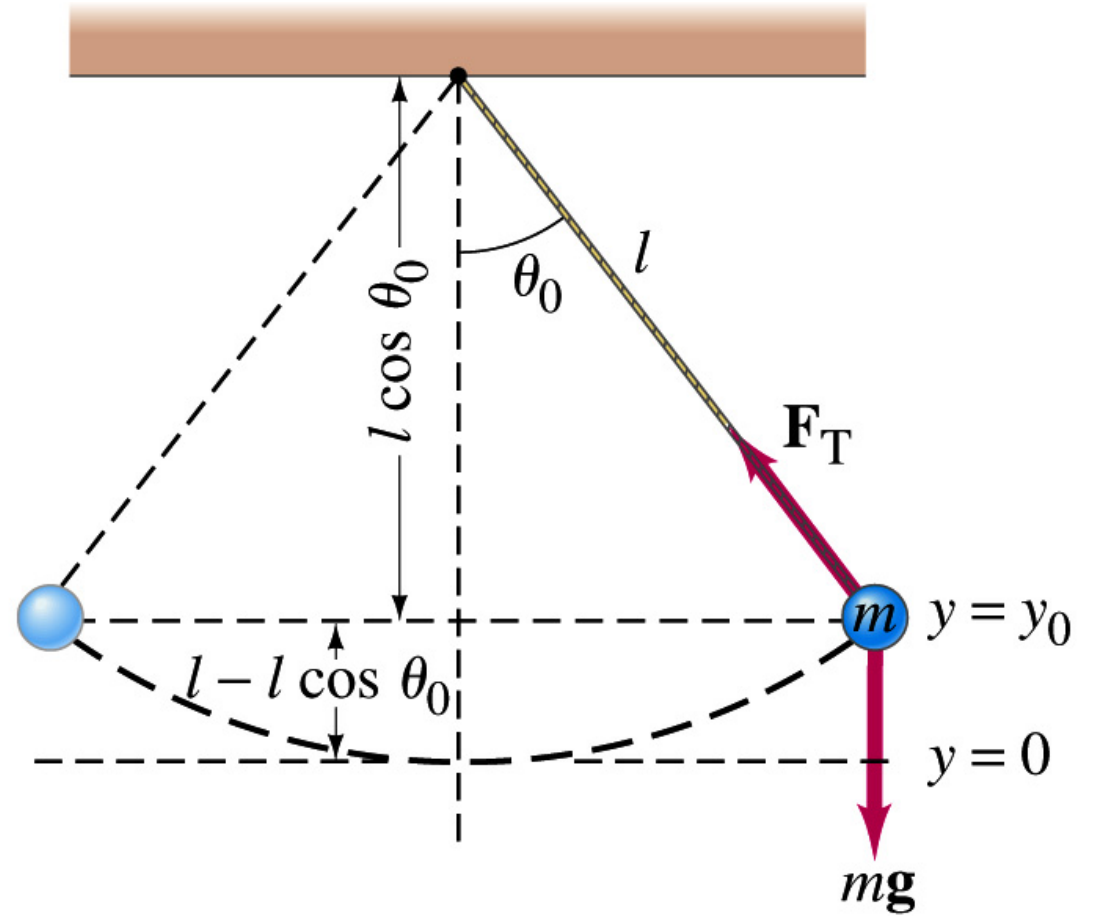
$$\Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y)} = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

$$(c): y = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gy_0} = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$$

$$(d): F_R = m \frac{v^2}{l} = F_T - mg \cos \theta$$

$$\Rightarrow F_T = m \left(\frac{v^2}{l} + g \cos \theta \right) = m \left(2g(\cos \theta - \cos \theta_0) + g \cos \theta \right)$$

$$F_T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$





De wet van behoud van energie (8.5)

- Systeem met niet-conservatieve krachten (vb. wrijvingskracht = dissipatieve kracht):
 - Som van kinetische en potentiële energie neemt af
 - Energie wordt omgezet in warmte = thermische energie (= inwendige energie van een voorwerp, afhankelijk van de positie (=PE) en de beweging (=KE) van de moleculen)
- Andere vormen van energie:
 - Elektrische energie
 - Chemische energie
 - ...
- Voldoen deze ook aan behoud van energie??

Wet van behoud van energie

In een willekeurig proces neemt de totale energie nooit toe of af. Energie kan omgezet worden van de ene vorm naar de andere en van een voorwerp overgedragen worden op een ander, maar de totale hoeveelheid blijft constant.

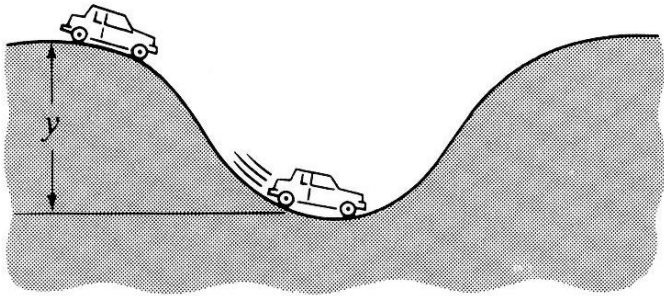
$$\Delta K + \Delta U + \text{verandering in alle andere vormen van energie} = 0$$

Behoud van energie met dissipatieve krachten: vraagstukken oplossen (8.6)

- Beweging van een auto in vrijloop, mét wrijving, van punt 1 naar punt 2: Arbeid verricht door de wrijving:
$$W_{wr} = \int_1^2 \vec{F}_{wr} \cdot d\vec{l} = -F_{wr} \cdot l$$

als de wrijvingskracht constant is en l de afgelegde afstand tussen punten 1 en 2.

- Arbeid-energiestelling: $\Delta K = W = W_C + W_{NC}$



$$W_C = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U + W_{NC}$$

$$\Delta K + \Delta U = W_{NC}$$

met W_C de arbeid v.d. conservatieve krachten (hier zwaartekracht),
 W_{NC} de arbeid verricht door niet-cons. krachten (hier wrijving)

$$\boxed{\Delta K + \Delta U = W_{NC}} \quad (W_{NC} < 0)$$

$$W_{NC} = -F_{wr} l$$

$$-F_{wr} l = \Delta K + \Delta U = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \right) + (mgy_2 - mgy_1)$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgy_2 + F_{wr} l$$

- Beginsituatie (1):
 - Kinetische energie
 - Potentiële energie
- Eindsituatie (2):
 - Kinetische energie
 - Potentiële energie
 - Thermische energie

Potentiële energie ten gevolge van de zwaartekracht en ontsnappingsnelheid (8-7)

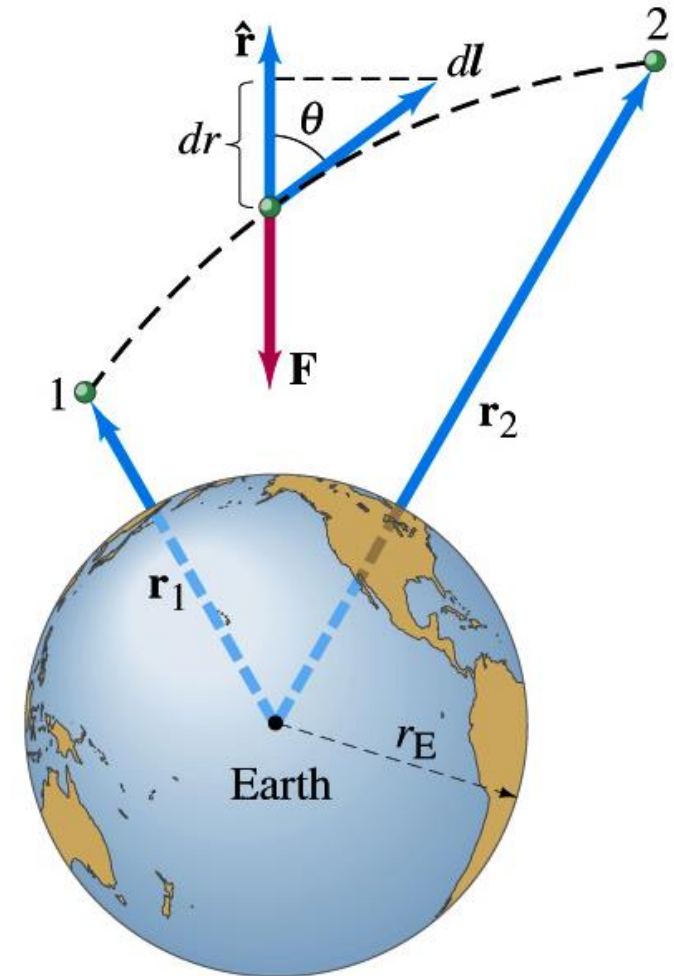
Doel: Wat is de potentiële energie in een algemeen zwaartekrachtveld (bvb. op grotere afstand van het aardoppervlak)?

$$\vec{F} = -G \frac{mM_A}{r^2} \hat{r}$$

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -GmM_A \int_1^2 \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2}$$

$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$$

met dr de verandering in effectieve afstand tot het massamiddelpunt van de aarde (zie figuur)



$$\begin{aligned}
W &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -GmM_A \int_1^2 \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2} \\
&= -GmM_A \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = GmM_A \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\
&= \frac{GmM_A}{r_2} - \frac{GmM_A}{r_1} \\
\Delta U &= U_2 - U_1 = -W = -\frac{GmM_A}{r_2} + \frac{GmM_A}{r_1} \\
\Rightarrow U(r) &= -\frac{GmM_A}{r} + C
\end{aligned}$$

Als alleen de zwaartekracht op een massa m werkt:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_A}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_A}{r_2} = \text{constant}$$

Ontsnappingsnelheid

Definitie: minimale snelheid waarmee een voorwerp van de aarde moet worden weggeschoten, zodat het nooit weer terugvalt:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_A}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_A}{r_2}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_{ontsn} & ; & v_2 = 0 \\ r_1 = R_A & ; & r_2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}mv_{ontsn}^2 - \frac{GmM_A}{R_A} = 0 - 0$$

$$\Rightarrow v_{ontsn} = \sqrt{\frac{2GM_A}{R_A}} = 1,12 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Vermogen (8-8)

- **Vermogen** = de snelheid waarmee arbeid wordt verricht of waarmee energie wordt omgezet:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{of} \quad P = \frac{dE}{dt}$$

- Eenheid: **watt (W)**: $1\text{W} = 1\text{J/s}$
- Oude eenheid: **paardenkracht (pk)**: $1\text{pk} = 750\text{W}$
(nauwkeuriger: $735,5\text{W}$; Engelse paarden: $745,7\text{W}$)
- Pas op: De eenheid kilowatt-uur (kwh) is een energie-eenheid, **geen** eenheid van vermogen: $1\text{ kwh} = 3,6 \cdot 10^6\text{ J}$

Voorbeeld 8.14 Vermogen om trappen te lopen

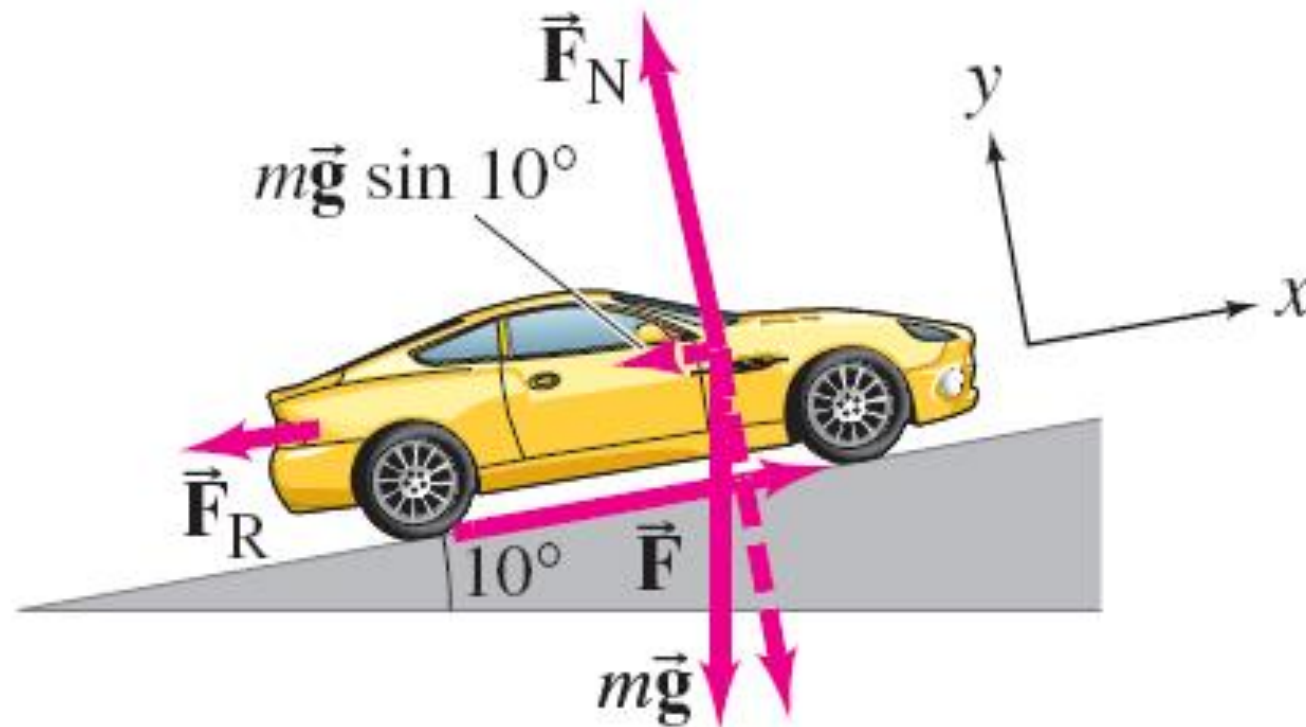
Een jogger met een massa van 60 kg rent een lange trap op in 4,0 s (fig. 8.21). De totale verticale hoogte van de trap is 4,5 m. (a) Schat het vermogen van de jogger in Watt en pk. (b) Hoeveel energie kostte het om deze trap op te rennen?

$$\bar{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{60\text{kg} \cdot 9,80\text{ m/s}^2 \cdot 4,5\text{m}}{4,0\text{s}} = 660\text{W}$$



Voorbeeld 8.15 Vermogensbehoefte van een auto

Bereken het benodigde vermogen van een auto van 1400 kg onder de volgende omstandigheden: (a) de auto rijdt met een constante snelheid van 80 km/u een helling van 10° op (wat behoorlijk steil is) en (b) de auto versnelt op een vlakke weg in 6,0 s van 90 naar 110 km/u om een andere auto in te halen. Veronderstel dat de gemiddelde tegenwerkende kracht op de auto steeds $F_R = 700$ N. Zie fig. 8.22.



$$(a): P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(\overset{\mathbf{r}}{F} \cdot \overset{\mathbf{r}}{l}\right)}{dt} = \overset{\mathbf{r}}{F} \cdot \frac{d\overset{\mathbf{r}}{l}}{dt} = \overset{\mathbf{r}}{F} \cdot \overset{\mathbf{r}}{v} = Fv$$

$$F_{net} = F_{wr} + mg \sin \theta = 700N + 1400kg \cdot 9,80 m/s^2 \cdot \sin 10^\circ = 3100N$$

$$\Rightarrow P = 3100N \cdot (80/3,6) m/s = 6,8 \cdot 10^4 W$$

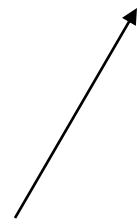
$$P = 68kW$$

$$(b): a = \left((110/3,6) m/s - (90 / 3,6) m/s \right) / 6,0s = 0,93 m/s^2$$

$$F_{net} = ma = F_{auto} - F_{wr}$$

$$F_{auto} = ma + F_{wr} = 1400kg \cdot 0,93 m/s^2 + 700N = 2000N$$

$$P = Fv = 2000N \cdot \frac{110}{3,6} m/s = 6,1 \cdot 10^4 W = 61kW$$



Benodigde maximumvermogen

Potentiële-energiediagrammen – Stabiel en instabiel evenwicht (8.9)

- Doel: afleiden van beweging in één dimensie uit het verloop van de potentiële energie $U(x)$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E = \text{constant}$$

$$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_0^t dt = t$$

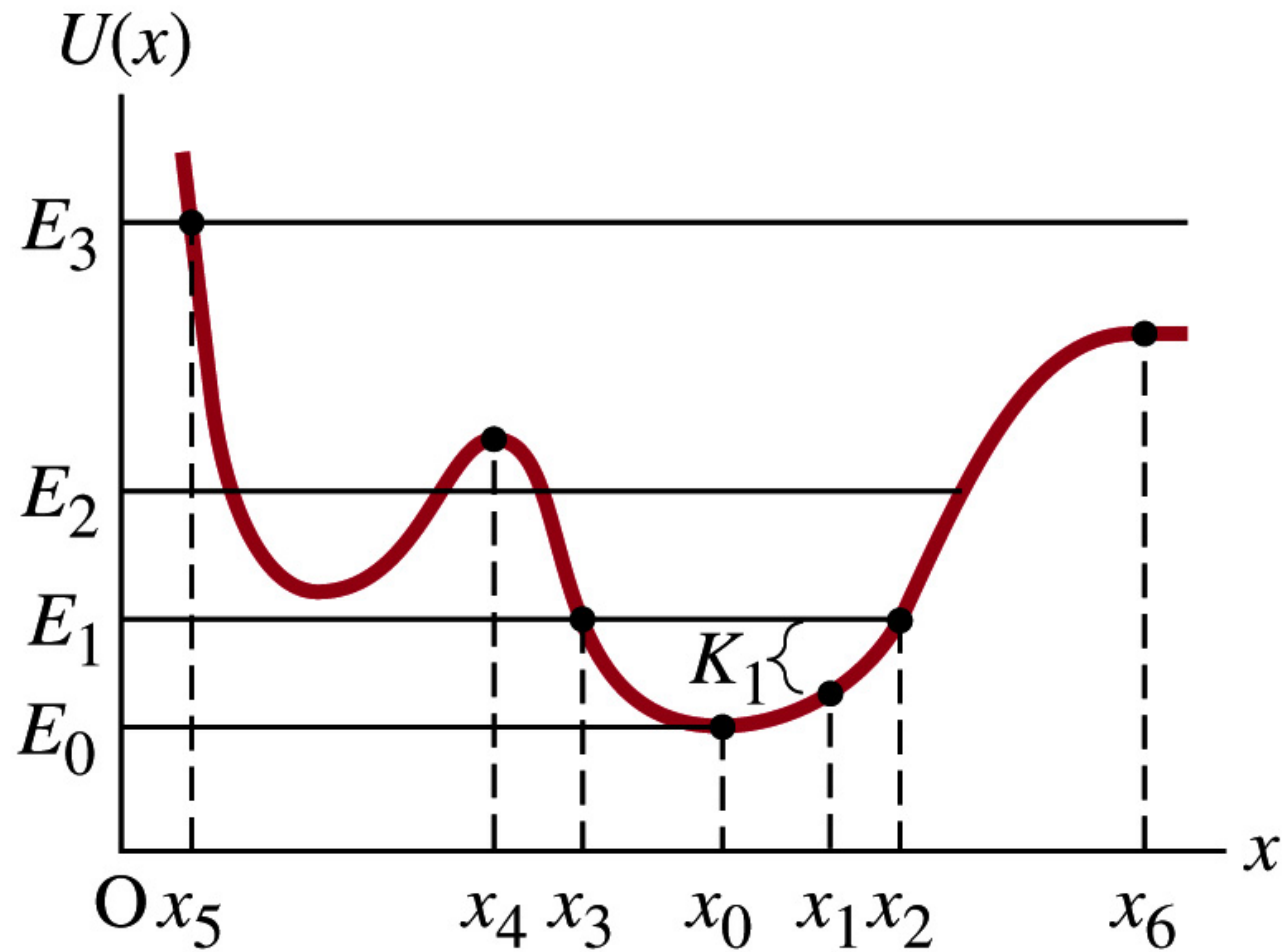
- Is deze functie integreerbaar, dan kan de aard van de beweging berekend worden: $x(t)$

- Uit de vergelijking voor v: $U(x) \leq E$

$$K = E - U(x)$$

$$F = -\frac{dU}{dx}$$

- Impliceert:
 - Hoe groter $U(x)$, hoe kleiner de snelheid
 - Een deeltje kan niet in een gebied komen waar $U > E$ (in de kwantummechanica kan dit wel!!)
 - De kracht (en dus de versnelling) wijst altijd naar dalende $U(x)$



- U-maximum: labiel evenwicht
- U-minimum: stabiel evenwicht
- Constante U: neutraal evenwicht

Gravitationele hulpkracht (8.10)

Niet te kennen