Lineaire Algebra

1ste Bachelor
Industrieel Ingenieur

Editie
Versie 2024-2025
21 januari 2025.

Uitgever
Willem Waegeman, An Schelfaut, Elien Van de Walle, Demir Ali Köse en Joris Mattheijssens
Vakgroep Data Analyse en Wiskundige Modellering
Universiteit Gent
Coupure links 653
9000 Gent
België

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 8
Eigenwaarden

In de vorige hoofdstukken hebben we geleerd dat de matrix-vectorvermenigvuldiging van een reële $n \times n$ matrix en een vector uit $\mathbb{R}^n$ resulteert in een nieuwe vector uit $\mathbb{R}^n$. Dit principe kan eenvoudig uitgebreid worden naar vectoren in $\mathbb{C}^n$: wanneer we een vierkante matrix van grootte n beschouwen, kunnen we deze vermenigvuldigen met een vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ uit $\mathbb{C}^n$ in de vorm van een matrix-vectorproduct (Definitie 2.7). Het resultaat is een andere vector uit $\mathbb{C}^n$. We kunnen dit product ook beschouwen als een lineaire tranformatie — de vermenigvuldiging met een vierkante matrix is een functie die een vector ($\vec{\boldsymbol{x}}$) omzet in een andere vector ($A\vec{\boldsymbol{x}}$) van dezelfde grootte. Voor sommige vectoren komt deze schijnbaar ingewikkelde bewerking exact overeen met een scalaire vermenigvuldiging. Welke vectoren dit zijn, is afhankelijk van de matrix A. Dus we vragen ons af hoe we, voor een gegeven matrix A, kunnen bepalen of er dergelijke vectoren zijn, en zo ja, hoe we ze kunnen bepalen. Deze vectoren (en hun bijhorenden scalairen) zullen in heel wat verschillende situaties bijzonder interessant blijken.

We zullen in dit hoofdstuk veeltermvergelijkingen oplossen, wat maakt dat complexe getallen al snel om de hoek kunnen komen kijken. Dit is de hoofdreden waarom we in het vorige hoofdstuk complexe getallen geïntroduceerd hebben.

Sectie 8.1 Eigenwaarden en Eigenvectoren

We beginnen met de definitie die centraal staat in dit hoofdstuk.

Definitie 8.1 Eigenwaarden en Eigenvectoren van een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n, $\vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ een vector is in $\mathbb{C}^n$ en λ een scalair in $\mathbb{C}$. Dan zeggen we dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ een **eigenvector** is van A horende bij **eigenwaarde** λ als geldt dat

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}.$$

Overtuig jezelf ervan dat zo'n toevallige situaties daadwerkelijk kunnen voorkomen. Bekijk het volgende voorbeeld aandachtig, maar vraag je nu nog niet af waarom de verschillende keuzes gemaakt zijn. Binnenkort zullen we over methoden beschikken waarmee we zelf op zoek kunnen gaan naar eigenvectoren.

Voorbeeld 8.1
Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix}$$

en de vectoren

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dan is

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 4\vec{\boldsymbol{x}}\,,$$

zodat $\vec{\boldsymbol{x}}$ een eigenvector is van A met eigenwaarde $\lambda = 4$. Er geldt ook dat

$$A\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix} = 0\vec{\boldsymbol{y}},$$

waardoor $\vec{\boldsymbol{y}}$ een eigenvector is van A met eigenwaarde $\lambda = 0$. Zo ook

$$A\vec{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 14 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\vec{\boldsymbol{z}},$$

dus ook $\vec{\boldsymbol{z}}$ is een eigenvector van A met eigenwaarde $\lambda = 2$. Ten slotte is wegens

$$A\vec{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 204 & 98 & -26 & -10 \\ -280 & -134 & 36 & 14 \\ 716 & 348 & -90 & -36 \\ -472 & -232 & 60 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{\boldsymbol{w}}\,,$$

$\vec{\boldsymbol{w}}$ een eigenvector van A met bijhorende eigenwaarde $\lambda = 2$.

We hebben hier vier voorbeelden van eigenvectoren van A aangehaald. Zijn er nog meer? Ja, elk niet-nul scalair veelvoud van een eigenvector is opnieuw een eigenvector. Stel in dit voorbeeld dat $\vec{\boldsymbol{u}} = 30\vec{\boldsymbol{x}}$. Dan geldt

$$\begin{aligned} A\vec{\boldsymbol{u}} &= A(30\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &= 30A\vec{\boldsymbol{x}} \\ &= 30(4\vec{\boldsymbol{x}}) && \vec{\boldsymbol{x}} \text{ een eigenvector van } A \\ &= 4(30\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &= 4\vec{\boldsymbol{u}}, \end{aligned}$$

zodat $\vec{\boldsymbol{u}}$ ook een eigenvector van A is voor dezelfde eigenwaarde $\lambda = 4$.

De vectoren $\vec{\boldsymbol{z}}$ en $\vec{\boldsymbol{w}}$ zijn beide eigenvectoren van A voor dezelfde eigenwaarde $\lambda = 2$, en toch geldt hier niet dat de twee vectoren een scalair veelvoud van elkaar zijn. De situatie lijkt hier dus iets gecompliceerder. We bekijken wat we bekomen als we de twee bij elkaar optellen. Zo bekomen we $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{w}}$, wat we vermenigvuldigen met A:

$$\begin{aligned} A\vec{\boldsymbol{v}} &= A(\vec{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{w}}) && \\ &= A\vec{\boldsymbol{z}} + A\vec{\boldsymbol{w}} && \text{Stelling 3.7} \\ &= 2\vec{\boldsymbol{z}} + 2\vec{\boldsymbol{w}} && \vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{w}} \text{ eigenvectoren van } A \\ &= 2(\vec{\boldsymbol{z}} + \vec{\boldsymbol{w}}) && \\ &= 2\vec{\boldsymbol{v}}, && \end{aligned}$$

waardoor er geldt dat $\vec{\boldsymbol{v}}$ ook een eigenvector is van A voor eigenwaarde $\lambda = 2$. Het lijkt er dus op dat de verzameling eigenvectoren die horen bij een vaste eigenwaarde gesloten is onder de bewerkingen van de vectorruimte $\mathbb{C}^n$.

De vector $\vec{\boldsymbol{y}}$ is een eigenvector van A voor de eigenwaarde $\lambda = 0$, dus kunnen we schrijven dat $A\vec{\boldsymbol{y}} = 0\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\mathbf{0}}$. Maar dit betekent ook dat $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A)$. Ook hier lijkt er dus een verband te bestaan. ⊠

Voorbeeld 8.1 licht al een tipje van de sluier op als het aankomt op de eigenschappen rond eigenwaarden en eigenvectoren. We zullen deze algemene eigenschappen verder onderzoeken in Sectie 8.2, maar in deze sectie leggen we ons nog even toe op de vraag hoe we nu eigenwaarden en eigenvectoren berekenen.

Eigenwaarden en Eigenvectoren Berekenen

Ons belangrijkste wapen bij het berekenen van eigenwaarden zal de determinant zijn, meerbepaald Stelling 6.7. Hieronder is een reeks equivalenties gegeven die als leidraad zal dienen voor het berekenen van de eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix:

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{\boldsymbol{x}} - \lambda I_n\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Dus voor een eigenwaarde λ en de geassocieerde eigenvector $\vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ zal de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ een niet-nulelement zijn van de nulruimte van de matrix $A - \lambda I_n$ terwijl de determinant van de matrix $A - \lambda I_n$ gelijk aan 0 zal zijn. Bijgevolg is $A - \lambda I_n$ een niet-inverteerbare matrix. We vatten deze ideeën samen in Stelling 8.1 en Stelling 8.2, maar deze korte bespreking is reeds voldoende om al tot een volgende definitie en een bijhorend voorbeeld over te gaan.

Definitie 8.2 Karakteristieke Veelterm

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n. Dan wordt de **karakteristieke veelterm** van A, genoteerd als $p_A(\lambda)$, gegeven door de veelterm

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)\,.$$

Voorbeeld 8.2
Beschouw

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\
&= \begin{vmatrix} -13-\lambda & -8 & -4 \\ 12 & 7-\lambda & 4 \\ 24 & 16 & 7-\lambda \end{vmatrix} && \text{Definitie 8.2} \\
&= (-13-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 16 & 7-\lambda \end{vmatrix} + (-8)(-1)\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 24 & 7-\lambda \end{vmatrix} && \text{Definitie 6.2} \\
&\quad + (-4)\begin{vmatrix} 12 & 7-\lambda \\ 24 & 16 \end{vmatrix} \\
&= (-13-\lambda)\left[(7-\lambda)(7-\lambda) - 4(16)\right] && \text{Definitie 6.2} \\
&\quad + (-8)(-1)\left[12(7-\lambda) - 4(24)\right] \\
&\quad + (-4)\left[12(16) - (7-\lambda)(24)\right] \\
&= 3 + 5\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 \\
&= -(\lambda-3)(\lambda+1)^2.
\end{aligned}$$

⊠

De karakteristieke vergelijking maakt het mogelijk om eenvoudig eigenwaarden te vinden en zal soms worden ingeschakeld om een aantal eigenschappen van eigenwaarden te bepalen.

Stelling 8.1 Eigenwaarden zijn de Wortels van de Karakteristieke Veelterm

Veronderstel dat A een vierkante matrix is. Dan is λ een eigenwaarde van A als en slechts als $p_A(\lambda) = 0$. Dit is de karakteristieke vergelijking.

Bewijs Veronderstel dat A van grootte n is.

$$\begin{aligned}
&\lambda \text{ is een eigenwaarde van } A \\
\Leftrightarrow\ & \text{er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor } A\vec{x} = \lambda\vec{x} && \text{Definitie 8.1} \\
\Leftrightarrow\ & \text{er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor } A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \text{er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor } A\vec{x} - \lambda I_n\vec{x} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & \text{er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor } (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0} \\
\Leftrightarrow\ & A - \lambda I_n \text{ is niet-inverteerbaar} && \text{Stelling 3.16} \\
\Leftrightarrow\ & \det(A - \lambda I_n) = 0 && \text{Stelling 6.7} \\
\Leftrightarrow\ & p_A(\lambda) = 0. && \text{Definitie 8.2}
\end{aligned}$$

■

Voorbeeld 8.3

In Voorbeeld 8.2 vonden we dat de karakteristieke veelterm van

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

de veelterm $p_A(\lambda) = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)^2$ is. Eens ontbonden kunnen we eenvoudig alle wortels bepalen, dewelke $\lambda = 3$ en $\lambda = -1$ zijn. Via Stelling 8.1 zijn $\lambda = 3$ en $\lambda = -1$ allebei eigenwaarden van A. We hebben dus alle eigenwaarden gevonden. ⊠

We richten ons nu op de berekening van eigenvectoren.

Definitie 8.3 Eigenruimte van een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is en λ een eigenwaarde is van A. Dan is de **eigenruimte** van A voor λ, $\mathcal{E}_A(\lambda)$, de verzameling van alle eigenvectoren van A, horende bij de eigenwaarde λ, samen met de nulvector.

Voorbeeld 8.1 gaf al een eerste indruk dat de verzameling eigenvectoren van éénzelfde eigenwaarde een aantal sluitingseigenschappen zal hebben. Samen met de niet-eigenvector $\vec{\mathbf{0}}$ krijgen we inderdaad een volwaardige deelruimte.

Stelling 8.2 Eigenruimte van een Matrix is een nulruimte

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n en λ een eigenwaarde van A is. Dan

$$\mathcal{E}_A(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I_n).$$

Bewijs Beschouw een willekeurige niet-nulvector $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}_A(\lambda) &\Leftrightarrow A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}} && \text{Definitie 8.3}\\
&\Leftrightarrow A\vec{\boldsymbol{x}} - \lambda\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}\\
&\Leftrightarrow A\vec{\boldsymbol{x}} - \lambda I_n\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}\\
&\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}\\
&\Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n) && \text{Definitie 5.4.}
\end{aligned}$$

■

Voorbeeld 8.4

Voorbeeld 8.2 en Voorbeeld 8.3 beschrijven de karakteristieke veelterm en de eigenwaarden van de 3×3 matrix

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}.$$

We zullen nu voor elke eigenwaarde de bijhorende eigenruimte berekenen. Hiervoor rij-reduceren we de matrix $A - \lambda I_3$ om de oplossingen van het homogene stelsel $(A - \lambda I_3)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ te bepalen en vervolgens de eigenruimte neer te schrijven als de nulruimte van $A - \lambda I_3$ (Stelling 8.2). We schrijven de nulruimte dan meteen als de span van een basis.

$$\lambda = 3: \qquad [A - 3I_3 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} -16 & -8 & -4 & 0 \\ 12 & 4 & 4 & 0 \\ 24 & 16 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(3) = \mathcal{N}(A - 3I_3) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = -1: \quad [A + 1I_3 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} -12 & -8 & -4 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 0 \\ 24 & 16 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_A(-1) = \mathcal{N}(A + 1I_3) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Nu we beschikken over de eigenruimten, kunnen we gemakkelijk de eigenvectoren berekenen door niet-triviale lineare combinaties te vormen van de basisvectoren die elke eigenruimte beschrijven. Bemerk in het bijzonder dat we een basis kunnen “opschonen” als we scalaire veelvouden gebruiken om breuken weg te werken. ⊠

Opmerking Zoals we hebben gezien in Sectie 5.3, bestaat een nulruimte ofwel enkel uit de nulvector, ofwel is ze oneindig groot. Maar een eigenruimte bestaat nooit uit enkel de nulvector, want die is per definitie geen eigenvector. Dus zijn eigenruimtes altijd oneindig groot. Dit kan je ook zien bij het reduceren van $[A - \lambda I_m \quad \vec{\mathbf{0}}]$: er ontstaat steeds minstens één nulrij, en dus zijn er oneindig veel oplossingen voor het homogene stelsel $(A - \lambda I_m)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Voorbeelden van het Berekenen van Eigenwaarden en Eigenvectoren

In deze sectie behandelen we geen stelling en enkel een paar voorbeelden om de verschillende mogelijkheden voor eigenwaarden en eigenvectoren te illustreren. Deze voorbeelden kunnen we stuk voor stuk met de hand uitrekenen, maar de berekeningen voor de karakteristieke veelterm kunnen zeer veel tijd in beslag nemen en er sluipt al snel een foutje tussen. Ontbinding kan ook een moeilijke opgave zijn, alhoewel het zoeken naar wortels gemakkelijker wordt wanneer we zouden aannemen dat de meeste van onze wortels gehele getallen zijn. Deze voorbeelden vertonen doelbewust enige gelijkenis met Voorbeeld 8.2, Voorbeeld 8.3 en Voorbeeld 8.4. Eerst geven we nog enkele definities mee om doorheen de voorbeelden op te kunnen steunen.

Definitie 8.4 Algebraïsche Multipliciteit van een Eigenwaarde

Veronderstel dat A een vierkante matrix is en λ een eigenwaarde is van A. Dan is de **algebraïsche multipliciteit** van λ, $\alpha_A(\lambda)$, de hoogste macht van $(x - \lambda)$ in de karakteristieke veelterm $p_A(x)$.

Omdat een eigenwaarde λ steeds een wortel is van de karakteristieke veelterm, is er altijd een factor $(x - \lambda)$ en de algebraïsche multipliciteit is exact de macht van deze factor in de ontbinding van $p_A(x)$. Zo geldt er dus dat $\alpha_A(\lambda) \geq 1$. Vergelijk de definitie van algebraïsche multipliciteit met de volgende definitie.

Definitie 8.5 Meetkundige Multipliciteit van een Eigenwaarde

Veronderstel dat A een vierkante matrix is en λ een eigenwaarde is van A. Dan is de **meetkundige multipliciteit** van λ, $\gamma_A(\lambda)$, de dimensie van de eigenruimte $\mathcal{E}_A(\lambda)$.

Omdat elke eigenwaarde minstens één eigenvector moet hebben, kan de geassocieerde eigenruimte niet triviaal zijn, dus geldt dat $\gamma_A(\lambda) \geq 1$.

Voorbeeld 8.5
Beschouw de matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -4 \\ 12 & 1 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & 10 \end{bmatrix},$$

dan is

$$p_B(\lambda) = 8 - 20\lambda + 18\lambda^2 - 7\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3.$$

Dus de eigenwaarden zijn 1 en 2 met algebraïsche multipliciteit $\alpha_B(1) = 1$ en $\alpha_B(2) = 3$.
We berekenen de eigenvectoren:

$$\lambda = 1: \qquad [B - 1I_4 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 12 & 0 & 4 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_B(1) = \mathcal{N}(B - 1I_4) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = 2: \qquad [B - 2I_4 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 12 & -1 & 4 & 9 & 0 \\ 6 & 5 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_B(2) = \mathcal{N}(B - 2I_4) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Dus elke eigenruimte heeft dimensie 1 en dus $\gamma_B(1) = 1$ en $\gamma_B(2) = 1$. Wat dit voorbeeld zo interessant maakt, is het verschil in algebraïsche en meetkundige multipliciteit voor $\lambda = 2$. In veel van onze voorbeelden zullen de algebraïsche en meetkundige multipliciteiten gelijk zijn aan elkaar voor alle eigenwaarden (zoals het geval was voor $\lambda = 1$), dus onthoud dit voorbeeld goed. Later zien we een aantal verklaringen voor dit fenomeen (zie Voorbeeld 9.4). ⊠

Voorbeeld 8.6
Beschouw de matrix

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan is

$$p_C(\lambda) = -3 + 4\lambda + 2\lambda^2 - 4\lambda^3 + \lambda^4 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

De eigenwaarden zijn dus 3, 1 en -1 met als algebraïsche multipliciteiten $\alpha_C(3) = 1$, $\alpha_C(1) = 2$ en

$\alpha_C(-1) = 1$. Voor de eigenvectoren bekomen we:

$$\lambda = 3: \qquad [C - 3I_4 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_C(3) = \mathcal{N}(C - 3I_4) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = 1: \qquad [C - 1I_4 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_C(1) = \mathcal{N}(C - 1I_4) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = -1: \qquad [C + 1I_4 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_C(-1) = \mathcal{N}(C + 1I_4) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

De dimensies van de eigenruimten bepalen de meetkundige multipliciteiten $\gamma_C(3) = 1$, $\gamma_C(1) = 2$ en $\gamma_C(-1) = 1$. De meetkundige multipliciteiten zijn in dit geval identiek aan de algebraïsche multipliciteiten. ⊠

Voorbeeld 8.7
Beschouw de matrix

$$E = \begin{bmatrix} 29 & 14 & 2 & 6 & -9 \\ -47 & -22 & -1 & -11 & 13 \\ 19 & 10 & 5 & 4 & -8 \\ -19 & -10 & -3 & -2 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

dan is

$$p_E(\lambda) = -16 + 16\lambda + 8\lambda^2 - 16\lambda^3 + 7\lambda^4 - \lambda^5 = -(\lambda - 2)^4(\lambda + 1).$$

De eigenwaarden zijn 2 en -1, met algebraïsche multipliciteit $\alpha_E(2) = 4$ en $\alpha_E(-1) = 1$.
Voor de eigenvectoren krijgen we telkens

$$\lambda = 2: \qquad [E - 2I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 27 & 14 & 2 & 6 & -9 & 0 \\ -47 & -24 & -1 & -11 & 13 & 0 \\ 19 & 10 & 3 & 4 & -8 & 0 \\ -19 & -10 & -3 & -4 & 8 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_E(2) = \mathcal{N}(E - 2I_5) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = -1: \quad [E + 1I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 30 & 14 & 2 & 6 & -9 & 0 \\ -47 & -21 & -1 & -11 & 13 & 0 \\ 19 & 10 & 6 & 4 & -8 & 0 \\ -19 & -10 & -3 & -1 & 8 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_E(-1) = \mathcal{N}(E + 1I_5) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

De meetkundige multipliciteiten die volgen uit de dimensies van de eigenruimten zijn $\gamma_E(2) = 2$ en $\gamma_E(-1) = 1$. Wat dit voorbeeld interessant maakt, is dat de algebraïsche multipliciteit van $\lambda = 2$ niet gelijk is aan de bijhorende meetkundige multipliciteit. ⊠

Voorbeeld 8.8

Beschouw de matrix

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10 \end{bmatrix},$$

dan is

$$p_H(\lambda) = -6\lambda + \lambda^2 + 7\lambda^3 - \lambda^4 - \lambda^5 = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3).$$

De eigenwaarden zijn 2, 1, 0, -1 en -3 met als algebraïsche multipliciteiten $\alpha_H(2) = 1$, $\alpha_H(1) = 1$, $\alpha_H(0) = 1$, $\alpha_H(-1) = 1$ en $\alpha_H(-3) = 1$. Als eigenvectoren krijgen we:

$$\lambda = 2: \quad [H - 2I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 13 & 18 & -8 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -4 & -2 & 0 \\ -43 & -46 & 17 & -16 & 15 & 0 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -12 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_H(2) = \mathcal{N}(H - 2I_5) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = 1: \quad [H - 1I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 14 & 18 & -8 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -2 & 0 \\ -43 & -46 & 17 & -15 & 15 & 0 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_H(1) = \mathcal{N}(H - 1I_5) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = 0: \quad [H - 0I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2 & 0 \\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15 & 0 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_H(0) = \mathcal{N}(H - 0I_5) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = -1: \quad [H + 1I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 16 & 18 & -8 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & -2 & 0 \\ -43 & -46 & 17 & -13 & 15 & 0 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_H(-1) = \mathcal{N}(H + 1I_5) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right),$$

$$\lambda = -3: \quad [H + 3I_5 \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 18 & 18 & -8 & 6 & -5 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & -2 & 0 \\ -43 & -46 & 17 & -11 & 15 & 0 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E}_H(-3) = \mathcal{N}(H + 3I_5) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right) = \text{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

De eigenruimten geven als meetkundige multipliciteiten $\gamma_H(2) = 1$, $\gamma_H(1) = 1$, $\gamma_H(0) = 1$, $\gamma_H(-1) = 1$ en $\gamma_H(-3) = 1$, exact hetzelfde als de algebraïsche multipliciteiten. Dit voorbeeld verdient om twee redenen onze aandacht: eerst omdat $\lambda = 0$ een eigenwaarde is, wat de aankomende Stelling 8.5 zal onderbouwen. Ten tweede zijn alle eigenwaarden verschillend en hebben ze allemaal algebraïsche en meetkundige multipliciteit 1, iets wat verder uitgediept zal worden in Stelling 9.3. ⊠

Sectie 8.2 Eigenschappen van Eigenwaarden en Eigenvectoren

De vorige sectie introduceerde eigenwaarden en eigenvectoren en concentreerde zich op het bestaan ervan en hoe ze te bepalen. Deze sectie werkt meer rond stelllingen en de verschillende eigenschappen die eigenwaarden en eigenvectoren zullen hebben.

Stelling 8.3 Eigenwaarden van Driehoeksmatrices

De eigenwaarden van een driehoeksmatrix zijn de elementen op de hoofddiagonaal van de matrix.

Bewijs Het is vrij eenvoudig om deze stelling formeel te bewijzen, maar het volgende voorbeeld geeft ons evenveel inzicht in de stelling. Opgelet, hiermee wordt de stelling niet aangetoond. ■

Voorbeeld 8.9
We beschouwen de volgende bovendriehoeksmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Om de eigenwaarden van A te vinden, berekenen we de volgende determinant:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (5-\lambda)(3-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Zo concluderen we dat de eigenwaarden van A inderdaad de elementen op de diagonaal zijn. ⊠

Stelling 8.4 Eigenvectoren met Verschillende Eigenwaarden

Veronderstel dat A een $n \times n$ vierkante matrix is en $S = \{\vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \vec{\boldsymbol{x}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_p\}$ een verzameling is van eigenvectoren met als eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ zodat $\lambda_i \neq \lambda_j$ van zodra $i \neq j$. Dan is S een lineair onafhankelijke verzameling.

Bewijs Een formeel bewijs valt buiten het bestek van deze cursus. Veel voorbeelden uit de vorige sectie illustreren dat deze stelling zal gelden. ■

Er bestaat een eenvoudig verband tussen de eigenwaarden van een matrix en het al dan niet inverteerbaar zijn van een matrix.

Stelling 8.5 Niet-Inverteerbare Matrices hebben Nul als Eigenwaarde

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n, dan zijn volgende stellingen equivalent.

1. A is inverteerbaar.
2. A kan gereduceerd worden tot de eenheidsmatrix.
3. Het lineair stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke mogelijke keuze voor $\vec{b}$.
4. De kolommen van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
5. Het homogene stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft enkel de triviale oplossing als oplossing.
6. De kolommen van A vormen een lineair onafhankelijke verzameling.
7. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is surjectief.
8. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is injectief.
9. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is bijectief.
10. $\det(A) \neq 0$.
11. Alle eigenwaarden van A verschillen van 0.

Bewijs We hebben de volgende equivalenties:

$$\begin{aligned} A \text{ is niet-inverteerbaar} &\Leftrightarrow \text{ er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor geldt dat } A\vec{x} = \vec{0} && \text{Stelling 3.16} \\ &\Leftrightarrow \text{ er bestaat een } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ waarvoor geldt dat } A\vec{x} = 0\vec{x} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ is een eigenwaarde van } A. && \text{Definitie 8.1} \end{aligned}$$

■

Een veelterm van graad n zal exact n wortels hebben. Met behulp van dit gegeven over veeltermvergelijkingen kunnen we meer zeggen over de algebraïsche multipliciteiten van eigenwaarden.

Stelling 8.6 Graad van de Karakteristieke Veelterm

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n. Dan heeft de karakteristieke veelterm van A, $p_A(\lambda)$, graad n.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Veel van de voorbeelden uit de vorige sectie voldoen exact aan deze stelling, waaruit we dan ook het sterke vermoeden kunnen afleiden dat de stelling ook altijd zal gelden. ■

Stelling 8.7 Aantal Eigenwaarden van een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n met verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n.$$

Bewijs Per definitie van de algebraïsche multipliciteit (Definitie 8.4) kunnen we de karakteristieke veelterm ontbinden als

$$p_A(x) = c(x-\lambda_1)^{\alpha_A(\lambda_1)}(x-\lambda_2)^{\alpha_A(\lambda_2)}(x-\lambda_3)^{\alpha_A(\lambda_3)}\cdots(x-\lambda_k)^{\alpha_A(\lambda_k)},$$

waarbij c een niet-nul constante is. We zouden kunnen bewijzen dat $c = (-1)^n$, maar het is hier niet nodig om zo specifiek te werk te gaan. Het linkerlid is een veelterm van graad n wegens Stelling 8.6 en het rechterlid is een veelterm van graad $\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i)$. De gelijkheid in graad van de veeltermen zorgt nu voor de gelijkheid $\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n$. ■

Stelling 8.8 Multipliciteiten van een Eigenwaarde

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n en λ een eigenwaarde is. Dan geldt

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n.$$

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Veel voorbeelden uit de vorige sectie illustreren de gedachtegang van deze stelling. ■

Stelling 8.9 Maximaal Aantal Eigenwaarden voor een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n. Dan kan A niet meer dan n verschillende eigenwaarden hebben.

Bewijs Veronderstel dat A k verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ heeft. Dan

$$\begin{aligned} k = \sum_{i=1}^{k} 1 &\leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) && \text{Stelling 8.8} \\ \Leftrightarrow \quad k &\leq n && \text{Stelling 8.7} \end{aligned}$$

■

Sectie 8.3 Voorbereiding Werkcollege

1. Is 5 een eigenwaarde van $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$?

2. Als $\vec{\boldsymbol{x}}$ een eigenvector is van A corresponderend met de eigenwaarde λ, aan wat is dan $A^3\vec{\boldsymbol{x}}$ dan gelijk?

3. Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{b}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{b}}_2$ eigenvectoren zijn die corresponderen met respectievelijke eigenwaarden λ_1 en λ_2 en veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{b}}_3$ en $\vec{\boldsymbol{b}}_4$ lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn die horen bij een derde, nieuwe eigenwaarde λ_3. Volgt er dan noodzakelijkerwijs dat $\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \vec{\boldsymbol{b}}_4\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is?

4. Als A een $n \times n$ matrix is en λ een eigenwaarde is van A, toon dan aan dat 2λ een eigenwaarde is van $2A$.

Sectie 8.4 Oefeningen

1. Is de gegeven $\vec{\boldsymbol{v}}$ een eigenvector van de matrix A? Zo ja, bepaal de corresponderende eigenwaarde.

   (a) $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

   (b) $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

   (c) $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (d) $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

2. Is de gegeven λ een eigenwaarde van de matrix A? Zo ja, bepaal de corresponderende eigenvector.

   (a) $\lambda = 2$ en $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

   (b) $\lambda = -3$ en $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

   (c) $\lambda = 0$ en $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

   (d) $\lambda = 4$ en $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

   (e) $\lambda = 1$ en $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de onderstaande matrices.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 2 & 11 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

   (g) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(j) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(k) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(l) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(m) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(n) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. De algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde λ is altijd groter dan of gelijk aan de dimensie van de corresponderende eigenruimte. Bepaal h in de matrix A zodat de eigenruimte voor $\lambda = 4$ tweedimensionaal is.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hoofdstuk 9
Diagonalisatie van Vierkante Matrices

In het vorig hoofdstuk hebben we eigenwaarden en eigenvectoren geïntroduceerd. Deze zullen in dit hoofdstuk gebruikt worden om een vierkante matrix te diagonaliseren. Hierbij schrijven we de matrix als een product van drie matrices, waarbij de middelste matrix een diagonaalmatrix is met de eigenwaarden op de hoofddiagonaal. Dergelijke diagonalisatie van een vierkante matrix is van cruciaal belang in veel van de hedendaagse technologische toepassingen van lineaire algebra. Vervolgens tonen we het nut van het concept bij het efficiënt berekenen van machten van matrices. Machten van matrices moeten onder meer berekend worden in discrete dynamische systemen. Deze belangrijke toepassing wordt bestudeerd op het einde van dit hoofdstuk.

Sectie 9.1 Diagonalisatie

We beginnen met de formele definitie van een diagonaalmatrix.

Definitie 9.1 Diagonaalmatrix

Veronderstel dat D een vierkante matrix is. Dan is D een **diagonaalmatrix** als $[D]_{ij} = 0$ voor $i \neq j$.

Om verwarring te vermijden zullen we altijd het symbool D gebruiken wanneer we verwijzen naar een diagonaalmatrix. Diagonaalmatrices mogen niet verward worden met diagonaliseerbare matrices, die hierna gedefinieerd worden.

Definitie 9.2 Diagonaliseerbare Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix is. Dan is A **diagonaliseerbaar** als er een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P bestaan zodat $A = PDP^{-1}$.

Bemerk dat in de bovenstaande definitie het nogal onduidelijk blijft hoe D en P er uit zien. We zullen dit later vastleggen, wat overigens het belangrijkste resultaat uit dit hoofdstuk zal zijn. Voordat we hiertoe komen, geven we eerst twee korte voorbeelden van diagonaliseerbare matrices.

Voorbeeld 9.1

Het stelsel van lineaire vergelijkingen in Voorbeeld 1.12 had als 3×3 coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Deze matrix kan als volgt ontbonden worden tot de vorm $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⊠

Voorbeeld 9.2
Definieer

$$B = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Controleer dat P inverteerbaar is en bemerk dat:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -4 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

⊠

Hoe vinden we nu precies de magische matrices D en P die ons zullen toestaan een matrix te diagonaliseren? Bereken, voor je de formulering van de volgende stelling leest, eens de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrices in Voorbeeld 9.1 en Voorbeeld 9.2.

Stelling 9.1 De Diagonalisatiestelling

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n. Dan is A diagonaliseerbaar als en slechts als er een lineair onafhankelijke verzameling bestaat die n eigenvectoren van A bevat.

Bewijs We beginnen het bewijs met het opstellen van een matrix-matrixvermenigvuldiging die gebruik maakt van eigenvectoren en eigenwaarden van A. Stel dat $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ eigenvectoren van A zijn en $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de corresponderende eigenwaarden zijn. Dan definiëren we de matrices P en D als volgt:

$$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Bemerk dat D een diagonaalmatrix is. Dankzij P en D is het altijd mogelijk om de volgende constructie te verwezenlijken:

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A\,\vec{\boldsymbol{v}}_1 & A\,\vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & A\,\vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \lambda_2\,\vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \lambda_n\,\vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad A \qquad\qquad P \qquad &= \qquad\qquad P \qquad\qquad\qquad D\,.
\end{aligned}
$$

Via deze constructie kunnen we naar het eerste deel ($\Leftarrow$) van het bewijs toewerken. Veronderstel daarom dat er een verzameling van n lineair onafhankelijke eigenvectoren bestaat. Dan kunnen we de constructie van hierboven herhalen waarbij $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. Bijgevolg hebben we dat $P = \begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix}$ inverteerbaar is door de Inverteerbare Matrix Stelling (Stelling 3.16). We vinden dan

$$
AP = PD \quad \Rightarrow \quad A = PDP^{-1}\,,
$$

wat dit deel ($\Leftarrow$) van het bewijs vervolledigt.

Nu focussen we op het tweede gedeelte ($\Rightarrow$). Veronderstel hiervoor dat A diagonaliseerbaar is, nl. dat we de matrix kunnen schrijven als $A = PDP^{-1}$ waarbij D een diagonaalmatrix is en P inverteerbaar is. Stel dat $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de diagonaalelementen van D zijn en dat $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$ de kolommen van P zijn. Eerst tonen we aan dat $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$ respectievelijk de eigenvectoren en eigenwaarden van A moeten zijn. Om dit te bekomen, schrijven we eerst

$$
A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad AP = PD\,.
$$

Met de bovenstaande notatie krijgen we dan dat

$$
\begin{aligned}
A\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_1 & \lambda_2\,\vec{\boldsymbol{v}}_2 & \cdots & \lambda_n\,\vec{\boldsymbol{v}}_n\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Elke kolom in deze constructie apart beschouwen geeft aanleiding tot een verzameling gelijkheden:

$$
A\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \lambda_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_1\,, \quad A\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \lambda_2\,\vec{\boldsymbol{v}}_2\,, \quad \ldots \quad , \quad A\vec{\boldsymbol{v}}_n = \lambda_n\,\vec{\boldsymbol{v}}_n\,.
$$

Dus moeten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n$ de eigenwaarden en eigenvectoren van A zijn. Daarnaast geldt dat P inverteerbaar is, dus uit Stelling 3.16 volgt dat de verzameling $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ lineair onafhankelijk moet zijn. ■

Merk op dat we in het bewijs van Stelling 9.1 constructief te werk zijn gegaan. Om de matrix te diagonaliseren hoeven we enkel n lineair onafhankelijk eigenvectoren te identificeren. Vervolgens kunnen we met de eigenvectoren als kolommen een inverteerbare matrix P construeren en een diagonaalmatrix D door de bijhorende eigenwaarden op de diagonaal te plaatsen. We hoeven enkel in het oog te houden dat de eigenvectoren en eigenwaarden elk in de juiste kolom terechtkomen. We geven hierbij direct enkele voorbeelden van hoe we dan in de praktijk een matrix kunnen **diagonaliseren**.

Voorbeeld 9.3
Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

uit Voorbeeld 8.2, Voorbeeld 8.3 en Voorbeeld 8.4. De eigenwaarden en eigenruimten van A zijn

$$\begin{aligned} \lambda = 3: & \qquad \mathcal{E}_A(3) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right), \\ \lambda = -1: & \qquad \mathcal{E}_A(-1) = \operatorname{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right). \end{aligned}$$

Definieer de matrix P als de 3×3 matrix waarvan de kolommen de drie basisvectoren voor de eigenruimten van A zijn,

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Controleer door te steunen op Stelling 3.16 dat P inverteerbaar is (rij-reduceert tot de eenheidsmatrix of heeft een niet-nul determinant). Dan zijn de drie kolommen van P lineair onafhankelijk. Via Stelling 9.1 weten we dat A diagonaliseerbaar is. Daarnaast leiden we af uit de constructie in het bewijs van Stelling 9.1 hoe we dit diagonalisatieproces kunnen uitvoeren. De eigenwaarden verschijnen op de diagonaal van de matrix D, in dezelfde volgorde als de bijhorende eigenvectoren als kolommen van P. Zodoende krijgen we

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Met de hand kunnen we uitrekenen dat er geldt dat $A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In de praktijk vergt het minder werk om te checken dat $AP = PD$, want hiermee vermijden we dat we een matrix moeten inverteren. ⊠

De dimensie van een eigenruimte kan niet groter zijn dan de algebraïsche multipliciteit van de bijhorende eigenwaarde, en wel door Stelling 8.8. Wanneer voor elke eigenwaarde de dimensie van de eigenruimte even groot is als de algebraïsche multipliciteit, dan, en alleen dan, kunnen we de matrix diagonaliseren. De drie voorbeelden die we tot nu toe in deze sectie hebben gezien, Voorbeeld 9.1, Voorbeeld 9.2 en Voorbeeld 9.3, illustreren de diagonalisatie van een matrix. In elk van de gevallen kan je verifiëren dat de algebraïsche en meetkundige multipliciteit gelijk zijn voor elk van de eigenwaarden. Dit is het onderwerp van de volgende stelling.

Stelling 9.2 Diagonaliseerbare Matrices hebben Gelijke Multipliciteiten

Veronderstel dat A een vierkante matrix is. Dan is A diagonaliseerbaar als en slechts als $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$ voor elke eigenwaarde λ van A.

Bewijs Een formeel bewijs valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Voorbeeld 8.1, Voorbeeld 8.4, Voorbeeld 8.6 en Voorbeeld 8.8 zijn allemaal voorbeelden van matrices die diagonaliseerbaar zijn en Stelling 9.2 illustreren. Alhoewel we veel voorbeelden hebben gezien van diagonaliseerbare matrices, zijn er eveneens zeer veel matrices die niet diagonaliseerbaar zijn, zoals de volgende matrix.

Voorbeeld 9.4
In Voorbeeld 8.5 werd er bepaald dat de karakteristieke veeltermen van de matrix

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -4 \\ 12 & 1 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & -2 & -4 \\ 3 & -4 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

gelijk is aan

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$$

en dat de eigenruimte voor $\lambda = 2$ de ruimte

$$\mathcal{E}_B(2) = \mathrm{Span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

is. De meetkundige multipliciteit van $\lambda = 2$ is dus $\gamma_B(2) = 1$, terwijl de algebraïsche multipliciteit $\alpha_B(2) = 3$ is. Wegens Stelling 9.2 is de matrix B niet diagonaliseerbaar. ⊠

Voorbeeld 8.5 is een voorbeeld van een matrix die niet gediagonaliseerd kan worden door het verschil in meetkundige en algebraïsche multipliciteiten van $\lambda = 2$. In Voorbeeld 8.7 is de meetkundige multipliciteit van $\lambda = 2$ niet gelijk aan de algebraïsche multipliciteit en kan de matrix uit dit voorbeeld eveneens niet gediagonaliseerd worden.

Stelling 9.3 n Verschillende Eigenwaarden impliceert Diagonaliseerbaarheid

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n met n verschillende eigenwaarden. Dan is A diagonaliseerbaar.

Bewijs Stel dat $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ n verschillende eigenwaarden van A voorstellen. Dan hebben we volgens Stelling 8.7 $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_A(\lambda_i)$, wat impliceert dat $\alpha_A(\lambda_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Uit Stelling 8.8 volgt er dat $\gamma_A(\lambda_i) = 1$, $1 \leq i \leq n$. Dus $\gamma_A(\lambda_i) = \alpha_A(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$ en dan zegt Stelling 9.2 dat A diagonaliseerbaar is. ■

Voorbeeld 9.5

In Voorbeeld 8.8 heeft de matrix

$$H = \begin{bmatrix} 15 & 18 & -8 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -4 & -2 \\ -43 & -46 & 17 & -14 & 15 \\ 26 & 30 & -12 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

als karakteristieke veelterm

$$p_H(\lambda) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+3)$$

en dus heeft de 5×5 matrix 5 verschillende eigenwaarden. Via Stelling 9.3 weten we dat H diagonaliseerbaar moet zijn. Bij wijze van oefening voeren we deze diagonalisatie uit. De matrix P bevat de eigenvectoren van H als kolommen, één voor elke eigenruimte, wat lineair onafhankelijke kolommen en daardoor de inverteerbaarheid van P garandeert. De diagonaalmatrix bevat op de hoofddiagonaal de eigenwaarden van H in dezelfde volgorde als hun overeenkomstige eigenvectoren in de kolommen in P. Bemerk dat we de eigenvectoren gebruiken uit Voorbeeld 8.8 waarbij de elementen reeds zijn omgezet naar gehele getallen.

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ 10 & 10 & -3 & 2 & -4 \\ -7 & -6 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⊠

Voorbeeld 9.1 is een ander voorbeeld van een matrix die evenveel verschillende eigenwaarden heeft als de dimensie van de matrix. Zodoende is de matrix ook diagonaliseerbaar wegens Stelling 9.3.

Sectie 9.2 Machten van Vierkante Matrices

Machten van een diagonaalmatrix zijn eenvoudig te berekenen. Wanneer een matrix diagonaliseerbaar is, zijn de machten bijna even eenvoudig te berekenen. We zouden dit in een stelling kunnen gieten, maar we houden het hier bij een voorbeeld dat evenzeer duidelijk maakt dat machten in dat geval inderdaad gemakkelijk te bepalen zijn.

Voorbeeld 9.6
Veronderstel dat

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 6 & 13 \\ -33 & -1 & -9 & -21 \\ 21 & -4 & 12 & 21 \\ -36 & 2 & -14 & -28 \end{bmatrix}$$

en dat we A^{20} willen berekenen. Normaliter zouden we hiervoor 19 matrixvermenigvuldigingen nodig hebben, maar omdat A diagonaliseerbaar is, kunnen we de berekeningen significant vereenvoudigen. Eerst diagonaliseren we A. Met

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

bekomen we

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

We vinden nu een alternatieve manier om A^{20} neer te schrijven:

$$\begin{aligned} A^{20} &= AAA \ldots A \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \ldots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1} \ldots P)DP^{-1} \\ &= PDI_nDI_nDI_n \ldots DP^{-1} \\ &= PDDD \ldots DP^{-1} \\ &= PD^{20}P^{-1}, \end{aligned}$$

en omdat D een diagonaalmatrix is, zijn machten heel gemakkelijk te berekenen:

$$\begin{aligned} A^{20} &= P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{20} P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} (-1)^{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0)^{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1)^{20} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1048576 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6291451 & 2 & 2097148 & 4194297 \\ -9437175 & -5 & -3145719 & -6291441 \\ 9437175 & -2 & 3145728 & 6291453 \\ -12582900 & -2 & -4194298 & -8388596 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Merk op dat we op een efficiënte manier de berekening van de twintigste macht van A vervangen hebben door de berekening van de twintigste macht van D, en hoe de hoge macht van een diagonaalmatrix bekomen wordt door de machten van de scalairen op de hoofddiagonaal te nemen. De prijs die we betalen voor deze vereenvoudiging is dat we de matrix moeten diagonaliseren, wat impliceert dat we de eigenwaarden en eigenvectoren dienen te berekenen. En daarna moeten we nog twee matrixproducten uitrekenen. Maar hoe groter de macht die we moeten berekenen, des te groter de winst die we uit deze vereenvoudiging kunnen halen. ⊠

Sectie 9.3 Discrete Dynamische Systemen

In de wiskunde is een dynamisch systeem een tijdsafhankelijke functie die het gedrag van één of meerdere variabelen in een fysisch, chemisch of biologisch proces beschrijft. Voorbeelden van processen die via dynamische systemen beschreven worden zijn het slingeren van een klok, de stroming van water in een pijp of de telling van het aantal vissen in een meer.

Discrete dynamische systemen zijn dynamische systemen waarvan de veranderingen als het ware op een discrete manier gebeuren. Eén voorbeeld hiervan is hoe cellen zich synchroon delen en waarbij je op een vast aantal tijdstippen het aantal cellen opvolgt. Nog andere voorbeelden zijn die van eender welk organisme met discrete “generaties” (bvb. heel wat insecten, jaarlijks terugkerende planten e.d.) waarbij je ofwel de populatiegrootte opvolgt, ofwel een bepaalde genetische structuur opmeet, zoals de frequentie van allelen. Belangrijk hierin is dat er relatief korte en gesynchroniseerde acties moeten voorkomen (bvb. een broedseizoen), zodat de kleinere gebeurtenissen die er tussen de acties door gebeuren geen sterke weerslag zullen hebben op wat we aan het bekijken zijn.

Een andere manier om tegen discrete dynamische systemen aan te kijken is als discretiseringen van continue modellen. Vaak kunnen we organismen niet op een volledig continue manier observeren, maar voeren we metingen uit op vaste, regelmatige tijdstippen. Bijgevolg observeren we enkel in discrete intervallen. Dit is het voornaamste idee in wat men tijdreeksanalyse (*time series analysis*) noemt. Dit omvat vooral statistische methoden om het gedrag van een tijdsafhankelijk systeem te beschrijven, voorspellen en controleren.

Dynamische systemen worden in vele takken van de ingenieurswetenschappen aangewend. Je zal ze dan ook later nog uitgebreider bestuderen in enkele van je verdere cursussen. In deze cursus voorzien we enkel een introductie, om de meerwaarde van eigenwaarden en eigenvectoren te illustreren. We beperken onze analyse dan ook tot eerste-orde lineaire discrete dynamische systemen.

Definitie 9.3 Eerste-Orde Lineaire Discrete Dynamische Systemen

Een **eerste-orde lineair discreet dynamisch systeem** is een dynamisch systeem dat kan voorgesteld worden door een eerste-orde recursieve vergelijking:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A\vec{\boldsymbol{x}}_k\,.$$

Hier beschrijft de vector $\vec{\boldsymbol{x}}_k$ de toestand van de variabelen van het systeem op tijdstip k, $\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ beschrijft de toestand één tijdstip later. Tot slot is $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ de toestand op het begintijdstip, ook wel tijdstip nul genoemd (bvb. de opstartfase van een reactor). De matrix A is de zogenaamde **transformatie-matrix**, die de transities van de variabelen van tijdstip k naar tijdstip $k+1$ weergeeft. We maken dit alles wat concreter met een eerste praktisch voorbeeld.

Voorbeeld 9.7

Elektrische lading is een fysieke eigenschap van materie die ervoor zorgt dat de materie een kracht ondervindt wanneer ze in een elektromagnetisch veld wordt geplaatst. Beschouw een nucleaire reactor, waarin we twee deeltjes beschouwen die doorheen de tijd veranderen van elektrische lading. Elektrische lading wordt uitgedrukt in Coulomb, en kan negatief of positief zijn. Veronderstel dat de twee deeltjes op hetzelfde tijdstip k een elektrische lading Q_k en R_k hebben. Op het begintijdstip, wanneer de nucleaire reactor werd opgestart, hadden de deeltjes ladingen $Q_0 = 2.0$ en $R_0 = 0.0$. Daarnaast mogen we aannemen dat de verandering in lading van deze deeltjes beschreven kan worden door de volgende recursies:

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= (0.5)Q_k - (0.6)R_k \\ R_{k+1} &= (0.75)Q_k + (1.1)R_k\,. \end{aligned}$$

Men kan zien dat de twee vergelijkingen uitgedrukt kunnen worden als een eerste-orde lineair discreet dynamisch systeem, namelijk

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A\vec{\boldsymbol{x}}_k \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} Q_{k+1} \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_k \\ R_k \end{bmatrix} \qquad \text{met} \quad \vec{\boldsymbol{x}}_k = \begin{bmatrix} Q_k \\ R_k \end{bmatrix}.$$

Een eenvoudige matrix-vectorvermenigvuldiging zorgt er voor dat we de lading van de twee deeltjes kunnen berekenen op een willekeurig gekozen tijdstip:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{x}}_0 &= \begin{bmatrix} Q_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \\ \vec{\boldsymbol{x}}_1 &= A\vec{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \\ \vec{\boldsymbol{x}}_2 &= A\vec{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 - 0.6 \times 1.5 \\ 0.75 + 1.1 \times 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 2.4 \end{bmatrix}, \\ \vec{\boldsymbol{x}}_3 &= \ldots. \end{aligned}$$

Meer algemeen kan de toestand op een tijdstip k gevonden worden door de k-de macht van A te vermenigvuldigen met $\vec{\boldsymbol{x}}_0$:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = A^k \vec{\boldsymbol{x}}_0\,.$$

⊠

Uit het vorige voorbeeld kan men afleiden dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ berekenen vrij eenvoudig is. De herhaaldelijke matrix-vectorvermenigvuldiging vereist echter zeer intensief rekenwerk, in het bijzonder wanneer we te maken hebben met zeer grote matrices. Toch kan het rekenwerk binnen de perken gehouden worden als A diagonaliseerbaar is, dus als $A = PDP^{-1}$. Stel meer algemeen dat A een $n \times n$ matrix is. Dan volgt er uit Stelling 9.1 dat A n lineair onafhankelijke eigenvectoren $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$ heeft. Als een gevolg van Stelling 5.5 vormen deze eigenvectoren een basis voor $\mathbb{R}^n$. Elke vector $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ kan daarom geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n\,.$$

De toestand van het systeem op tijdstip 1 en 2 kan dan als volgt gevonden worden:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{x}}_1 &= A\vec{\boldsymbol{x}}_0 = A(c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n) \\ &= c_1A\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2A\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_nA\vec{\boldsymbol{v}}_n \\ &= c_1\,\lambda_1\,\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\,\lambda_2\,\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\,\lambda_n\,\vec{\boldsymbol{v}}_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{x}}_2 &= A\vec{\boldsymbol{x}}_1 = A(c_1\lambda_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\lambda_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\vec{\boldsymbol{v}}_n) \\ &= c_1\lambda_1A\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\lambda_2A\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\lambda_nA\vec{\boldsymbol{v}}_n \\ &= c_1\lambda_1^2\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2\vec{\boldsymbol{v}}_n\,. \end{aligned}$$

Op dezelfde manier bekomt men voor de toestand van het systeem op tijdstip k:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = c_1\lambda_1^k\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{\boldsymbol{v}}_n\,.$$

Deze formule blijkt zeer goed van pas te komen om $\vec{\boldsymbol{x}}_k$ op een efficiënte manier te berekenen en bij het analyseren van het gedrag van het dynamische systeem op lange termijn. In de rest van deze sectie voorzien we enkele voorbeelden die een aantal verschillende soorten gedragingen van een dynamisch systeem illustreren.

Voorbeeld 9.8

Als eerste geval bekijken we een voorbeeld van een dynamisch systeem waarbij de oorspong dienst doet als een zogenaamd **aantrekkingspunt**. Dit betekent dat het dynamische systeem op lange termijn altijd zal convergeren naar een toestand waarbij alle variabelen nul zijn. We beschouwen de volgende transformatiematrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0.80 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix} .$$

We vinden meteen dat 0.8 en 0.64 de eigenwaarden van A zijn en dat de verzamelingen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{en} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

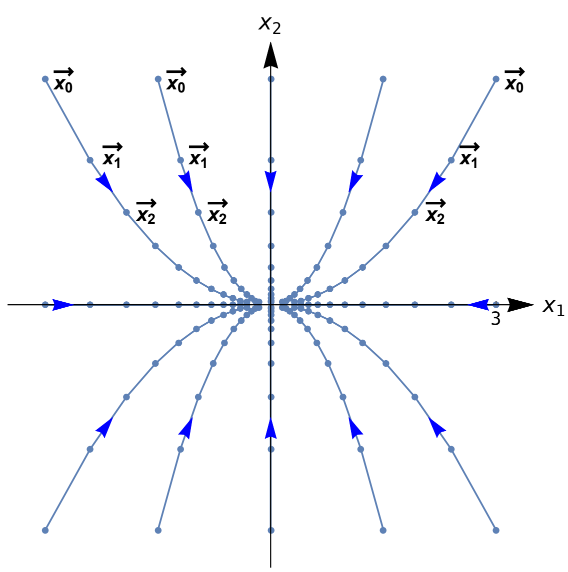
basissen vormen voor de corresponderende eigenruimten. Samen vormen deze twee vectoren een basis voor $\mathbb{R}^2$ en kan men de beginvoorwaarden van het systeem schrijven als

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

waarbij c_1 en c_2 onbekenden zijn. De toestand op tijdstip k kan berekend worden als volgt:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = c_1(0.8)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(0.64)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

De onderstaande grafiek geeft ons een overzicht van de evolutie van het systeem voor verschillende begintoestanden.



Ongeacht wat de beginwaarden voor c_1 en c_2 zijn, convergeert het systeem altijd naar een toestand waarbij beide variabelen nul zijn. Dit is ook exact wat we terugzien in de grafiek. ⊠

Voorbeeld 9.9

Als tweede geval beschouwen we een voorbeeld van een dynamisch systeem waarbij de oorsprong de rol opneemt van een zogenaamd **afstotingspunt**. Dit betekent dat het dynamische systeem op lange termijn zal divergeren naar een toestand waarbij alle variabelen oneindig groot zullen worden. Hiervoor nemen we de volgende transformatiematrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

We zien op het zicht dat de eigenwaarden van A de waarden 1.44 en 1.2 zijn en dat de verzamelingen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{en} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

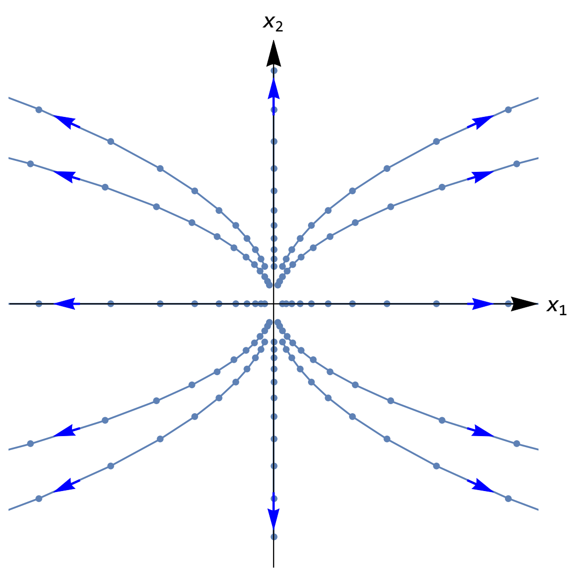
de basissen zijn van de corresponderende eigenruimten. De twee vectoren vormen samen een basis voor $\mathbb{R}^2$. Net als in het vorige voorbeeld kunnen we de beginvoorwaarden herschrijven i.f.v. deze basis:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hieruit kunnen we dan de toestand op tijdstip k berekenen:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = c_1(1.44)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(1.2)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wanneer c_1 en c_2 beide verschillend zijn van nul, zullen de twee variabelen x_1 (het eerste element van $\vec{\boldsymbol{x}}_k$) en x_2 (het tweede element van $\vec{\boldsymbol{x}}_k$) van het syteem divergeren naar oneindig. Dit gebeurt doordat de eigenwaarden groter zijn dan 1. Getallen groter dan 1 worden namelijk alleen maar groter wanneer we ze tot een macht verheffen, en omgekeerd worden getallen tussen 0 en 1 alleen maar kleiner. De volgende grafiek geeft weer hoe het systeem evolueert doorheen de tijd voor verschillende mogelijke begintoestanden.



$\boxtimes$

Voorbeeld 9.10

Als derde voorbeeld stellen we dat de oorsprong een **zadelpunt** zal zijn. Dit betekent dat binnen het dynamische systeem een aantal variabelen naar nul convergeren, terwijl anderen divergeren naar oneindig. We beschouwen hiervoor de volgende transformatiematrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} .$$

We kunnen de eigenwaarden opnieuw op het zicht bepalen. We bekomen 2 en 0.5 als eigenwaarden voor A. De basissen voor de eigenruimten van 2 en 0.5 zijn respectievelijk

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{en} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

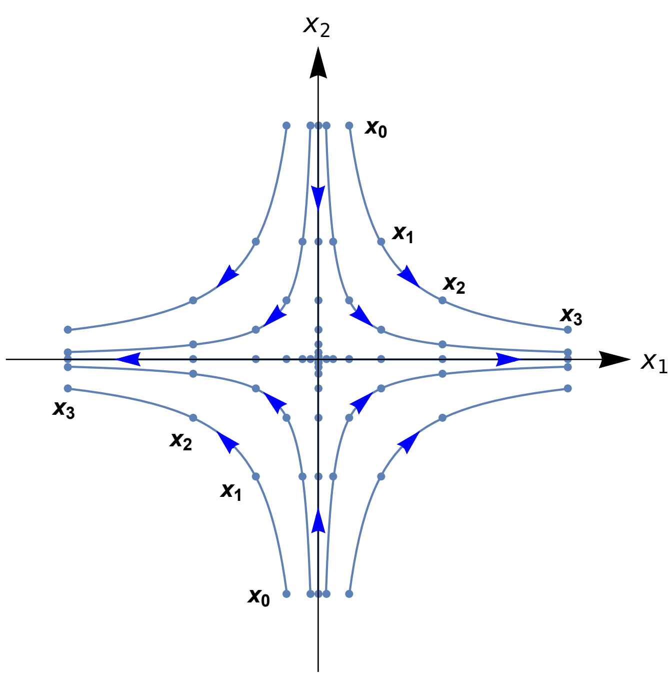
Deze twee vectoren vormen samen een basis voor $\mathbb{R}^2$. De beginvoorwaarden kunnen dan geschreven worden als

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Hieruit leiden we de formule af voor de toestand op tijdstip k:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = c_1(2)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(0.5)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

In dit geval is de eerste eigenwaarde groter dan 1 en de tweede kleiner dan 1. Het gewicht van de eerste eigenvector zal enkel toenemen wanneer k toeneemt, terwijl het gewicht van de tweede enkel zal afnemen. Dit zal ervoor zorgen dat het systeem evolueert naar een toestand waarbij de eerste variabele x_1 enkel maar verder naar oneindig zal opschuiven (naar positieve of negatieve kant, afhankelijk van c_1), terwijl variabele x_2 steeds dichter naar nul zal naderen. De volgende grafiek geeft goed weer hoe we deze situatie het best voorstellen. Ook hier zien we dat de begintoestand het gedrag van het systeem grotendeels zal bepalen.



⊠

Tot dusver hebben we enkel diagonale 2×2 matrices geanalyseerd. Voor dergelijke matrices is de analyse en de meetkundige interpretatie vrij eenvoudig. Als een gevolg van Stelling 8.3 weten we dat de eigenwaarden van een diagonaalmatrix de elementen op de diagonaal zijn. Daarom vinden we altijd

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{en} \qquad \left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

als basissen voor de bijhorende eigenruimten. De analyse is ietwat gecompliceerder als de matrix geen diagonaalmatrix is. In dat geval zal Stelling 9.1 bijzonder goed van pas komen.

Voorbeeld 9.11
Stel dat we het gedrag van een dynamisch systeem met transformatiematrix

$$A = \begin{bmatrix}1.25 & -0.75\\-0.75 & 1.25\end{bmatrix}$$

op lange termijn willen onderzoeken. De eigenwaarden van de matrix A zijn 2 en 0.5. Aangezien A niet langer een diagonaalmatrix is, zullen we andere basissen vinden voor de eigenruimten. We vinden de basissen

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{en} \qquad \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

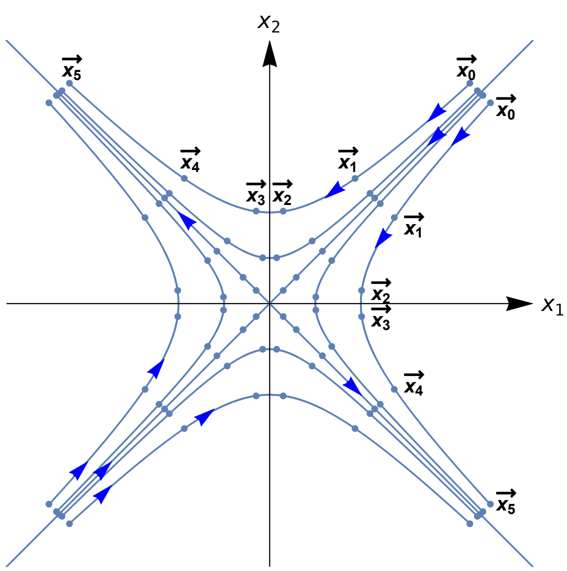
voor de eigenruimten die behoren bij respectievelijk eigenwaarden 2 en 0.5. We drukken eender welke begintoestand $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ uit als een lineaire combinatie van deze basisvectoren:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_0 = c_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Dit impliceert dat de toestand van het systeem op tijdstip k geschreven kan worden als

$$\vec{\boldsymbol{x}}_k = c_1 2^k\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + c_2(0.5)^k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Op de grafiek hieronder wordt het systeem en diens evolutie voor veranderende k weergegeven. Voor verschillende begintoestanden zijn er weer sterke verschillen in gedrag.



Om meer inzicht te krijgen in dit gedrag bemerken we eerst dat A diagonaliseerbaar is:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\0.5 & 0.5\end{bmatrix}.$$

Hierdoor kan het vermenigvuldigen van een vector met A uitgevoerd worden als een vermenigvuldiging met drie matrices: eerst vermenigvuldigingen we met P^{-1}, daarna met D en daarna nog eens met P. P^{-1} is een inverteerbare matrix en onder meer daardoor kan het resultaat gezien worden als een verandering van basis. Eigenlijk gaan we over op een nieuwe vector voor de variabelen, $\vec{\boldsymbol{y}}_k = P^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}_k$. Daarnaast geldt er dat

$$\vec{\boldsymbol{y}}_{k+1} = P^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = P^{-1}(PDP^{-1})\vec{\boldsymbol{x}}_k = D\vec{\boldsymbol{y}}_k\,.$$

Om hier goed het contrast te kunnen belichten, hebben we het voorbeeld zo opgesteld dat D identiek is aan A uit Voorbeeld 9.10. Dat is ook de reden waarom de grafieken zo'n grote gelijkenis vertonen. In de formele zin voeren we een basisverandering door als we vermenigvuldigen met P^{-1}, gevolgd door een transitie in de richting van de eigenvector bij eigenwaarde 2. Tot slot transformen we het probleem terug naar de originele ruimte door te vermenigvuldigingen met de inverse van P^{-1}, wat natuurlijk P is. De transformaties van dit voorbeeld en Voorbeeld 9.10 induceren dus in feite dezelfde transformatie, want de eigenwaarden zijn dezelfde, maar de transformatie wordt toegepast op verschillende verzamelingen van basisvectoren. Het diagonaliseren heeft dus als voordeel dat het getransformeerde probleem veel gemakkelijker te bestuderen is. ⊠

Voorbeeld 9.8, Voorbeeld 9.9, Voorbeeld 9.10 en Voorbeeld 9.11 beschrijven enkele van de meest frequente situaties die men tegenkomt bij het analyseren van dynamische systemen met twee variabelen. Deze fenomenen kunnen op natuurlijke wijze uitgebreid worden naar systemen van hogere dimensie, maar het wordt moeilijker of zelfs onmogelijk om dit op een intuïtieve manier te visualiseren. Daarnaast is er een belangrijke situatie die we niet hebben beschreven, nl. wanneer A complexe eigenwaarden heeft. In het volgende hoofdstuk zullen we eerst een nieuw stuk theorie aansnijden vooraleer we deze interessante situatie van naderbij zullen bekijken.

Sectie 9.4 Voorbereiding Werkcollege

1. Bereken A^8, gegeven dat $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Stel dat $A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, en $\vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Veronderstel dat je al weet dat $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ eigenvectoren zijn van A. Gebruik deze informatie om A te diagonaliseren.

3. Stel dat A een 4×4 matrix is met eigenwaarden 5, 3, en -2. Veronderstel verder dat je al weet dat de eigenruimte van $\lambda = 3$ twee-dimensionaal is. Heb je hiermee voldoende informatie om A te weten of A diagonaliseerbaar is?

4. De matrix A heeft eigenwaarden 1, 2/3, en 1/3 met bijhorende eigenvectoren $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3$:

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Bepaal de algemene oplossing voor de vergelijking $\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = A\vec{\boldsymbol{x}}_k$, in functie van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_3$, als $\vec{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$.

5. Wat gebeurt er met de rij $\{\vec{\boldsymbol{x}}_k\}$ uit de vorige oefening als $k \to +\infty$?

Sectie 9.5 Oefeningen

Diagonaliseerbaarheid

1. Zijn de onderstaande matrices diagonaliseerbaar?

(a) $A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

2. Ga na of de matrices uit oefening 3 van hoofdstuk 8 diagonaliseerbaar zijn. Bepaal indien mogelijk de matrices P en D zodanig dat $A = PDP^{-1}$.

Macht van een matrix

3. Beschouw de onderstaande matrices P en D en stel $A = PDP^{-1}$. Bereken A^4.

(a) $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. Beschouw van de onderstaande matrices de factorisatie $A = PDP^{-1}$ en bereken hieruit A^n, met $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-b) & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. Beschouw de matrix A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{met} \quad m \in \mathbb{R}.$$

(a) Voor welke waarde(n) van m is A diagonaliseerbaar?

(b) Diagonaliseer de matrix A met de in (a) gevonden waarde(n) van m en geef de matrices P en D zodat $A = PDP^{-1}$.

(c) Bepaal A^5.

6. Beschouw de onderstaande matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van deze matrix A.

(b) Bepaal A^{25} en A^{50}.

Discrete dynamische systemen

7. Stel dat een 3×3 matrix A de eigenwaarden 3, 4/5 en 3/5 heeft, met corresponderende eigenvectoren
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$
en veronderstel dat
$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
Bepaal de oplossing van de vergelijking $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}} = A\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}$ voor de gegeven $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}$ en beschrijf wat er gebeurt als $k \to +\infty$.

8. We beschouwen een matrix A en vector $\vec{\boldsymbol{x}}_0$:
$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.7 \end{bmatrix}.$$
Gegeven is dat 0.5 en 0.2 eigenwaarden zijn van A. Bepaal de oplossing van het dynamisch systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}} = A\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}$ voor de gegeven $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}$ en beschrijf wat er gebeurt als $k \to +\infty$.

9. Classificeer de oorsprong als een aantrekkingspunt, afstotingspunt of zadelpunt van het dynamisch systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}} = A\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}$. Maak een figuur voor de opgegeven $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.20 \end{bmatrix}$ met $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$ met $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}$ met $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$

10. Classificeer de oorsprong als een aantrekkingspunt, een afstotingspunt of een zadelpunt van het dynamisch systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k+1}} = A\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}$. Bepaal de richtingen van grootste aantrekking en/of afstoting.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1.7 & -0.3 \\ -1.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.3 & 1.1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 \\ -0.4 & 1.3 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 \\ -0.3 & 1.4 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ -0.4 & 1.5 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$

11. In een afgebakend bebost gebied leven vossen en konijnen. Het aantal vossen na k maanden is gelijk aan F_k en het aantal konijnen is gelijk aan R_k. Na $k+1$ maanden wordt het aantal vossen en konijnen gegeven door
$$\begin{cases} F_{k+1} &= 0.8\,F_k + 0.1\,R_k \\ R_{k+1} &= -p\,F_k + 1.1\,R_k \end{cases}$$
Wat is de evolutie van het bovenstaande dynamisch systeem als $p = 0.2$? Hoe ziet de vossen- en konijnenpopulatie er uit naarmate de tijd verstrijkt?

12. We beschouwen een regio waarbij het aantal uilen en ratten per maand wordt bestudeerd. Het volgend dynamisch systeem beschrijft de evolutie in aantallen van beide populaties. Hierbij is O_k het aantal uilen in de regio en R_k het aantal ratten (per 1000) na k maanden.

$$\begin{cases} O_{k+1} &= 0.5\, O_k + 0.4\, R_k \\ R_{k+1} &= -p\, O_k + 1.1\, R_k \end{cases}$$

Bepaal de evolutie van het bovenstaand dynamisch systeem als $p = 0.125$ (predatieparameter).

(a) Wat zal, bij benadering, op lange termijn de verhouding van het aantal uilen t.o.v. het aantal ratten zijn?

(b) Wat zou er gebeuren met het systeem als een bepaald aspect van het model (zoals geboortesnelheid) licht zou gewijzigd worden? Het is hierbij nuttig om de eigenwaarden van A te bekijken.

13. In bepaalde bossen jagen de uilen vooral op eekhoorns. Veronderstel voor deze twee populaties de predator-prooi matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -p & 1.2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A in functie van p.

(b) Wanneer zullen beide populaties aangroeien? Wanneer zullen ze uitsterven?

(c) Bepaal een waarde voor p waarvoor beide populaties een constante grootte hebben. Wat zijn dan de relatieve populatiegroottes?

(d) Stel $p = 0.325$. Bepaal de verhouding van de uilen tot de eekhoorns op lange termijn.