Voorkennis

Wat is de geometrische multipliciteit $\gamma_A(\lambda)$ van een eigenwaarde van de matrix A?

- ROOD Het aantal keren dat λ een wortel is van de karakteristieke vergelijking.
- GROEN De dimensie van de eigenruimte horende bij λ.
- BLAUW Het aantal vrije variabelen in het stelsel $(A - \lambda I_n)\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$

Hoofdstuk 9: Diagonalisering

Sectie 9.1: Diagonalisering

Definitie 9.1: Diagonaalmatrix

Veronderstel dat D een vierkante matrix is. Dan is D een **diagonaalmatrix** als $[D]_{ij} = 0$ voor $i \neq j$.

Voorbeeld

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

Definitie 9.2: Diagonaliseerbare matrix

Een $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar als er een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P bestaan zodat $A = PDP^{-1}$.

Hoe?

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{v_1}} & \vec{\boldsymbol{v_2}} & \cdots & \vec{\boldsymbol{v_n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{v_1}} & \vec{\boldsymbol{v_2}} & \cdots & \vec{\boldsymbol{v_n}} \end{bmatrix}^{-1}$$

met $\vec{\boldsymbol{v_i}}$ lineair onafhankelijke eigenvectoren horende bij λ_i.

$\rightarrow$ Stelling 9.1.

Voorbeeld 9.1

Gegeven $A = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
met

$$\mathcal{E}_A(-1) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{E}_A(1) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\mathcal{E}_A(2) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A \quad = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

<u>Controle:</u> Gemakkelijker is $AP = PD$.

Voorbeeld 9.2

Gegeven $B = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}$
met

$$\mathcal{E}_A(-1) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \mathcal{E}_A(3) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A \quad = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1}$$

<u>Opmerking:</u> Andere volgorde kolommen in cursus.

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenwaarde: $\lambda = 1$

Eigenruimte: $\mathcal{E}_A(1) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Stelling 9.1: De diagonaliseringsstelling

Een $n \times n$ matrix A is diagonaliseerbaar d.m.v. $A = PDP^{-1}$ als en slechts er een lineair onafhankelijke verzameling bestaat die n eigenvectoren van A bevat.

Oefening

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$

Eigenruimtes:

$\mathcal{E}_B(-1) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathcal{E}_B(2) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Is B diagonaliseerbaar? Ja of nee.

Hoe diagonaliseren we B?

Stelling 8.4

Eigenvectoren horende bij verschillende eigenwaarden zijn lineair onafhankelijk.

$$\Downarrow$$

Stelling 9.3

n verschillende eigenwaarden hebben impliceert diagonaliseerbaarheid.

Stelling 8.7

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_A(\lambda_i) = n$$

$$\Downarrow$$

Stelling 9.2

A is diagonaliseerbaar als en slechts als $\gamma_A(\lambda_i) = \alpha_A(\lambda_i)$ voor alle λ_i.

Sectie 9.2: Machten van matrices

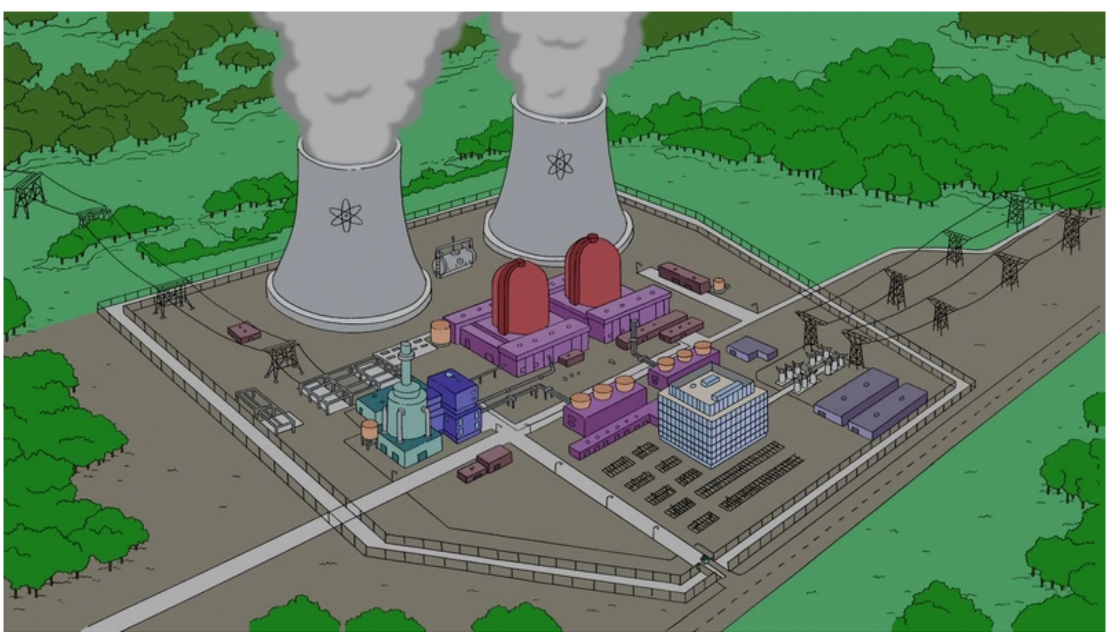
Macht van een diagonaalmatrix

Stel dat A diagonaliseerbaar is:

$$A = PDP^{-1}$$

Bereken A^n met $n \in \mathbb{N}_0$.

Sectie 9.3: Discrete dynamische systemen



Q_k: lading van deeltje 1 op tijdstip k
R_k: lading van deeltje 2 op tijdstip k

Begintoestand

$$Q_0 = 2.0$$
$$R_0 = 0.0$$

Fysische wetten

$$\begin{cases} Q_{k+1} = & 0.5Q_k - 0.6R_k \\ R_{k+1} = & 0.75Q_k + 1.1R_k \end{cases}$$

Matrixvorm

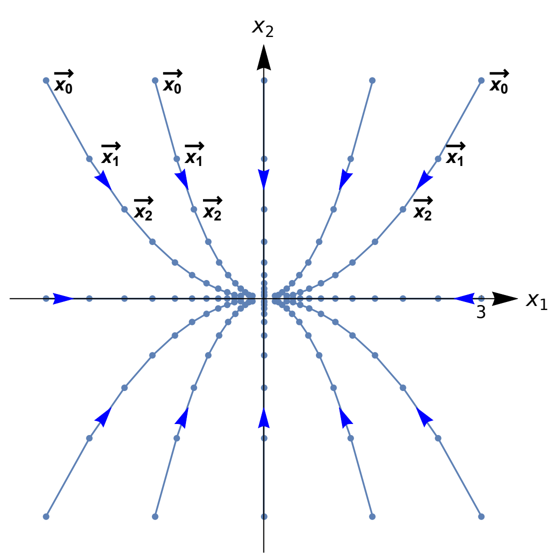
Evolutie door de tijd

Wat als A diagonaliseerbaar is?
$\rightarrow$ Gebruik eigenwaarden en -vectoren.

Voorbeeld 9.8

Beschrijf het dynamische systeem $\vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix} \vec{x}_k$.

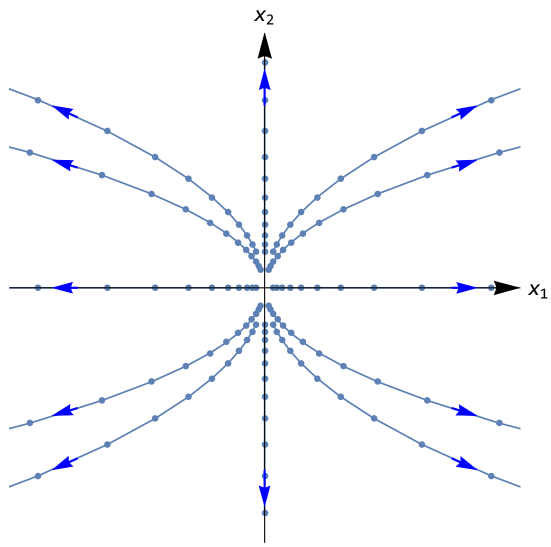
Gegeven $\lambda_1 = 0.8, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 0.64, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Voorbeeld 9.9

Beschrijf het dynamische systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_k$

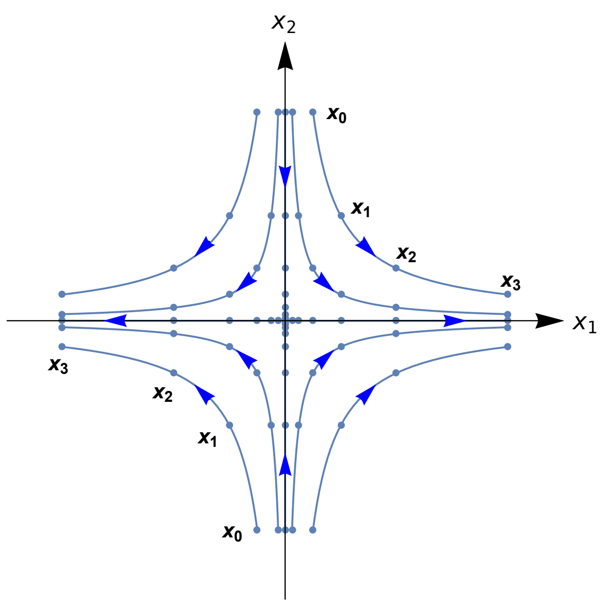
Gegeven $\lambda_1 = 1.44, \vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 1.2, \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Voorbeeld 9.10

Beschrijf het dynamische systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_k$

Gegeven $\lambda_1 = 2, \vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 0.5, \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



Voorkennis: veranderen van basis

$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ t.o.v. de alternatieve basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Verband

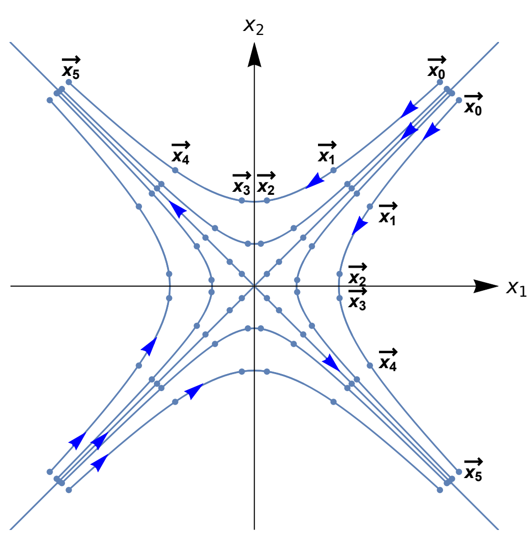
$$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$$

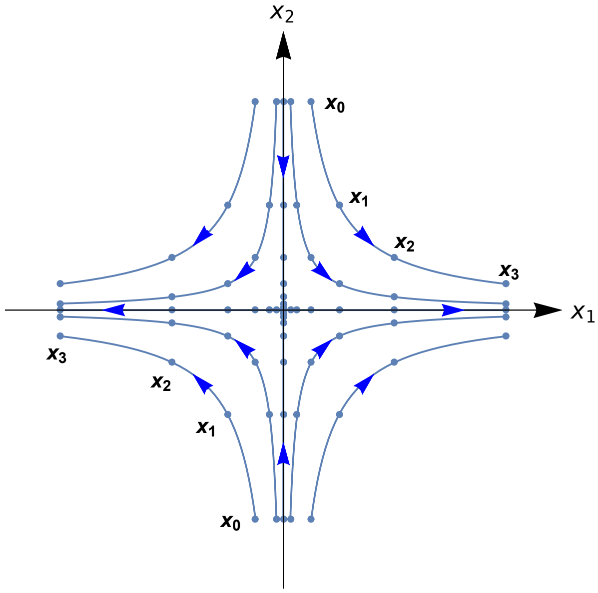
(Zie hoofdstuk 5.)

Voorbeeld 9.11

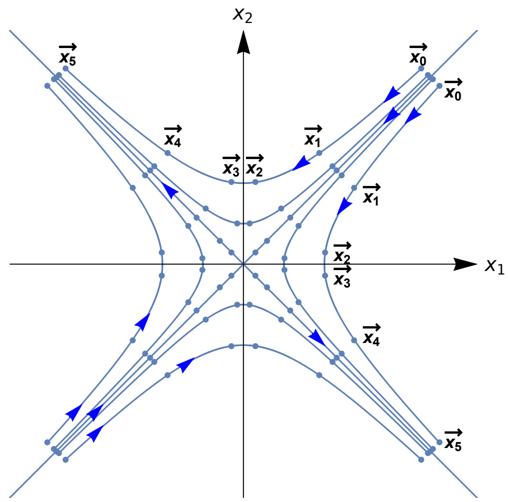
Beschrijf het dynamische systeem $\vec{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{bmatrix} \vec{x}_k$

Gegeven $\lambda_1 = 2, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en $\lambda_2 = 0.5, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$





Vb. 9.10



Vb. 9.11

Vraag

In een **statisch systeem** blijft elk punt $\vec{x}$ voor altijd op dezelfde plaats.

- Hoe ziet de transformatiematrix eruit?
- Wat zijn de bijhorende eigenwaarden en eigenvectoren?

Vraag voor thuis

Beschrijf het dynamische systeem $\vec{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}_k$