## Voorkennis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bereken

$$\dim(\mathcal{N}(A))$$

ROOD: 0 GROEN: 1 BLAUW: 2 GEEL: 3

Oplossing:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim(\mathcal{N}(A)) = 1$$



## Voorkennis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bereken

$$\det(A)$$

ROOD: -4 GROEN: 0 BLAUW: 2 GEEL: 6

Oplossing: $\det(A) = 0$

Is $A$ inverteerbaar ?
ROOD: Nee. GROEN: Ja.

Hoeveel oplossingen heeft $A\vec{x} = \vec{\mathbf{0}}$?
ROOD: 0 GROEN: 1 BLAUW: $\infty$

# Hoofdstuk 8: Eigenwaarden



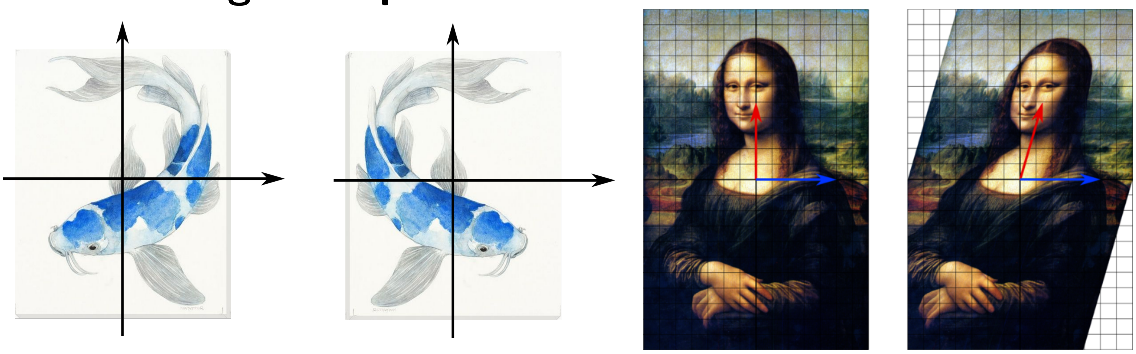
# Sectie 8.1: Eigenwaarden en eigenvectoren

## Definitie 8.1

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}$$

met $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{C}^n_{\mathbf{0}}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Meetkundige interpretatie - verband met transformaties**



## Eigenwaarden berekenen

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}} \quad \Leftrightarrow \quad A\vec{\boldsymbol{x}} - \lambda I_n\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_n)\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

### Stelling 8.1: Karakteristieke vergelijking

$\lambda$ is een eigenwaarde van $A$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $|A - \lambda I_n| = 0$

### Definitie 8.2: Karakteristieke veelterm

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$$

**Voorbeeld**

Zoek de eigenwaarden van $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.



### Oefening

Zoek de eigenwaarden van $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tip: Los $p_B(\lambda) = |B - \lambda I_3| = 0$ op.

## Eigenvectoren berekenen

### Definitie 8.3: Eigenruimte horende bij $\lambda$

$\mathcal{E}_A(\lambda)$ is de verzameling van alle bijhorende eigenvectoren, samen met de nulvector.

$$\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}_A(\lambda) \Leftrightarrow A\vec{\boldsymbol{x}} = \lambda\vec{\boldsymbol{x}}$$

$$\Leftrightarrow \ (A - \lambda I_n)\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\Leftrightarrow \ \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$$

### Stelling 8.2

$$\mathcal{E}_A(\lambda) = \mathcal{N}(A - \lambda I_n)$$

**Voorbeeld** Bepaal de eigenvectoren van $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$



### Oefening

Zoek de eigenvectoren van $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Schrijf dit als de span van een basis.

- : $\lambda_1 = -1$
- : $\lambda_2 = 2$

## Vraag

Hoeveel verschillende eigenwaarden heeft een $6 \times 6$ matrix als die $\lambda^6 + \lambda^4 = 0$ als karakteristieke vergelijking heeft?

ROOD: 1 GROEN: 2 BLAUW: 3 GEEL: 6



## Definitie 8.4: Algebraïsche multipliciteit

$\alpha_A(\lambda)$ is het aantal keer dat $\lambda$ als wortel voorkomt in $p_A(\lambda)$.

## Definitie 8.5: Meetkundige multipliciteit

$\gamma_A(\lambda)$ is de dimensie van $\mathcal{E}_A(\lambda)$.

**Voorbeeld** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

## Oefening

Bepaal de algebraïsche een meetkundige multipliciteiten van de eigenwaarden van $B$. We weten al dat
$p_B(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

$$\mathcal{E}_B(-1) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\} \quad \text{en} \quad \mathcal{E}_B(2) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$



## Verband

Is een eigenruimte altijd een deelruimte?

# Sectie 8.2: Eigenschappen van eigenwaarden

## WAAR of NIET

- De eigenwaarden van een driehoeksmatrix zijn de elementen op de diagonaal.
- Eén van de eigenwaarden van een matrix $A$ is gelijk aan 0.
  - Dan is $A$ inverteerbaar.
  - Dan is $T : T(\vec{x}) = A\vec{x}$ surjectief.
  - Dan zijn de kolommen van $A$ lineair afhankelijk.
  - Dan is $T : T(\vec{x}) = A\vec{x}$ injectief.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$\alpha_A(1) = 2, \gamma_A(1) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_B(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\alpha_B(-1) = 2, \gamma_B(-1) = 2$$

$$\alpha_B(2) = 1, \gamma_B(2) = 1$$

## Stelling 8.6

Veronderstel dat $A$ een vierkante matrix is van grootte $n$. Dan heeft de karakteristieke veelterm van $A$ graad $n$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$\alpha_A(1) = 2, \gamma_A(1) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_B(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\alpha_B(-1) = 2, \gamma_B(-1) = 2$$

$$\alpha_B(2) = 1, \gamma_B(2) = 1$$

## Stelling 8.7

Veronderstel dat $A$ een vierkante matrix is van grootte $n$ met verschillende eigenwaarden $\lambda_, \lambda_2, \cdots \lambda_k$. Dan geldt

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n.$$

Zie ook Hoofdstelling van de Algebra.



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$\alpha_A(1) = 2, \gamma_A(1) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_B(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\alpha_B(-1) = 2, \gamma_B(-1) = 2$$

$$\alpha_B(2) = 1, \gamma_B(2) = 1$$

## Stelling 8.8

Veronderstel dat $A$ een vierkante matrix is van grootte $n$ en $\lambda$ een eigenwaarde is. Dan geldt

$$1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \alpha_A(\lambda) \leq n$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$\alpha_A(1) = 2, \gamma_A(1) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_B(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\alpha_B(-1) = 2, \gamma_B(-1) = 2$$

$$\alpha_B(2) = 1, \gamma_B(2) = 1$$

## Stelling 8.9

Veronderstel dat $A$ een vierkante matrix is van grootte $n$. Dan kan $A$ niet meer dan $n$ verschillende eigenwaarden hebben.