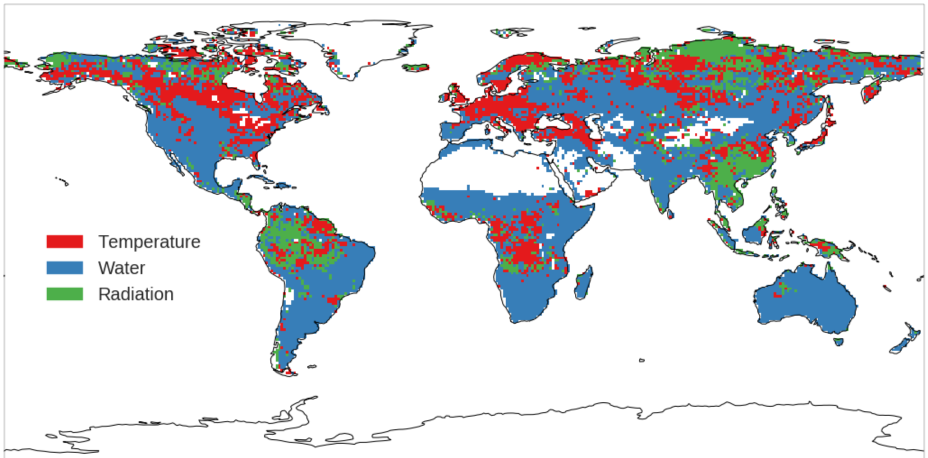
Hoofdstuk 10: Complexe Eigenwaarden

- Sectie 10.1: Complexe vector- en matrixberekeningen (zelfstudie)
- Sectie 10.2: Berekenen van complexe eigenwaarden
- Sectie 10.3: Discrete dynamische systemen herbekeken

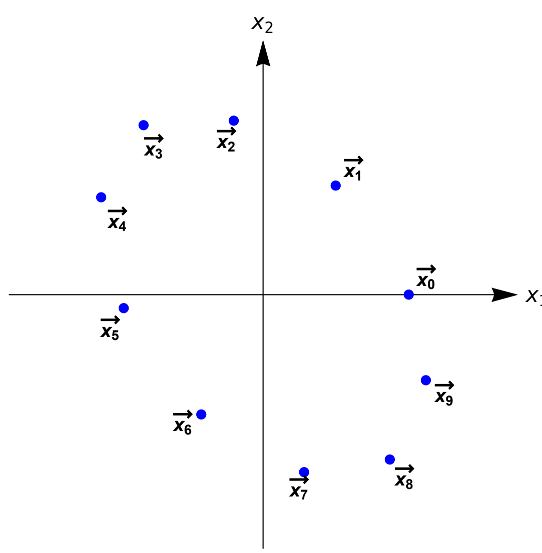


Papagiannopoulou et al., Vegetation anomalies caused by antecedent precipitation in most of the world. Environmental Research Letters, 2017.

Vb. 10.2 Bepaal het effect van de lineaire transformatie $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}$ op $\vec{\boldsymbol{x}}_0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{x}}_0 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\vec{\boldsymbol{x}}_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \\
\vec{\boldsymbol{x}}_2 &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 - 0.6 \times 1.5 \\ 0.75 + 1.1 \times 1.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0.4 \\ 2.4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$



Vb. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Tip:} \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \_\_\_ & -1 \\ 1 & \_\_\_ \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \qquad \text{Eigenw.: } \_\_\_ \text{ en } \_\_\_$$

<u>Eigenwaarde $\lambda = i$</u>

$$(A - i\, I_2)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Uitgebreide matrix:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ i & -i^2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ i & \_\_\_ & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Controle:} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = \_\_\_ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vb. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Tip:} \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

<u>Eigenwaarde $\lambda = -i$</u>

$$(A + i\, I_2)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

Uitgebreide matrix:

$$\begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ i & i^2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ i & \_\_\_ & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Controle:} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = \_\_\_ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algemene eigenschap: als λ een complexe eigenwaarde is van de $n \times n$ matrix A, dan is $\overline{\lambda}$ ______________________________

Vraag

Stel dat A een reële $n \times n$ matrix is, λ een complexe eigenwaarde van A en $\vec{\boldsymbol{x}}$ een complexe eigenvector van λ. Welke van de onderstaande gelijkheden is dan waar?

- ROOD: $A\,\overline{\vec{\boldsymbol{x}}} = \overline{A}\,\overline{\vec{\boldsymbol{x}}}$
- GROEN: $\overline{A}\,\overline{\vec{\boldsymbol{x}}} = \overline{A\vec{\boldsymbol{x}}}$
- BLAUW: $\overline{A\vec{\boldsymbol{x}}} = \overline{\lambda\vec{\boldsymbol{x}}}$
- GEEL: $\overline{\lambda\vec{\boldsymbol{x}}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{\boldsymbol{x}}}$

Meerdere gelijkheden kunnen correct zijn.

Conclusie: ______________________________

In het voorbeeld van de vorige slide:

Eigenwaarde: $\lambda = i$ Basis eigenruimte: $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Eigenwaarde: $\lambda = -i$ Basis eigenruimte: $\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Sectie 10.3: Disc. dyn. systemen herbekeken

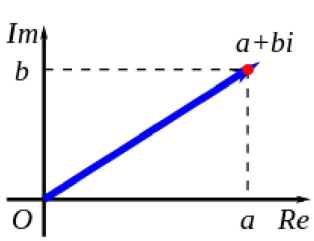
Vb. 10.3 Bespreek de lineaire transformatie $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = C\vec{\boldsymbol{x}}$ met $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ en a en b reële getallen die niet beiden nul zijn.

$$\begin{aligned} 0 = \det(C - \lambda I) &= (\underline{\qquad\qquad})^2 + b^2 = a^2 - 2\lambda a + \lambda^2 + b^2 \\ &= \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2 \\ \mathrm{D} &= 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 = \underline{\qquad\quad} \end{aligned}$$

Eigenwaarden: $\lambda = \dfrac{2a \pm 2bi}{2} = a \pm bi$

Modulus van λ: $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$

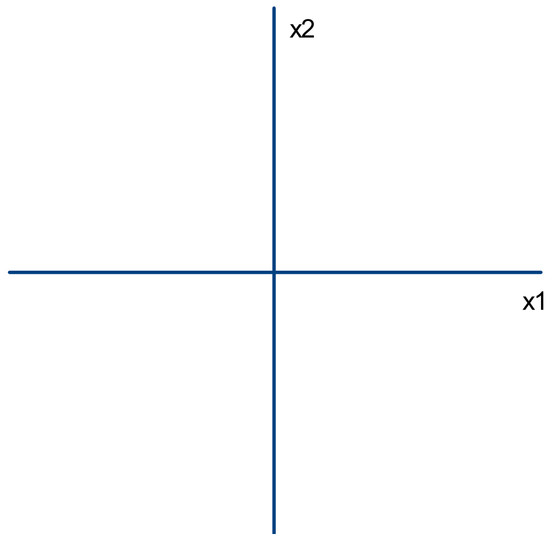
$$\begin{aligned} C &= r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} \\ \underline{\qquad\quad} & \underline{\qquad\quad} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Beschrijf de verandering die de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ doormaakt door herhaaldelijk de lineaire transformatie $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = C\vec{\boldsymbol{x}}$ toe te passen als $r > 1$.

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\boldsymbol{x}}_1 = C\vec{\boldsymbol{x}}_0\,, \qquad \vec{\boldsymbol{x}}_2 = C\vec{\boldsymbol{x}}_1\,, \qquad \cdots$$

$$C \;=\; \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



Vb. 10.4 Ontbind de matrix A als $A = PCP^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

<u>Oplossing</u>:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= (0.5 - \lambda)(1.1 - \lambda) - (-0.6) \times 0.75 \\ &= 0.55 - 0.5\lambda - 1.1\lambda + \lambda^2 + 3/5 \times 3/4 \\ &= \lambda^2 - 1.6\lambda + 1 \end{aligned}$$

Eigenwaarden en eigenvectoren via Matlab/Python:

$\lambda = 0.8 + 0.6i$; Basis eigenruimte : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 0.8 - 0.6i$; Basis eigenruimte : $\left\{ \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Vraag — Herhaling vorige les

In welke van de onderstaande gevallen is een 2×2 matrix A diagonaliseerbaar d.m.v. $A = PDP^{-1}$?

- ROOD: Als A twee verschillende reële eigenwaarden heeft.
- GROEN: Als A een dubbele eigenwaarde heeft en de corresponderende eigenruimte dimensie één heeft.
- BLAUW: Als A een dubbele eigenwaarde heeft en de corresponderende eigenruimte dimensie twee heeft.
- GEEL: Als A twee verschillende complexe eigenwaarden heeft.

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Stelling 10.5

Stel A is een 2×2 matrix met complexe eigenwaarde $\lambda = a - bi$ $(b \neq 0)$ en een bijhorende eigenvector $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{C}^n$, dan geldt

$$A = PCP^{-1} \qquad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}\,\vec{\boldsymbol{v}} & \mathrm{Im}\,\vec{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix}.$$

Zondder bewijs

Vb. 10.4 $A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 0.8 - 0.6i \quad \vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$

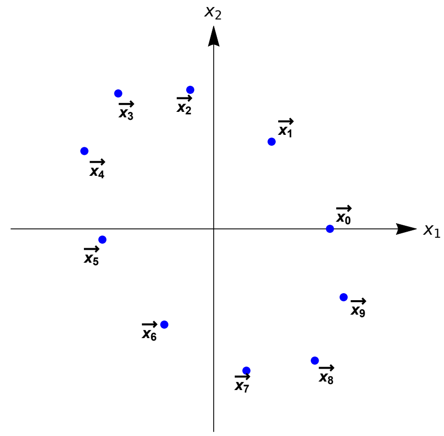
$$C = \begin{bmatrix} \text{------} & \text{------} \\ \text{------} & \text{------} \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \text{------} & \text{------} \\ \text{------} & \text{------} \end{bmatrix}$$

Controle: $A = PCP^{-1} \Rightarrow AP = PC$

$$AP = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$PC = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{------} & \text{------} \\ \text{------} & \text{------} \end{bmatrix}$$

Vb. 10.4 Bepaal het effect van de lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ door gebruik te maken van $A = PCP^{-1}$.

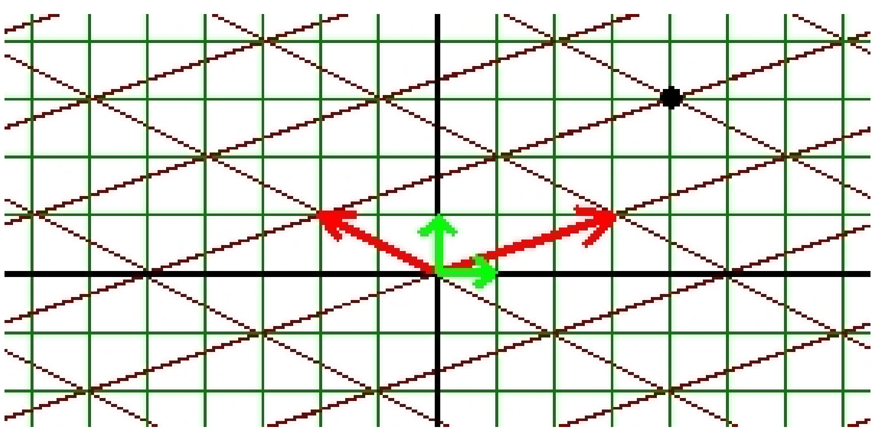


$$\begin{aligned} A = PCP^{-1} &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \text{---} & 0 \\ 0 & \text{---} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

$$r^2 = |\lambda|^2 = 0.8^2 + 0.6^2 = 0.64 + 0.36 = 1$$

Herhaling H5: Verandering van basis

Vb. Standaardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{----} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{----} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{----} \\ \text{----} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

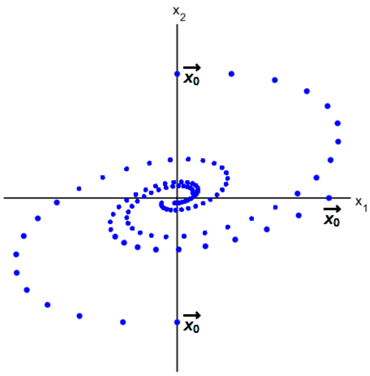
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vb. Analyseer het dynamisch systeem $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ met

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.1 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Eigenwaarden en eigenvectoren via Matlab/Python:

$$\begin{aligned} A = PCP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & -0.2 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \\ &= P \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} P^{-1} \\ r^2 &= |\lambda|^2 = (0.9)^2 + (0.2)^2 = 0.81 + 0.04 < \_\_\_\_ \end{aligned}$$



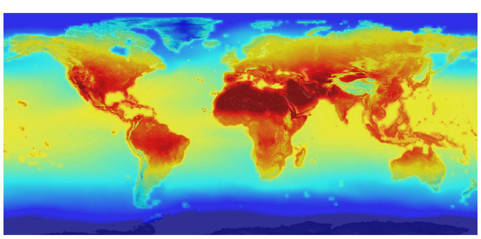
$|\lambda| = 1$ Ellipsbeweging rond de oorsprong

$|\lambda| > 1$ Spiraalbeweging ________________________

$|\lambda| < 1$ Spiraalbeweging ________________________

Analyse van klimaatverandering

Met lineaire modellen



$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= A\vec{x}_k \\ \begin{bmatrix} t_{k+1} \\ n_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.33 \\ 0.18 & 0.9 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 & 0.94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_k \\ n_k \\ v_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_k &= \text{temperatuur op tijdstip } k \\ n_k &= \text{hoeveelheid neerslag op tijdstip } k \\ v_k &= \text{vegetatie op tijdstip } k \\ t_{k+1} &= \text{temperatuur op tijdstip } k+1 \\ n_{k+1} &= \text{hoeveelheid neerslag op tijdstip } k+1 \\ v_{k+1} &= \text{vegetatie op tijdstip } k+1 \end{aligned}$$

Waar of vals? (Examenvraag Januari 2015)

Stel dat A een 2×2 matrix is die kan ontbonden worden in de vorm $A = PCP^{-1}$, met

$$C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Dan is de matrix P uniek.