Lineaire Algebra

1ste Bachelor
Industrieel Ingenieur

Editie
Versie 2024-2025
19 september 2025.

Uitgever
Willem Waegeman, An Schelfaut, Elien Van de Walle, Demir Ali Köse en Joris Mattheijssens
Vakgroep Data Analyse en Wiskundige Modellering
Universiteit Gent
Coupure links 653
9000 Gent
België

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave **5**

Hoofdstuk 1 Stelsels van Lineaire Vergelijkingen **1**
1.1 Wat is Lineaire Algebra? 1
1.2 Oplossen van Stelsels van Lineaire Vergelijkingen 2
1.2.1 Mogelijkheden voor Oplossingsverzamelingen 3
1.2.2 Equivalente stelsels en bewerkingen op vergelijkingen 5
1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm 8
1.3.1 De Uitgebreide Matrix 8
1.3.2 Rijbewerkingen 11
1.3.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm 13
1.3.4 Echelonvorm 19
1.3.5 Oplosbare Stelsels 19
1.4 Netwerken Analyseren 23
1.4.1 Nodige Concepten uit de Fysica 24
1.4.2 Vertakkingen en Kringstromen 27
1.4.3 Berekening van Vertakkingsstromen in Elektrische Netwerken 28
1.4.4 Berekening van Kringstromen in Elektrische Netwerken 30
1.5 Voorbereiding Werkcollege 32
1.6 Oefeningen 33

Hoofdstuk 2 Vector- en Matrixvoorstelling voor Lineaire Stelsels **38**
2.1 Vectorbewerkingen en Vectorvoorstellingen 38
2.1.1 Eigenschappen van Vectoren 41
2.1.2 Lineaire Combinaties 43
2.1.3 Parametrische Vectorvorm voor Oplossingsverzamelingen 46
2.2 Span van een verzameling 48
2.3 Matrixvoorstellingen voor Lineaire Stelsels 55
2.4 Homogene Stelsels Vergelijkingen 58
2.5 Lineaire Afhankelijkheid 61
2.6 Chemische Vergelijkingen Balanceren 63
2.7 Voorbereiding Werkcollege 65
2.8 Oefeningen 65

Hoofdstuk 3 Matrixberekeningen **72**
3.1 Bewerkingen op Matrices 72
3.2 Matrixvermenigvuldiging 76
3.3 Inverse van een Matrix 81
3.3.1 De Inverse van een Matrix Berekenen 83
3.3.2 Eigenschappen van Matrixinverses 87

3.4 Input-Output Analyse 91
3.5 Elementaire Matrices 93
3.6 Voorbereiding Werkcollege 95
3.7 Oefeningen 95

Hoofdstuk 4 Lineaire Transformaties **100**
4.1 Lineaire Transformaties 100
4.1.1 Lineaire Transformatiediagrammen 103
4.1.2 Matrices en Lineaire Transformaties 104
4.2 Surjectieve Lineaire Transformaties 109
4.3 Injectieve Lineaire Transformaties 112
4.4 Bijectieve Lineaire Transformaties 115
4.5 Voorbereiding Werkcollege 116
4.6 Oefeningen 117

Hoofdstuk 5 Deelruimten van $\mathbb{R}^m$ **120**
5.1 Deelruimten van $\mathbb{R}^m$ 120
5.2 Basissen 123
5.2.1 Voorbeelden van Basissen 123
5.2.2 Vectoren elimineren 124
5.2.3 Basissen en Inverteerbare Matrices 128
5.2.4 Dimensie van een Deelruimte 128
5.3 De Nulruimte van een Matrix 129
5.4 Coördinatenstelsels en Basisverandering 133
5.5 Voorbereiding Werkcollege 136
5.6 Oefeningen 137

Hoofdstuk 6 Determinanten **142**
6.1 Determinant van een Matrix 142
6.1.1 Determinanten Berekenen 144
6.2 Eigenschappen van Determinanten van Matrices 146
6.2.1 Determinanten en Rijbewerkingen 147
6.2.2 Determinanten, Inverteerbare Matrices, Matrixvermenigvuldiging 149
6.2.3 Som van Determinanten 151
6.3 Vectorproduct 152
6.4 Voorbereiding Werkcollege 154
6.5 Oefeningen 154

Hoofdstuk 7 Complexe Getallen **158**
7.1 Bewerkingen met Complexe Getallen 158
7.1.1 Complex Toegevoegde van een Complex Getal 160
7.1.2 Goniometrische Vorm van Complexe Getallen 162
7.1.3 Machten en n-de Machtswortels van Complexe Getallen 164
7.2 Veeltermenvergelijkingen Oplossen 168
7.2.1 Veeltermvergelijkingen van Graad Twee 169
7.2.2 Veeltermvergelijkingen van een Graad Hoger Dan Twee 170
7.3 Voorbereiding Werkcollege 174
7.4 Oefeningen 175

Hoofdstuk 8 Eigenwaarden **178**
8.1 Eigenwaarden en Eigenvectoren 178
8.1.1 Eigenwaarden en Eigenvectoren Berekenen 180
8.1.2 Voorbeelden van het Berekenen van Eigenwaarden en Eigenvectoren 183
8.2 Eigenschappen van Eigenwaarden en Eigenvectoren 188
8.3 Voorbereiding Werkcollege 190
8.4 Oefeningen 191

Hoofdstuk 9 Diagonalisatie van Vierkante Matrices **193**
9.1 Diagonalisatie 193
9.2 Machten van Vierkante Matrices 198
9.3 Discrete Dynamische Systemen 200
9.4 Voorbereiding Werkcollege 206
9.5 Oefeningen 207

Hoofdstuk 10 Complexe Eigenwaarden **210**
10.1 Rekenen met Complexe Vectoren and Matrices 210
10.2 Complexe Eigenwaarden Berekenen 212
10.3 Discrete Dynamische Systemen Herbekeken 215
10.4 Voorbereiding Werkcollege 222
10.5 Oefeningen 223

Appendix A Aanvullende Informatie **224**
A.1 Oplossingen Voorbereiding Werkcollege 224
A.1.1 Hoofdstuk 1 224
A.1.2 Hoofdstuk 2 225
A.1.3 Hoofdstuk 3 227
A.1.4 Hoofdstuk 4 227
A.1.5 Hoofdstuk 5 228
A.1.6 Hoofdstuk 6 229
A.1.7 Hoofdstuk 7 230
A.1.8 Hoofdstuk 8 230
A.1.9 Hoofdstuk 9 231
A.1.10 Hoofdstuk 10 232
A.2 Oplossingen Oefeningen 233
A.2.1 Hoofdstuk 1 233
A.2.2 Hoofdstuk 2 238
A.2.3 Hoofdstuk 3 242
A.2.4 Hoofdstuk 4 244
A.2.5 Hoofdstuk 5 246
A.2.6 Hoofdstuk 6 251
A.2.7 Hoofdstuk 7 254
A.2.8 Hoofdstuk 8 257
A.2.9 Hoofdstuk 9 259
A.2.10 Hoofdstuk 10 261
A.3 Verzamelingen 263
A.3.1 Kardinaliteit van een Verzameling 265
A.3.2 Bewerkingen voor Verzamelingen 265

Hoofdstuk 1
Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

Als men over lineaire algebra spreekt, dan denken velen spontaan aan het oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen. In het eerste hoofdstuk besteden we dan ook uitgebreid aandacht aan dit topic. De technieken die we bespreken zullen vaak gebruikt worden in latere hoofdstukken, dus lees dit hoofdstuk aandachtig en zorg ervoor dat je alle concepten goed begrijpt.

Sectie 1.1 Wat is Lineaire Algebra?

De inhoud van het vak lineaire algebra kan verklaard worden door de twee begrippen apart te ontleden: “lineair” is een term die je tegen het einde van de cursus beter zal appreciëren. In zekere zin is die appreciatie één van de hoofddoelen van deze cursus. Voor nu volstaat het om “lineair” te zien als een manier om te zeggen dat iets “recht” is, of “plat”. Neem bijvoorbeeld het xy-vlak. Je bent waarschijnlijk gewoon om een rechte te beschrijven als een verzameling oplossingen voor een vergelijking van de vorm $y = mx + b$, met m de helling en b de verschuiving in de y-richting, twee constanten die de rechte bepalen. In multivariate calculus beschouwen we ook vlakken. In een driedimensionale ruimte, waar coördinaten beschreven worden door een trio (x, y, z), kan een vlak gezien worden als een verzameling van oplossingen voor vergelijkingen van de vorm $ax + by + cz = d$, met a, b, c en d constanten die het vlak bepalen. In drie dimensies zien we een vlak als “plat”, en rechten als “recht”. In multivariate calculus heb je gezien hoe een rechte een verzameling van punten is die voldoet aan vergelijkingen zoals $x = 3t - 4$, $y = -7t + 2$, $z = 9t$, waar t een parameter is die eender welke waarde kan aannemen.

Een andere manier om dit begrip van “vlakheid” te beschouwen is door op te merken dat de verzamelingen punten die we hierboven hebben beschreven oplossingen zijn van vergelijkingen van een relatief gemakkelijke vorm. In deze vergelijkingen komen enkel optelling en vermenigvuldiging aan bod. Soms zal er een aftrekking of een deling aan bod komen, maar doorgaans zullen de eerste twee bewerkingen volstaan. Hieronder geven we enkele voorbeelden van typische vergelijkingen die aan bod zullen komen in de volgende secties:

$$2x + 3y - 4z = 13 \qquad 4x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \qquad 9a - 2b + 7c + 2d = -7$$

Wat we niet zullen behandelen zijn vergelijkingen zoals

$$xy + 5yz = 13 \qquad x_1 + x_2^3/x_4 - x_3x_4x_5^2 = 0 \qquad \tan(ab) + \log(c - d) = -7.$$

De enige uitzondering is dat we occasioneel een vierkantswortel nodig zullen hebben.

De korte beschouwing van hierboven over rechten en vlakken leert ons dat lineaire algebra inherent zeer meetkundig is opgebouwd. Voorbeelden in twee of drie dimensies zijn zeer nuttige manieren om inzicht te verwerven in de belangrijke concepten die aan bod zullen komen in deze cursus. De sterkte van lineaire algebra ligt echter in de mogelijkheid te blijven werken met “rechte” of “platte” objecten in meer dan drie dimensies, zonder dat we ons erg druk moeten maken over het visualiseren van dergelijke situaties. Alhoewel onze intuïtie erg gebaseerd is op voorbeelden in twee of drie dimensies, houden we toch vast aan een zuiver algebraïsche benadering van het onderwerp, waar de meetkunde op de achtergrond staat. Anderen kiezen ervoor om deze prioriteiten om te draaien, wat eveneens tot een zeer nuttige cursus leidt, maar voor deze cursus wordt de voorkeur gegeven aan de algebraïsche aanpak.

Sectie 1.2 Oplossen van Stelsels van Lineaire Vergelijkingen

Doorheen de tekst zullen we de gewoonte aannemen om wiskundige concepten formeel te introduceren in de vorm van definities en stellingen. We vliegen er direct in met een eerste definitie.

Definitie 1.1 Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

Een **stelsel met m lineaire vergelijkingen** is een verzameling van m vergelijkingen in de variabelen x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_n$ van de vorm

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

waarbij a_{ij}, b_i en x_j waarden kunnen aannemen uit de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$.

Definitie 1.2 Oplossing van een Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

Een **oplossing** van een stelsel van lineaire vergelijkingen van n variabelen, x_1, x_2, x_3, $\ldots$, x_n (zoals het stelsel gegeven in Definitie 1.1), is een geordende lijst van n reële getallen, s_1, s_2, s_3, $\ldots$, s_n zodat, wanneer we x_1 door s_1 substitueren, x_2 door s_2, x_3 door s_3, $\ldots$, x_n door s_n, het linkerlid gelijk is aan het rechterlid voor elke vergelijking van het stelsel. Met andere woorden, na substitutie is elke vergelijking tegelijkertijd geldig.

De gebruikelijke manier om een oplossing neer te schrijven is in de vorm $x_1 = 12$, $x_2 = -7$, $x_3 = 2$, wat betekent dat $s_1 = 12$, $s_2 = -7$, $s_3 = 2$ volgens de notatie van Definitie 1.2. Om *alle* mogelijke oplossingen van een stelsel van lineaire vergelijkingen te beschouwen, definiëren we nu de verzameling van alle oplossingen.

Definitie 1.3 Oplossingsverzameling van een Stelsel van Lineaire Vergelijkingen

De **oplossingsverzameling** van een lineair stelsel vergelijkingen is de verzameling die elke oplossing van het stelsel bevat, en niets meer.

Merk op dat een oplossingsverzameling oneindig groot kan zijn, of dat er geen oplossingen voor het stelsel kunnen zijn. In dit laatste geval schrijven we de oplossingsverzameling als de ledige verzameling $\varnothing = \{\}$. Hieronder geven we een voorbeeld van de notaties geïntroduceerd in Definitie 1.1 en de notie van een oplossing (Definitie 1.2).

Voorbeeld 1.1
Gegeven is het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1. \end{aligned}$$

We hebben $n = 4$ variabelen en $m = 3$ vergelijkingen. Daarnaast hebben we

$$\begin{array}{lllll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 0 & a_{14} = 1 & b_1 = 7 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 1 & a_{23} = 1 & a_{24} = -1 & b_2 = 3 \\ a_{31} = 3 & a_{32} = 1 & a_{33} = 5 & a_{34} = -7 & b_3 = 1. \end{array}$$

Controleer dat $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ een oplossing is (Definitie 1.2), maar niet de enige oplossing! Zo is $x_1 = -12$, $x_2 = 11$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$ bijvoorbeeld ook een oplossing, naast nog andere mogelijkheden. De oplossingsverzameling bevat daarom al minstens twee elementen. ⊠

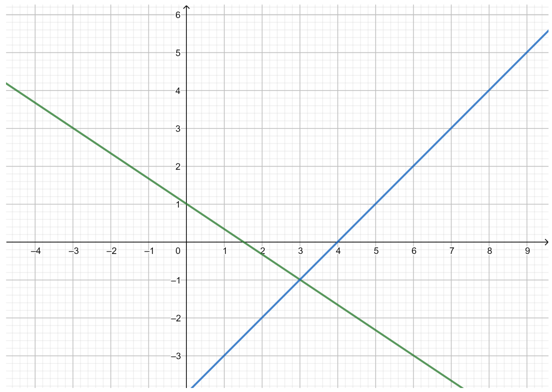
Mogelijkheden voor Oplossingsverzamelingen

Het volgende voorbeeld illustreert verschillende mogelijkheden voor de oplossingsverzameling van een stelsel van lineaire vergelijkingen. Een formele studie laten we hier achterwege, en de bijhorende stukken theorie zullen volgen in de hierop volgende secties.

Voorbeeld 1.2
Beschouw het stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 3, \\ x_1 - x_2 &= 4. \end{aligned}$$

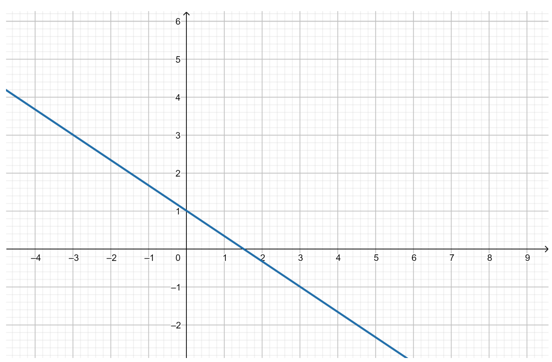
Wanneer we de oplossingen van elk van deze vergelijkingen afzonderlijk tekenen in het x_1x_2-vlak bekomen we twee rechten, één met een negatieve helling en één met een positieve helling. Deze hebben exact één punt gemeenschappelijk: $(x_1, x_2) = (3, -1)$, hetgeen de oplossing $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ is. Vanuit de meetkunde kunnen we aannemen dat dit de enige oplossing is die voldoet aan beide vergelijkingen, en dus de enige oplossing is van het stelsel. We zeggen dat deze oplossing de unieke oplossing is van het stelsel.



We passen nu het stelsel aan d.m.v. een andere tweede vergelijking

$$2x_1 + 3x_2 = 3,$$
$$4x_1 + 6x_2 = 6.$$

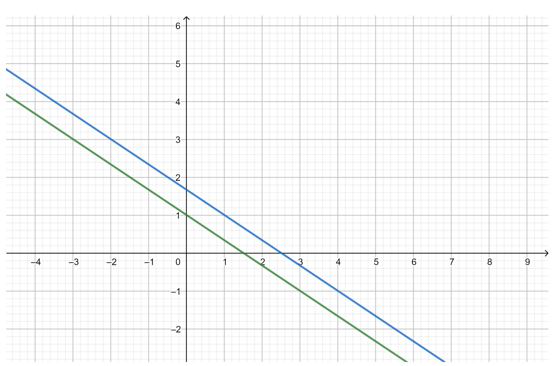
Een grafiek van de afzonderlijke oplossingen van deze vergelijkingen resulteert in twee rechten die volledig overlappen. Er zijn oneindig veel koppels van punten die voldoen aan beide vergelijkingen. We zullen later zien hoe we deze oneindige oplossingsverzameling exact kunnen beschrijven (zie Voorbeeld 1.13). Bemerk dat de tweede vergelijking een veelvoud is van de eerste vergelijking.



Een kleine aanpassing zorgt voor een derde lineair stelsel

$$2x_1 + 3x_2 = 3,$$
$$4x_1 + 6x_2 = 10.$$

Ditmaal toont de grafiek twee parallelle rechten, nl. met gelijke helling. Er zijn geen gemeenschappelijke punten en zodoende is de oplossingsverzameling van dit derde stelsel de ledige verzameling, $S = \varnothing$.



$\boxtimes$

Equivalente stelsels en bewerkingen op vergelijkingen

Na deze uitvoerige bespreking over oplossingsverzamelingen voor lineaire stelsels ben je klaar om ze zelf te gaan bepalen. Een essentiële stap in de zoektocht naar oplossingsverzamelingen is het transformeren van het originele stelsel naar een zogenaamd equivalent stelsel.

Definitie 1.4 Equivalent Stelsel

Twee stelsels van lineaire vergelijkingen zijn **equivalent** als hun oplossingsverzamelingen identiek zijn.

Met deze definitie kunnen we beginnen met het beschrijven van onze strategie voor het oplossen van lineaire stelsels. Wanneer we een lineair stelsel beschouwen dat moeilijk op te lossen lijkt, zouden we dit stelsel graag transformeren naar een *equivalent* stelsel dat zich wel gemakkelijk laat oplossen. Aangezien hun oplossingsverzamelingen gelijk zijn, kunnen we het "gemakkelijke" stelsel oplossen en we bekomen tegelijkertijd de oplossingsverzameling voor het "moeilijke" stelsel. We behandelen nu de methoden om dit uit te bouwen tot een werkbare strategie.

Stelling 1.1 Bewerkingen op vergelijkingen die oplossingsverzamelingen behouden

Wanneer we één van volgende drie bewerkingen toepassen op een stelsel van lineaire vergelijkingen, dan zijn het originele en het getransformeerde stelsel equivalent.

1. Verwissel twee vergelijkingen van plaats in de oplijsting van de vergelijkingen.
2. Vermenigvuldig elke term van een vergelijking met een niet-nul element α.
3. Vermenigvuldig elke term van een vergelijking met een niet-nul element α en tel deze vergelijking termsgewijs op bij een tweede vergelijking. Behoud de eerste vergelijking en vervang de tweede vergelijking door de nieuw bekomen vergelijking.

Bewijs Het formele bewijs voor deze stelling is ietwat technisch, maar de beste manier om inzicht te verwerven in deze stelling is door een uitgewerkt voorbeeld. ■

Voorbeeld 1.3
We lossen het volgende stelsel op d.m.v. een opeenvolging van bewerkingen op de vergelijkingen.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 2:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= -2. \end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\ 0x_1 + 0x_2 - 1x_3 &= -4. \end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 1, \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Wat herschreven kan worden tot

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Dit eindresultaat is een zeer eenvoudig op te lossen stelsel vergelijkingen. De derde vergelijking vereist dat $x_3 = 4$ geldt. We substitueren deze laatste in Vergelijking 2 en bekomen zo $x_2 = -3$. Tot slot voeren we de substitutie van x_2 en x_3 door in de eerste vergelijking en vinden we dat $x_1 = 2$. Bemerk dat dit eveneens de enige mogelijke oplossing is van het stelsel, aangezien we in elke stap geen andere mogelijke keuze hadden voor de verschillende variabelen. Omdat we op elk van de stelsels telkens een bewerking op vergelijkingen hebben toegepast, geldt er dat alle stelsels equivalent zijn met elkaar door Stelling 1.1. Bijgevolg is $(x_1, x_2, x_3) = (2, -3, 4)$ de unieke oplossing van het *originele* stelsel vergelijkingen (alsook voor de andere stelsels die als tussenstap dienden). We noteren $S = \{(2, -3, 4)\}$ als eindresultaat. ⊠

Voorbeeld 1.4

Het volgende stelsel vergelijkingen hebben we reeds eerder behandeld in Voorbeeld 1.1, waar we al *één* oplossing hebben gevonden. Nu gaan we op zoek naar alle mogelijke oplossingen van dit stelsel. De volgorde van de uitgevoerde bewerkingen op vergelijkingen die we hier hanteren is even van minder belang, zolang je inziet dat elke stap afzonderlijk correct is.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 2:

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 7,$$

$$\begin{aligned} 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1. \end{aligned}$$

$\alpha = -3$ maal Vergelijking 1, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\ 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 0x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 10x_4 &= -20. \end{aligned}$$

$\alpha = -5$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\ 0x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$\alpha = -1$ maal Vergelijking 2:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 &= 7, \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0. \end{aligned}$$

$\alpha = -2$ maal Vergelijking 2, opgeteld bij Vergelijking 1:

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0, \end{aligned}$$

hetgeen herschreven kan worden tot

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 - 3x_4 &= -1, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Wat vertelt de vergelijking $0 = 0$ ons? We kunnen *alle* mogelijke waarden voor x_1, x_2, x_3, x_4 kiezen en er zal altijd aan de vergelijking voldaan zijn. We hoeven daarom geen rekening te houden met deze laatste vergelijking en kijken enkel naar de eerste twee. We kunnen de tweede vergelijking behandelen zonder rekening te moeten houden met variabele x_1. Er lijkt vrij veel keuzevrijheid te zijn wat betreft de waarden voor x_2, x_3, x_4 die voldoen aan deze vergelijking. Neem willekeurig twee waarden voor x_3 en x_4, bijvoorbeeld $x_3 = a$ en $x_4 = b$. We kunnen nu deze gekozen waarden voor x_3 en x_4 vervangen in Vergelijking 1. Zo verkrijgen we

$$\begin{aligned} & x_1 + 2a - 3b = -1 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = -1 - 2a + 3b. \end{aligned}$$

Op gelijkaardige manier bekomen we voor Vergelijking 2

$$x_2 - a + 2b = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 = 4 + a - 2b.$$

De willekeurige keuze voor x_3 en x_4 heeft geleid tot specifieke waarden voor x_1 en x_2. De enkele oplossing gegeven in Voorbeeld 1.1 werd bekomen door keuzes $a = 2$ en $b = 1$. We kunnen nu eenvoudig en relatief snel veel meer oplossingen vinden, zelfs oneindig veel. Veronderstel dat we $a = 5$ en $b = -2$ kiezen. Dan bekomen we

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 - 2(5) + 3(-2) = -17 \\ x_2 &= 4 + 5 - 2(-2) = 13. \end{aligned}$$

En we kunnen verifiëren dat $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-17, 13, 5, -2)$ voldoet aan alle drie de vergelijkingen. De volledige oplossingsverzameling wordt nu geschreven als

$$S = \{ (-1 - 2a + 3b, 4 + a - 2b, a, b) |\, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \}.$$

Tot slot is het een nuttige oefening om het resultaat van dit voorbeeld te controleren. Neem de algemene vorm van een oplossing, zoals beschreven in de oplossingsverzameling, substitueer deze in de drie vergelijkingen en verifieer dat aan deze in alle gevallen voldaan is. ⊠

Sectie 1.3 Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Na het oplossen van enkele stelsels van vergelijkingen zul je merken dat het weinig uitmaakt *hoe* we onze variabelen noteren, in tegenstelling tot de getallen die de coëfficiënten vormen. Een stelsel met variabelen x_1, x_2, x_3 zal hetzelfde gedrag vertonen als een stelsel met variabelen a, b, c zolang alle constanten onveranderd en op dezelfde plaats blijven. In deze sectie identificeren we de cruciale stukjes informatie over een stelsel vergelijkingen in wat we een matrix zullen noemen, en we gebruiken deze matrix om de vergelijkingen systematisch op te lossen.

De Uitgebreide Matrix

Een **matrix** is een rechthoekige structuur van getallen in $\mathbb{R}$ van m rijen en n kolommen.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

We zullen de hoofdletters uit het gebruikelijke Latijnse alfabet $(A, B, C, \dots)$ gebruiken om matrices aan te duiden en rechte haakjes om de structuur neer te schrijven. Dikwijls worden ook grote ronde haakjes gebruikt voor deze laatste. Het verschil in notatie is echter niet belangrijk. De rijen van een matrix worden geteld van boven naar onder (rij 1 bevindt zich bovenaan de matrix) en de kolommen worden geteld van links naar rechts (kolom 1 is de uiterst linkse kolom). Voor een matrix A verwijzen de notaties

$$[A]_{ij}$$

en a_{ij} allebei naar het reële getal dat staat op de i-de rij en de j-de kolom. Bemerk dat de kleine letters gebruikt worden voor de elementen van een matrix, terwijl de hoofdletters verwijzen naar de matrix zelf.

Voorbeeld 1.5

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

is een matrix met $m = 3$ rijen en $n = 4$ kolommen. We kunnen uitdrukken dat $[B]_{23} = -6$ terwijl $[B]_{34} = -2$. ⊠

Een **kolomvector** van **grootte** m is een geordende lijst van m getallen die in vaste volgorde en verticaal geschreven worden, van boven naar beneden. We zullen ook naar een kolomvector refereren als simpelweg een vector. Kolomvectoren worden vetgedrukt en met een pijl erboven geschreven, doorgaans met een kleine Latijnse letter uit het einde van het alfabet, zoals $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{w}}$, $\vec{\boldsymbol{x}}$, $\vec{\boldsymbol{y}}$, $\vec{\boldsymbol{z}}$. Om te verwijzen naar het i-de **element** of **component** uit de lijst die overeenstemt met de vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ schrijven we $[\vec{\boldsymbol{v}}]_i$ of v_i. Een vector van grootte m kan geschreven worden als

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

De **nulvector** van grootte m is de kolomvector van grootte m waarbij elk element het getal nul is.

$$\vec{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Voor een stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

is de **coëfficiëntenmatrix** de $m \times n$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

en de **constantenvector** is de kolomvector $\vec{\boldsymbol{b}}$ van grootte m:

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Als A de coëfficiëntenmatrix is van een stelsel van lineaire vergelijkingen en $\vec{\boldsymbol{b}}$ is de constantenvector, dan schrijven we $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ als verkorte notatie voor het stelsel van lineaire vergelijkingen. We verwijzen naar deze notatie als de **matrixvoorstelling** van het lineair stelsel. We kunnen het stelsel eigenlijk beschouwen als een vermenigvuldiging van matrix A en vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ met als uitkomst $\vec{\boldsymbol{b}}$. We stellen een meer formele beschouwing van deze matrix-vectorvermenigvuldiging uit tot Definitie 2.7.

Voorbeeld 1.6
Het stelsel van lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 0, \\ -2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -3, \end{aligned}$$

heeft coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

en constantenvector

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

en wordt daarom neergeschreven als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$. ⊠

Beschouw een stelsel met m vergelijkingen in n variabelen, met coëfficiëntenmartix A en constantenvector $\vec{\boldsymbol{b}}$. Dan is de **uitgebreide matrix** van het stelsel vergelijkingen de $m \times (n+1)$ matrix waarvan de eerste n kolommen de kolommen zijn van A en waarvan de laatste kolom (kolom $n+1$) de kolomvector $\vec{\boldsymbol{b}}$ is. Deze matrix wordt genoteerd als $[A \quad \vec{\boldsymbol{b}}]$ of kortweg A_b.

Voorbeeld 1.7
We beschouwen het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 variabelen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Hierbij is de uitgebreide matrix:

$$[A \quad \vec{\boldsymbol{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

⊠

Rijbewerkingen

Een uitgebreide matrix van een stelsel vergelijkingen bespaart ons de eentonigheid van het herhaaldelijk neerschrijven van de namen van de variabelen wanneer we het stelsel oplossen. Het zorgt ook dat we niet langer afhankelijk zijn van de namen van de beschouwde variabelen. We hebben enkele bewerkingen behandeld die we kunnen toepassen op vergelijkingen zonder hun oplossingen te veranderen (Stelling 1.1). De volgende twee definities en stelling hevelen de ideeën achter deze bewerkingen over van vergelijkingen naar uitgebreide matrices.

Definitie 1.5 Rijbewerkingen

De volgende drie bewerkingen zetten een $m \times n$ matrix om in een andere matrix van dezelfde grootte en worden ook wel **rijbewerkingen** genoemd.

1. Verwissel twee rijen van plaats.
2. Vermenigvuldig elk element op een enkele rij met een getal niet gelijk aan nul.
3. Vermenigvuldig elk element op een rij met een getal en tel elk van deze waarden op bij de elementen van een tweede rij in dezelfde kolom. Laat de eerst beschouwde rij onveranderd, maar vervang de tweede rij door de nieuwe waarden.

We zullen een symbolische notatie gebruiken die deze rijbewerkingen beschrijft:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$: Verwissel rij i en j van plaats.
2. αR_i: Vermenigvuldig rij i met de niet-nul scalair α.
3. $R_j + \alpha R_i$: Vermenigvuldig rij i met scalair α en tel op bij rij j.

Definitie 1.6 Rij-Equivalente Matrices

Twee matrices A en B zijn **rij-equivalent** als de ene bekomen kan worden uit de andere d.m.v. een reeks rijbewerkingen.

Voorbeeld 1.8

De matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

zijn rij-equivalent, zoals blijkt uit

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

We kunnen eveneens stellen dat elk paar van de bovenstaande drie matrices rij-equivalent is. ☒

Merk op dat elk van deze rijbewerkingen omkeerbaar is, waardoor we niet hoeven te letten op een onderscheid tussen "A is rij-equivalent met B" en "B is rij-equivalent met A". De voorgaande definities werden ingevoerd om de volgende stelling te kunnen formuleren. Deze toont aan dat rij-equivalente matrices overeenstemmen met stelsels van lineaire vergelijkingen die identieke oplossingsverzamelingen hebben.

Stelling 1.2 Rij-equivalente Matrices corresponderen met Equivalente Stelsels

Veronderstel dat A en B rij-equivalente uitgebreide matrices zijn. Dan zijn de stelsels van lineaire vergelijkingen die ze voorstellen equivalent.

Bewijs Wanneer we een enkele rijbewerking uitvoeren op een uitgebreide matrix, dan heeft dit hetzelfde effect als wanneer we de bewerking op de corresponderende vergelijkingen zouden uitvoeren. Door Stelling 1.1 toe te passen zien we dat elk van de rijbewerkingen de oplossingsverzameling van het bijhorende stelsel vergelijkingen zal behouden. ■

Momenteel bestaat ons plan van aanpak uit het starten vanuit een stelsel vergelijkingen, voorgesteld door een uitgebreide matrix, waarop we rijbewerkingen toepassen (die de oplossing van het stelsel onveranderd laten) om een meer "eenvoudige" uitgebreide matrix te bekomen, die we op zijn beurt kunnen omzetten naar een "eenvoudig" stelsel vergelijkingen, om zo het stelsel op te lossen, wetende dat dit dezelfde oplossingen zijn als voor het originele stelsel. We herhalen hier Voorbeeld 1.3, ditmaal als een oefening op het gebruik van onze nieuwe methode.

Voorbeeld 1.9

We lossen het volgende stelsel op door gebruik te maken van uitgebreide matrices en rijbewerkingen. Dit is hetzelfde stelsel dat we in Voorbeeld 1.3 reeds opgelost hebben via bewerkingen op vergelijkingen.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Stel de uitgebreide matrix op

$$[A \quad \vec{\boldsymbol{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

en pas nu rijbewerkingen toe

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{R_2 - 1R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

zodat de matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

rij-equivalent is met A. Door Stelling 1.2 heeft het onderstaande stelsel vergelijkingen dezelfde oplossingsverzameling als het originele stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Het oplossen van dit stelsel is eenvoudig en identiek aan het proces gezien in Voorbeeld 1.3. ⊠

Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Het vorige voorbeeld illustreert zeer goed de definities en stellingen die we tot nu toe hebben behandeld. Er blijven echter nog twee vragen onbeantwoord. Wat wordt er precies bedoeld met een meer “eenvoudige” vorm voor een matrix, en hoe bekomen we die? Hieronder geven we het antwoord op de eerste vraag, nl. de definitie van de rij-gereduceerde echelonvorm.

Definitie 1.7 Rij-Gereduceerde Echelonvorm

Een matrix is in **rij-gereduceerde echelonvorm** wanneer ze aan de volgende voorwaarden voldoet:

1. Indien er een rij is waar elk element een nul is, dan ligt deze rij lager dan elke andere rij die een niet-nul element bevat.
2. Het meest linkse niet-nul element van een rij is gelijk aan 1.
3. Het meest linkse niet-nul element van een rij is het enige niet-nul element in zijn kolom.
4. Beschouw twee verschillende meest linkse niet-nul elementen, de ene op rij i en kolom j en de andere op rij s en kolom t. Indien $s > i$, dan $t > j$.

Een rij van enkel nulelementen wordt een **nulrij** genoemd en het meest linkse niet-nul element van een niet-nulrij wordt de **leidende 1** genoemd. Het aantal niet-nulrijen wordt aangeduid met r. Een kolom die een leidende 1 bevat wordt een **pivotkolom** genoemd. De verzameling van kolomindices voor alle pivotkolommen wordt genoteerd als $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r\}$ waarbij $d_1 < d_2 < d_3 < \cdots < d_r$, terwijl de kolommen die geen pivotkolommen zijn genoteerd worden als $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{n-r}\}$ waarbij $f_1 < f_2 < f_3 < \cdots < f_{n-r}$.

Het voornaamste kenmerk van de rij-gereduceerde echelonvorm is het patroon van leidende 1'en dat gegarandeerd wordt door voorwaarden (2) en (4), wat doet denken aan een formatie vliegende ganzen, een trap of een waterstroom die stapsgewijs naar beneden kabbelt.

Er werden een aantal nieuwe termen en notaties geïntroduceerd in deze definitie, wat je al kan doen vermoeden dat dit een belangrijke definitie is. Bemerk dat al de nieuwe begrippen betrekking hebben op een matrix. Soms zullen we deze gebruiken voor een uitgebreide matrix, en soms voor een coëfficiëntenmatrix. Let daarom steeds op het type matrix dat je op dat moment aan het analyseren bent.

Voorbeeld 1.10

De matrix C is in rij-gereduceerde echelonvorm.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 & 0 & 0 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix heeft twee nulrijen en drie leidende 1'en, dus geldt $r = 3$. Kolommen 1, 5 en 6 zijn de pivotkolommen, waardoor $D = \{1, 5, 6\}$ en $F = \{2, 3, 4, 7, 8\}$. ⊠

Voorbeeld 1.11
De matrix E is niet in rij-gereduceerde echelonvorm aangezien het elk van de vier voorwaarden van Definitie 1.7 exact éénmaal schendt.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 6 & 0 & 7 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⊠

Voor sommige concepten die we zullen behandelen zal het volstaan dat er enkel nullen staan onder een leidende 1 in plaats van zowel boven als onder de leidende 1. (In feite zal het reeds voldoende zijn dat het leidende element niet nul is.) In dat geval is het eveneens duidelijk welke de pivotkolommen zijn. De matrix is dan in **echelonvorm**.

Stelling 1.3 Rij-Equivalente Matrix in Echelonvorm

Stel dat A een matrix is. Dan is er een matrix B waarvoor geldt dat

1. A en B zijn rij-equivalent.
2. B is in rij-gereduceerde echelonvorm.

Bewijs Stel dat A m rijen en n kolommmen heeft. We beschrijven nu het proces om A in B om te zetten via rijbewerkingen. Deze procedure staat gekend als de **Gauss–Jordan eliminatie**. Om deze procedure ten volste te kunnen begrijpen, houd je best in gedachten dat i verwijst naar een rij die wordt aangepast, j naar een kolom die wordt aangepast en r houdt bij hoeveel niet-nulrijen er op dat moment zijn. Bij deze kunnen we starten.

1. Kies $j = 0$ en $r = 0$.
2. Vermeerder j met 1. Indien j nu gelijk is aan $n + 1$, stop dan hier.
3. Bekijk de elementen van A in kolom j op rijen $r + 1$ tot en met m.
   Indien al deze elementen nul zijn, ga dan naar Stap 2.

4. Kies een rij uit rijen $r+1$ tot en met m met een niet-nul element in kolom j.
   Stel dat i de index is van deze rij.

5. Vermeerder r met 1.

6. Gebruik de eerste rijbewerking om rijen i en r om te wisselen.

7. Gebruik de tweede rijbewerking om het element op rij r en kolom j om te zetten in een 1.

8. Gebruik de derde rijbewerking met rij r om elk ander element in kolom j om te zetten naar een nul.

9. Ga naar Stap 2.

Het eindresultaat van deze procedure is dat de matrix A omgezet is in een matrix in rij-gereduceerde echelonvorm, de welke we B zullen noemen. We dienen nu nog te bewijzen dat dit daadwerkelijk het geval is door aan te tonen dat de geconverteerde matrix B de eigenschappen uit Definitie 1.7 heeft. Dit formeel bewijs valt echter buiten het bestek van deze cursus, omwille van de techniciteit van het bewijs. Bemerk dat de matrix enkel is aangepast door rijbewerkingen (Stap 6, Stap 7, Stap 8), waardoor A en B rij-equivalent zijn (Definitie 1.6).

■

Nu kunnen we alle resultaten samenbrengen: begin met een stelsel van lineaire vergelijkingen (Definitie 1.1) en druk het stelsel uit d.m.v. zijn uitgebreide matrix. Gebruik vervolgens rijbewerkingen (Definitie 1.5) om deze matrix om te zetten naar haar rij-gereduceerde echelonvorm (Definitie 1.7) via de Gauss-Jordan eliminatie. Stelling 1.3 vertelt ons dat dit proces altijd een geldig resultaat oplevert en dat dat resultaat rij-equivalent (Definitie 1.6) is met de originele uitgebreide matrix. Omdat de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm dezelfde oplossingsverzameling heeft, kunnen we de rij-gereduceerde versie analyseren in plaats van de originele matrix, waarbij we de nieuwe matrix bekijken als de uitgebreide matrix van een nieuw stelsel vergelijkingen. De schoonheid van uitgebreide matrices in rij-gereduceerde echelonvorm schuilt in het feit dat hun oplossingsverzameling met weinig inspanning bepaald kan worden, zoals we zullen zien in de volgende voorbeelden en in de hierop volgende sectie.

Daarnaast kan er opgemerkt worden dat Gauss-Jordan eliminatie een procedure is die zich uitstekend leent om door een computer uitgevoerd te worden. In feite werd de procedure in het bovenstaand bewijs beschreven door middel van pseudo-code, en met de nodige programmeervaardigheden zou een vertaling naar een programmeertaal voordehandliggend moeten zijn. Vandaag de dag wordt Gauss-Jordan eliminatie echter standaard aangeboden in programmeertalen zoals Python, Matlab of Julia. In de praktijk maken ingenieurs dan ook handig gebruik van die routines, want vaak zijn stelsels te groot om Gauss-Jordan eliminatie met pen en papier uit te voeren.

Doorheen de curses zullen we zien dat vrijwel elke interessante eigenschap van matrices onderzocht kan worden door te kijken naar een rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm. Net om deze reden is het van cruciaal belang dat we weten dat de matrix B, die altijd bestaat volgens Stelling 1.3, ook uniek is.

Stelling 1.4 Rij-Gereduceerde Echelonvorm is Uniek

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en dat B en C $m \times n$ matrices zijn die rij-equivalent zijn met A en die beide in rij-gereduceerde echelonvorm staan. Dan geldt dat $B = C$.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

We zullen nu enkele voorbeelden behandelen die gebruik maken van deze definities en stellingen om een aantal stelsels vergelijkingen op te lossen. We zullen vanaf nu de leidende 1'en van een matrix in rij-gereduceerde echelonvorm aanduiden met een vierkantje. Dit zal later zeer handig blijken en is dan ook een *zeer goede gewoonte* om aan te leren.

Voorbeeld 1.12

Laat ons de oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen zoeken,

$$\begin{aligned} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= -33, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 24, \\ x_1 + 4x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Construeer eerst de uitgebreide matrix,

$$\begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 & -33 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

en werk vervolgens toe naar de rij-gereduceerde echelonvorm. We beginnen met het creëren van nullen in de eerste kolom:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 7 & 24 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ -7 & -6 & -12 & -33 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 + 7R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -13 & -1 \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vervolgens maken we nullen in de tweede kolom:

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & -6 & 16 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 6R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

En tot slot maken we nullen in de derde kolom:

$$\xrightarrow{\frac{5}{2}R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{-13}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + \frac{13}{5}R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 - 4R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Dit is nu de uitgebreide matrix van een zeer eenvoudig stelsel vergelijkingen, namelijk $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, hetgeen een voordehandliggende oplossing heeft. We zien overigens dat dit de *enige* oplossing is van het stelsel, waardoor we de volledige oplossingsverzameling bepaald hebben.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vergelijk dit voorbeeld met de procedure die we gehanteerd hebben in Voorbeeld 1.3. ⊠

Voorbeeld 1.7 en Voorbeeld 1.12 staan in scherp contrast met elkaar op een heel aantal vlakken. Daarom bepalen we nu de oplossingen van Voorbeeld 1.7.

Voorbeeld 1.13
Laat ons de oplossingen van het volgende stelsel vergelijkingen bepalen.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8, \\ x_1 + x_2 &= 5. \end{aligned}$$

We beginnen met het opstellen van de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

om daarna te werken richting de rij-gereduceerde echelonvorm:

$$\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-1R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+1R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel vergelijkingen dat wordt voorgesteld door deze uitgebreide matrix dient ietwat anders aangepakt te worden dan dat uit Voorbeeld 1.12. Zo bemerken we eerst dat de laatste vergelijking $0 = 0$ is, wat *altijd* waar is. Hierdoor legt deze vergelijking geen restricties op aan de mogelijke oplossingen en kunnen we deze vergelijking negeren terwijl we de overige twee vergelijkingen analyseren. Deze twee vergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 3, \\ x_2 - x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

Alhoewel dit stelsel relatief eenvoudig op te lossen is, lijkt het ook meerdere oplossingen te hebben. Kies bijvoorbeeld $x_3 = 1$ en verifieer voor jezelf dat deze samen met $x_1 = 2$ en $x_2 = 3$ een oplossing vormt. Of kies $x_3 = 0$ en dan vinden we een oplossing met $x_1 = 3$ en $x_2 = 2$. Probeer nu zelf een *willekeurige* waarde voor x_3 te kiezen en zoek naar de waarden voor x_1 en x_2 die voldoen aan respectievelijk de eerste en de tweede vergelijking. Het is door deze keuzevrijheid dat we x_3 een **vrije** of **onafhankelijke variabele** zullen noemen. Maar waarom laten we x_3 variëren en niet een andere variabele? Voor nu volstaat het om op te merken dat enkel de derde kolom van de uitgebreide matrix geen leidende 1 heeft. Door deze eigenschap kunnen we de andere twee vergelijkingen herschikken zodat we ze kunnen oplossen naar de variabele die overeenkomt met de leidende 1 in die rij.

$$x_1 = 3 - x_3$$

$$x_2 = 2 + x_3$$

Om de oplossingsverzameling neer te schrijven gaan we als volgt te werk:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 - x_3 \\ 2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

In de volgende sectie gaan we dieper in op stelsels met oneindig veel oplossingen en hoe we hun oplossingsverzameling kunnen formuleren. ⊠

Voorbeeld 1.14
We zoeken de oplossingen van onderstaand stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 &= 2, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Eerst noteren we de uitgebreide matrix,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \end{bmatrix},$$

en transformeren deze naar rij-gereduceerde echelonvorm.

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 1R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & -21 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 7R_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

We analyseren de vergelijkingen van het stelsel dat voorgesteld wordt door deze uitgebreide matrix. De derde vergelijking stelt $0 = 1$. Dit is onder elke omstandigheid fout. Geen enkele keuze voor onze variabelen zal ervoor zorgen dat aan deze vergelijking voldaan zal worden. Hier stopt het dan ook. Indien we niet aan de laatste vergelijking kunnen voldoen, is het onmogelijk om aan alle vergelijkingen te voldoen. Bijgevolg heeft dit stelsel geen oplossingen en is de bijhorende oplossingsverzameling de ledige verzameling $\varnothing = \{\}$.

Bemerk dat we reeds eerder tot deze conclusie hadden kunnen komen, namelijk vlak na de rijbewerking $R_3 - 7R_2$, waar we als derde vergelijking $0 = -5$ bekomen. Omdat het stelsel dat overeenkomt met deze matrix geen oplossingen heeft, hebben alle behandelde stelsels geen oplossingen. Voor dit voorbeeld hebben we er echter voor gekozen om de matrix volledig tot haar rij-gereduceerde echelonvorm te brengen, bij wijze van oefening. ⊠

Deze drie voorbeelden, Voorbeeld 1.12, Voorbeeld 1.13 en Voorbeeld 1.14, illustreren de volledige waaier aan mogelijkheden voor een stelsel van lineaire vergelijkingen — één oplossing, oneindig veel oplossingen of geen oplossing. Een matrix A **rij-reduceren** betekent het toepassen van rijbewerkingen op A totdat een rij-equivalente matrix B bekomen wordt die in rij-gereduceerde echelonvorm staat. Het woord **rij-reduceren** zullen we dan ook gebruiken als werkwoord. Door Stelling 1.3 weten we dat dit proces steeds het gewenste resultaat zal opleveren en door Stelling 1.4 is het bekomen resultaat ook eenduidig bepaald. De analyse van A verloopt doorgaans via de analyse van B, waarbij we de voorgaande stellingen toepassen, steunend op de rij-equivalentie van de twee matrices.

Echelonvorm

In Voorbeeld 1.9 reduceerden we de uitgebreide matrix tot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Dit is niet de rij-gereduceerde echelonvorm (waarom niet?). Maar toch is deze vorm voldoende om het stelsel op te lossen. We noemen deze vorm de (niet-gereduceerde) echelonvorm. Deze is gedefinieerd zoals de rij-gereduceerde echelonvorm in Definitie 1.7, maar met als relaxatie dat een pivot mag verschillen van 1 en dat de elementen erboven mogen verschillen van 0.

De echelonvorm is voldoende voor het bepalen van

- de oplosbaarheid van een stelsel
- aantal oplossingen
- de afhankelijke en onafhankelijke variabelen
- de oplossingsverzameling

Doordenkertje: De rij-gereduceerde echelonvorm is een van de vele mogelijke echelonvormen. Maar niet elke echelonvorm is een rij-gereduceerde echelonvorm.

Tip: Rijbewerkingen kosten veel tijd en zijn vaak een bron van rekenfouten. Afhankelijk van de vraagstelling, is het vaak voldoende om de echelonvorm te vinden.

Oplosbare Stelsels

Nu gaan we iets voorzichtiger te werk wat betreft onze analyse van de rij-gereduceerde echelonvorm van een uitgebreide matrix van een stelsel van lineaire vergelijkingen. In het bijzonder bekijken we hoe we het geval van oneindig veel mogelijke oplossingen systematisch kunnen behandelen en zullen we bewijzen dat elk lineair stelsel ofwel nul, ofwel één, ofwel oneindig veel oplossingen heeft. Met deze kennis zullen we in staat zijn om elk stelsel via een goed gedefinieerde methode op te lossen.

Definitie 1.8 Oplosbare Stelsels

Een stelsel van lineaire vergelijkingen is **oplosbaar** of **consistent** als het minstens één oplossing heeft. Indien niet, dat wordt het stelsel **onoplosbaar** of **inconsistent** genoemd.

De eerste stap die we willen zetten is bepalen of een gegeven stelsel oplosbaar of onoplosbaar is. In geval van een oplosbaar stelsel kunnen we een verder onderscheid gaan maken tussen de verschillende types oplossingen. We doen dit door steevast te kijken naar de rij-gereduceerde echelonvorm van de matrix en maken daarbij gebruik van de waarde r en de verzamelingen kolomindices D en F zoals eerder gedefinieerd in Definitie 1.7. Het getal r zal het meest belangrijke stukje informatie zijn dat we uit de rij-gereduceerde echelonvorm van een matrix zullen kunnen halen. Het slaat op het aantal niet-nulrijen, maar aangezien elke niet-nulrij een leidende 1 bevat, is r gelijk aan het aantal leidende 1'en in de matrix. Voor elke leidende 1 hebben we een pivotkolom, dus ook het aantal pivotkolommen. Voor verschillende situaties zullen verschillende betekenissen van r nuttig blijken.

Vooraleer we enkele stellingen aantonen over de mogelijkheden voor oplossingsverzamelingen van stelsels vergelijkingen, analyseren we eerst één bepaald stelsel met oneindige oplossingsverzameling, bij wijze van voorbeeld. We zullen de volgende werkwijze vaker hanteren en zullen ze later ook nog bijschaven.

Voorbeeld 1.15
We beschouwen een stelsel met $m = 4$ vergelijkingen en $n = 7$ variabelen.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_4 + 7x_6 - 9x_7 &= 3, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 + 9x_5 - 13x_6 + 7x_7 &= 9, \\ 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 12x_6 - 8x_7 &= 1, \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 - 31x_6 + 37x_7 &= 4. \end{aligned}$$

Dit stelsel heeft een 4×8 uitgebreide matrix die rij-equivalent is met de volgende matrix (verifieer dit) en die in rij-gereduceerde echelonvorm staat (het bestaan van deze matrix wordt gegarandeerd door Stelling 1.3 en haar uniciteit volgt uit Stelling 1.4).

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We vinden dat $r = 3$ en

$$D = \{d_1,\, d_2,\, d_3\} = \{1,\, 3,\, 4\} \qquad\qquad F = \{f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5\} = \{2,\, 5,\, 6,\, 7,\, 8\}\ .$$

Noteer met i één van de $r = 3$ niet-nulrijen en dan zien we dat we de vergelijking corresponderend met rij i kunnen oplossen naar variable x_{d_i} en dat we deze als lineaire functie van de variabelen x_{f_1}, x_{f_2}, x_{f_3}, x_{f_4} kunnen schrijven. Bemerk dat $f_5 = 8$ niet verwijst naar een variabele. We gebruiken hier een dubbel subscript (het schrijven van een symbool onder een ander). Dit vereist enige aandachtigheid en tijd om gewoon te worden.

$$\begin{aligned} x_{d_1} &= x_1 = 4 - 4x_2 - 2x_5 - x_6 + 3x_7 \\ x_{d_2} &= x_3 = 2 - x_5 + 3x_6 - 5x_7 \\ x_{d_3} &= x_4 = 1 - 2x_5 + 6x_6 - 6x_7 \end{aligned}$$

Elk element van de verzameling $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ is een index van een variabele, behalve $f_5 = 8$. We verwijzen naar $x_{f_1} = x_2$, $x_{f_2} = x_5$, $x_{f_3} = x_6$ en naar $x_{f_4} = x_7$ als **vrije** of **onafhankelijke** variabelen, omdat ze elke mogelijke combinatie van waarden mogen aannemen en steeds deel kunnen uitmaken van een oplossing. Deze oplossing kan bekomen worden door elke individuele vergelijking van het stelsel op te lossen voor de andere **afhankelijke** variabelen.

Elk element van de verzameling $D = \{d_1, d_2, d_3\} = \{1, 3, 4\}$ is de index van een variabele. We verwijzen naar de variabelen $x_{d_1} = x_1$, $x_{d_2} = x_3$ en $x_{d_3} = x_4$ als afhankelijke variabelen omdat ze *afhangen* van de *onafhankelijke* variabelen. Meerbepaald hebben we voor elke mogelijke keuze voor de onafhankelijke variabelen exact één reeks waarden voor de afhankelijke variabelen die allemaal samen een oplossing vormen voor het stelsel. Om de oplossingen uit te drukken in de vorm van een verzameling noteren we

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 4 - 4x_2 - 2x_5 - x_6 + 3x_7 \\ x_2 \\ 2 - x_5 + 3x_6 - 5x_7 \\ 1 - 2x_5 + 6x_6 - 6x_7 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \middle| \, x_2, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{R} \right\}.$$

⊠

We maken gebruik van de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix van een stelsel van lineaire vergelijkingen om de aard van een oplossingsverzameling te bepalen. Dit is dan ook een centrale stap in onze analyse. We kijken daarom naar nog een voorbeeld hiervan, na een korte definitie. We zullen de termen “vrij” en “onafhankelijk” overigens door elkaar gebruiken doorheen de cursus.

Definitie 1.9 Onafhankelijke en Afhankelijke Variabelen

Stel dat A_b een uitgebreide matrix is van een oplosbaar stelsel van lineaire vergelijkingen en B de rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm. Stel dat j een index is van een kolom van B die een leidende 1 bevat voor een zekere rij (kolom j is dus een pivotkolom). Dan is de variabele x_j een **afhankelijke** variabele. Een variabele die niet afhankelijk is noemen we **onafhankelijk** of **vrij**.

Wanneer je deze definitie van naderbij bestudeert, vraag je je mogelijks af wat er gebeurt wanneer de $(n+1)$-de kolom van een stelsel met n variabelen een pivotkolom is. We zullen zien dat, volgens Stelling 1.5, dit nooit kan voorkomen bij een oplosbaar stelsel.

Voorbeeld 1.16
Beschouw het stelsel van vijf vergelijkingen in vijf variabelen,

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + 11x_5 &= 13, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 16, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 10x_5 &= 21, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 20x_5 &= 38, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 &= 22\,, \end{aligned}$$

waarvan de uitgebreide matrix rij-gereduceerd kan worden tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er staat een leidende 1 in kolommen 1, 3 en 4, dus is $D = \{1, 3, 4\}$. Hieruit leiden we af dat variabelen x_1, x_3 en x_4 afhankelijke variabelen zullen zijn en dat elk van deze $r = 3$ niet-nulrijen van de rij-gereduceerde matrix een uitdrukking zal opleveren voor elk van deze variabelen. De verzameling F bevat alle overige kolomindices, $F = \{2, 5, 6\}$. $6 \in F$ verwijst naar de kolom die voortkomt uit de constantenvector, maar de overige elementen van F komen overeen met vrije variabelen, waardoor x_2 en x_5 vrije variabelen zijn. De drie vergelijkingen die onze oplossing beschrijven zijn dan

$$\begin{aligned} x_1 &= 6 + x_2 - 3x_5 \\ x_3 &= 1 + 2x_5 \\ x_4 &= 9 - 4x_5\,. \end{aligned}$$

Zorg ervoor dat je zeker begrijpt waar deze drie vergelijkingen vandaan komen en bemerk hoe de plaats van de leidende 1 de variabelen in het linkerlid van elke vergelijking bepaalt. We kunnen de oplossingsverzameling compact beschrijven via

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 6 + x_2 - 3x_5 \\ x_2 \\ 1 + 2x_5 \\ 9 - 4x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle|\, x_2, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bemerk hoe we de vrije keuze van x_2 en x_5 uitdrukken: $x_2, x_5 \in \mathbb{R}$. ⊠

We kunnen nu de waarden van m, n, r en de afhankelijke en onafhankelijke variabelen gebruiken om oplossingsverzamelingen voor stelsels van lineaire vergelijkingen te categoriseren via een reeks stellingen. Allereerst hebben we een belangrijke stelling die het onderscheid tussen oplosbare en onoplosbare stelsels verder uitdiept.

Stelling 1.5 Oplosbaarheid van een Lineair Stelsel Herkennen

Veronderstel dat A_b een uitgebreide matrix is voor een stelsel van lineaire vergelijkingen met n variabelen. Dan is het stelsel vergelijkingen onoplosbaar als en slechts als de laatste kolom van A_b een pivotkolom is.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

De equivalentie in deze stelling is wat ze zo elegant maakt. Hierdoor hoeven we slechts naar één element van de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm te kijken om te bepalen of een stelsel oplosbaar of onoplosbaar is.

Bemerk dat voor een oplosbaar stelsel geldt dat $n + 1 \in F$ voor de rij-gereduceerde uitgebreide matrix, waardoor het grootste element van F niet verwijst naar een variabele. Dan geldt dus voor een onoplosbaar stelsel dat $n+1 \in D$. In dit laatste geval heeft het weinig zin om te bepalen welke de afhankelijke en onafhankelijke elementen zijn aangezien er geen oplossingen zijn. Blik even terug op Definitie 1.9 en bekijk waarom we x_{n+1} niet als mogelijke afhankelijke variabele hebben overwogen, en waarom dit ook niet nodig was.

Door de karakterisatie in Stelling 1.5 kunnen we nu de relatie tussen r en n van naderbij onderzoeken in functie van de oplosbaarheid van een stelsel vergelijkingen. Eerst behandelen we een geval waarbij we vrij snel de onoplosbaarheid van een stelsel kunnen besluiten.

Stelling 1.6 Onoplosbare Stelsels, r en n

Veronderstel dat A_b de uitgebreide matrix is van een stelsel van lineaire vergelijkingen. Stel dat B een rij-equivalente matrix in rij-gereduceerde echelonvorm is met r rijen die niet volledig nul zijn. Als $r = n+1$, dan is het stelsel vergelijkingen onoplosbaar.

Bewijs Als $r = n+1$, dan bevat elke kolom van B een leidende 1 en is dus een pivotkolom. In het bijzonder is het element van kolom $n+1$ en rij $r = n+1$ een leidende 1. Volgens Stelling 1.5 is het stelsel dan onoplosbaar. ■

Als een stelsel met zekerheid oplosbaar is, kunnen we nog een onderscheid maken tussen twee mogelijkheden: een unieke oplossing of oneindig veel oplossingen. Uit het voorgaande weten we dat dit de enige overblijvende mogelijkheden zijn.

Stelling 1.7 Oplosbare stelsels, r en n

Veronderstel dat A_b de uitgebreide matrix is van een *oplosbaar* stelsel van lineaire vergelijkingen met n variabelen en dat B een rij-equivalente matrix is in rij-gereduceerde echelonvorm met r niet-nulrijen. Dan geldt $r \leq n$. Als $r = n$, dan heeft het stelsel een unieke oplossing. Als $r < n$, dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

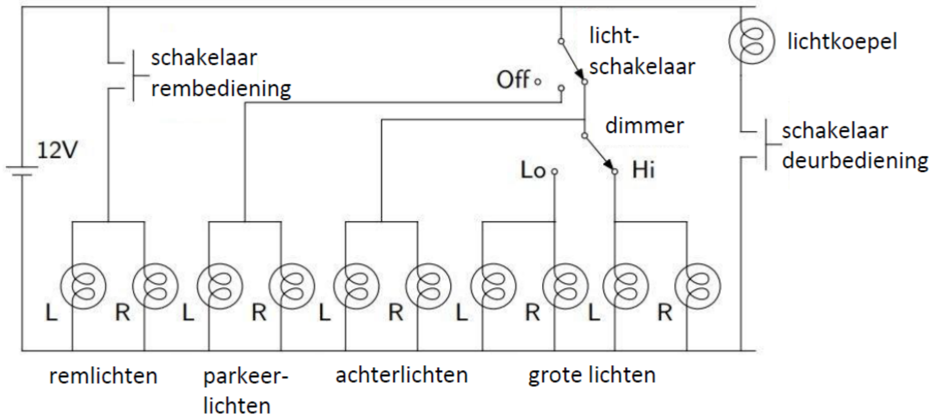
Bewijs Deze stelling omvat drie implicaties die we dienen aan te tonen. Bemerk eerst dat B $n+1$ kolommen heeft, waardoor er ten hoogste $n+1$ pivotkolommen kunnen zijn: $r \leq n+1$. Als $r = n+1$, dan volgt uit Stelling 1.6 dat het stelsel onoplosbaar is, wat in strijd is met onze veronderstelling. Bijgevolg geldt er dat $r \leq n$.

Wanneer $r = n$ geldt, dan zijn er $n - r = 0$ vrije variabelen (zo is $F = \{n+1\}$) en zal elke oplossing exact die oplossing zijn die gegeven wordt door de eerste n elementen van kolom $n+1$ van B.

Bij $r < n$ hebben we $n - r > 0$ vrije variabelen, overeenkomstig met de kolommen van B die geen leidende 1 hebben, met uitzondering van de laatste kolom, die nooit een leidende 1 zal bevatten wegens Stelling 1.5. Door de waarden voor deze vrije variabelen te laten fluctueren, zien we duidelijk dat het stelsel oneindig veel oplossingen zal hebben. ■

Sectie 1.4 Netwerken Analyseren

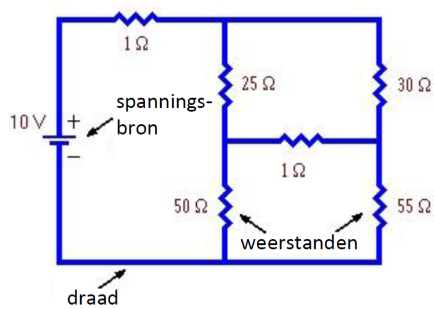
Stelsels van lineaire vergelijkingen worden in veel gebieden van de wetenschap en technologie gebruikt. Zo vormen ze onder meer de basis voor de analyse van allerlei types netwerken, zoals verkeersnetwerken, sociale netwerken, elektriciteitsnetwerken, waternetwerken, ecologische netwerken en metabolische netwerken. In deze sectie illustreren we het potentieel van stelsels van lineaire vergelijkingen binnen de context van elektriciteitsnetwerken. Onderstaand diagram toont een deel van het elektriciteitsnetwerk van een auto. De batterij bevindt zich aan de linkerkant, getekend als twee gestapelde lijnsegmenten. De lijnen zijn draden, voorgesteld door lijnsegmenten met rechte hoeken voor de overzichtelijkheid. Elk licht is een cirkel die een loop omsluit.



De ontwerper van een dergelijk netwerk moet onder meer vragen kunnen beantwoorden zoals: Hoeveel elektriciteit vloeit er door de draden wanneer zowel de grote lichten (*headlights*) als de remlichten (*brake lights*) aanstaan? We zullen lineaire stelsels gebruiken om dit eenvoudig type netwerk te analyseren.

Nodige Concepten uit de Fysica

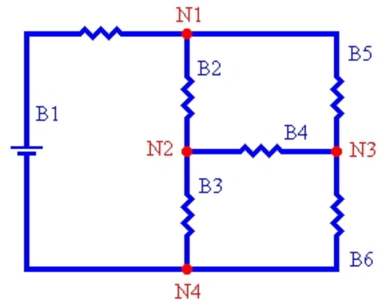
We starten met een beschrijving van enkele basisconcepten uit de fysica[1]. Hieronder staat een diagram van een elektrisch circuit.



Het diagram bevat enkele symbolen zoals het symbool voor een spanningsbron (bijvoorbeeld een batterij). Spanningsbronnen genereren een kracht die zorgt voor elektrische stroom doorheen het circuit. De spanningsbron in het diagram omvat 10 volt (V). Dit betekent dat de spanning 10 volt hoger is aan het + uiteinde van de batterij, ook wel de kant van het langste lijnsegment, dan aan de kant van het − uiteinde. Bijgevolg worden elektrische ladingen in een opwaartse richting gestuwd (van de − kant naar de + kant).

In het diagram vindt men ook het symbool voor een weerstand. Weerstanden zijn apparaten die de doorstroom van elektriciteit bemoeilijken. De weerstand rechts onderaan heeft een weerstand van 55 ohm (Ω). We observeren eveneens het symbool voor een draad. Een draad wordt geacht geen weerstand te hebben. Voor de rest zullen we het diagram noteren door middel van knooppunten en vertakkingen.

[1] Deze sectie is gebaseerd op http://mathonweb.com/help/backgd2.htm#Kirchoff's%20Voltage%20Law



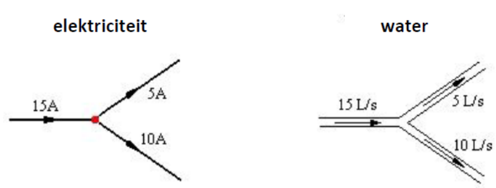
Knooppunten zijn plaatsen waar drie of meer draden samenkomen. Dit circuit bevat vier zulke knooppunten, genoteerd door N1, ..., N4. Een *vertakking* is een pad in het circuit dat aan elk uiteinde eindigt in een knooppunt en op z'n minst één spanningsbron of weerstand bevat, maar geen andere knooppunten. Dit circuit bevat 6 vertakkingen B1, ..., B6. Indien vertakking B4 geen weerstand zou bevatten, dan zou deze verwijderd kunnen worden en zouden knooppunten N2 en N3 als één enkel knooppunt beschouwd kunnen worden.

Elektrische lading die door een vertakking van een circuit stroomt is gelijkaardig aan water dat door een pijp stroomt. De snelheid waarmee een lading stroomt wordt de **stroomsterkte** genoemd. Deze wordt gemeten in coulomb/seconde of in ampère (A), gelijkaardig aan hoe waterstroming wordt gemeten in liter/seconde. Water is niet-samendrukbaar, wat betekent dat als 1 liter water aan de ene kant van de pijp eringaat, dat er ook weer 1 liter water aan de andere kant van de pijp moet uitkomen. Dezelfde situatie doet zich voor bij elektrische stromen. Als de stroomsterkte $1A$ is op een gegeven punt in een vertakking, dan is de stroomsterkte $1A$ over de gehele vertakking. Een direct gevolg hiervan zijn de **wetten van Kirchhoff**.

Stelling 1.8 Stromingswet van Kirchhoff

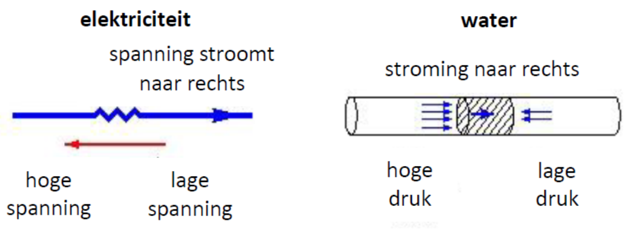
De som van de stromen die binnenkomen in een knooppunt is gelijk aan de som van de stromen die dat knooppunt verlaten.

Hieronder een voorbeeld.



Dit diagram toont ook hoe we een pijl tekenen op de vertakking om aan te geven in welke richting de stroom door de vertakking stroomt.

Elektrische stroom is een stroming van elektrische ladingen. Elektrische **spanning** is de kracht die deze stroom aanstuurt. Zoals een pomp een hoop water door een pijp stuwt door een verschil in druk te creëren aan beide uiteinden, zo stuwt een batterij ladingen doorheen een weerstand door een spanningsverschil te creëren aan beide kanten van de weerstand. Bovenstaande figuur geeft deze analogie weer.



Dit diagram laat ook zien hoe we pijlen tekenen naast een weerstand of eender welk ander apparaat om een verschil in spanning aan te duiden tussen de twee uiteinden. De kop van de pijl wijst steeds naar de kant waar de spanning het hoogst is.

We hebben gezien dat een verschil in spanning tussen twee uiteinden van een weerstand zorgt voor een stroom doorheen de weerstand. Voor vele materialen zijn spanning en stroomsterkte proportioneel. Dit wordt uitgedrukt door de **Wet van Ohm** en elk object dat hieraan voldoet wordt een weerstand genoemd.

Stelling 1.9 Wet van Ohm

Beschouw V als het verschil in spanning tussen de twee uiteinden van een weerstand (uitgedrukt in volt). I is de stroomsterkte doorheen de weerstand (gemeten in ampère) en de proportionele constante R is de weerstand (gemeten in ohm) van het weerstandsobject. Dan geldt dat

$$V = I \times R.$$

Zoals de waterdruk daalt in een tuinslang des te verder men weg beweegt van de kraan, zo verandert ook de spanning in een circuit wanneer men verder weg beweegt van de spanningsbron.

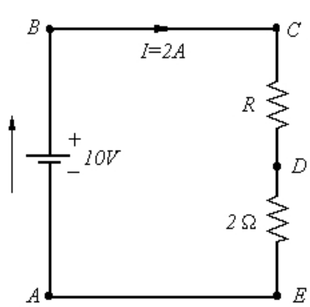
Stelling 1.10 Spanningswet van Kirchhoff

In een gesloten pad van een elektrisch circuit is de som van de dalingen in spanning doorheen de weerstanden gelijk aan de som van de stijgingen in spanning in de spanningsbronnen.

Een gesloten kring is een pad dat eindigt waar het is begonnen.

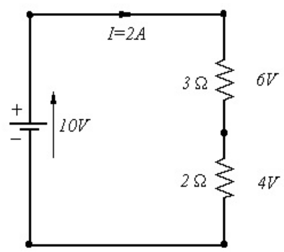
Voorbeeld 1.17

We zullen de Spanningswet van Kirchhoff en de Wet van Ohm gebruiken om de waarde te vinden van de onbekende weerstand R, gegeven dat er 2 ampère stroom door het circuit loopt.

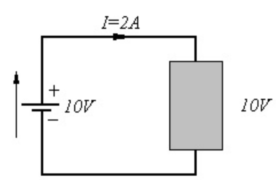


Laat ons de elektrische stroming volgen, zijnde in wijzersin, doorheen het circuit. Wanneer we starten in A en stellen dat de spanning in dat punt 0 is, dan moet de spanning 10 volt zijn in B, omdat de batterij fungeert als een pomp die een hogere druk creëert aan de + zijde dan aan de − zijde. In C is de spanning nog altijd 10 volt, maar ze daalt wanneer we naar D gaan doordat ze door weerstand R gaat. Op weg naar E daalt ze opnieuw door de weerstand van 2 ohm. Vervolgens moet deze 0 zijn om terug uit te komen bij punt A (de spanning verandert niet doorheen een ideale draad).

Gebruikmakend van de Wet van Ohm in de vorm $V = I \times R$ vinden we dat de IR (spanning) daling doorheen de 2 weerstanden gelijk is aan $(2A) \times (2\Omega) = 4V$. Dan is, wegens de Spanningswet van Kirchhoff, de daling in de onbekende weerstand gelijk aan $10V - 4V = 6V$. Omdat $I = 2A$ volgt er uit de Wet van Ohm, $R = V/I$, dat $R = 3\Omega$. De resultaten worden nog eens samengevat in deze figuur.



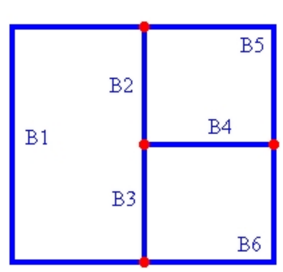
Bemerk de richtingen van de spanningspijlen doorheen elk van de apparaten. Ook het feit dat de daling in spanning doorheen de twee weerstanden proportioneel is met hun weerstanden is interessant om op te merken. Dit wordt de **Spanningsdeler Regel** genoemd. Deze regel komt van pas in vele situaties. Veronderstel dat we bovenstaand circuit vervangen door het circuit hieronder gegeven.



Stel dat we niet weten wat er in de “zwarte doos” zit, maar dat we weten dat de stroomsterkte die in de zwarte doos gaat $2A$ is en de spanning erdoor $10V$. Dan weten we via de Wet van Ohm, $R = V/I$, dat de zwarte doos een weerstand heeft van 5Ω. Bemerk dat dit dus exact de som is van de twee weerstanden in het originele circuit. In het algemeen geldt dat twee weerstanden R_1 en R_2, die in serie geschakeld zijn, kunnen vervangen worden door één enkele weerstand R_{eq}, waarvan de weerstand gelijk is aan de som van de twee weerstanden: $R_{eq} = R_1 + R_2$. ⊠

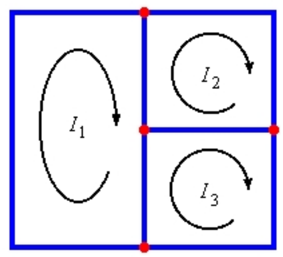
Vertakkingen en Kringstromen

In dit diagram hebben we alle weerstanden en spanningsbronnen weggelaten zodat we onze aandacht kunnen richten op de topologie van het netwerk (zijnde de structuur van het circuit) en het tellen van diens knooppunten en vertakkingen.



"Een netwerk oplossen" betekent het vinden van de stroomsterkte die door elke afzonderlijke vertakking van het netwerk stroomt. Aangezien dit circuit 6 vertakkingen heeft, moeten we dus 6 stromen berekenen.

Kringstromen bieden een meer economische insteek op het beschrijven van de stroom doorheen een netwerk. De stromen in al de 6 vertakkingen kunnen beschreven worden in termen van slechts 3 kringen, zoals aangeduid op de figuur hieronder. Een kringstroom wordt gedefinieerd als constante stroom die doorheen een gesloten kring loopt. Een gesloten kring is een pad doorheen het netwerk dat eindigt waar het start.



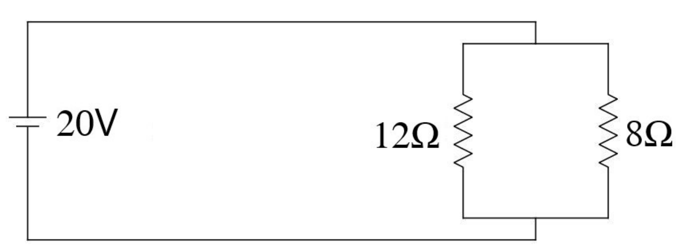
Elke vertakkingsstroom wordt gegeven door een algebraïsche som van alle kringstromen in die vertakking. Met algebraïsche som bedoelen we dat het teken en de richting van de kringstroom in rekening dienen genomen te worden in de optelling.

Berekening van Vertakkingsstromen in Elektrische Netwerken

Stelsels van lineaire vergelijkingen worden gebruikt om de vertakkings- en kringstromen te berekenen in elektrische netwerken. We beginnen met de berekeningen van de vertakkingsstroom, dewelke het meest eenvoudig is van de twee. Bij deze methode stellen we een stelsel vergelijkingen op waarin de onbekenden de vertakkingsstromen zijn en lossen we het stelsel op. De stappen in de methode voor de vertakkingsstromen zijn:

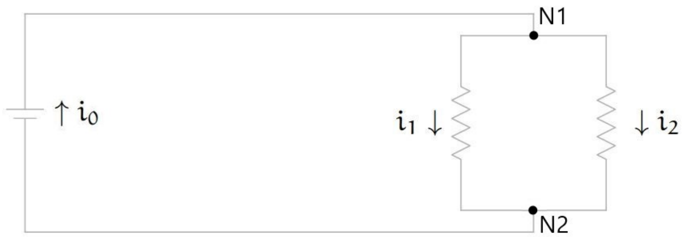
1. Tel het aantal nodige vertakkingsstromen. Noem dit aantal n.
2. Noem de n vertakkingsstromen i_1, i_2,..., i_n en teken deze op het diagram.
3. Schrijf Kirchhoff's Stromingswet neer voor elk knooppunt en Kirchhoff's Spanningswet voor elke gesloten kring. Na vereenvoudiging is het resultaat een stelsel van lineaire vergelijkingen.
4. Los het stelsel van lineaire vergelijkingen op met één van de methoden die we in dit hoofdstuk behandeld hebben.

Voorbeeld 1.18
We starten met een netwerk met twee weerstanden die parallel geschakeld zijn.



Zoals we kunnen zien op de figuur zijn er 3 vertakkingen. We benoemen de vertakkingen als volgt. Noteer de stroomsterkte doorheen de linkertak van het parallelle gedeelte als i_1 en diegene door de rechtertak als i_2. Noteer de stroomsterkte doorheen de batterij als i_0.

Bemerk dat we de richting van de stroom niet nodig hebben, omdat we de richting kunnen omkeren zonder dat de structuur van het netwerk verandert.



We passen eerst Kirchhoff's Stromingswet toe in elk knooppunt. De splitsing rechtsboven, N1, levert op dat $i_0 = i_1 + i_2$. Toepassing op de onderste splitsing, N2, geeft $i_1 + i_2 = i_0$.

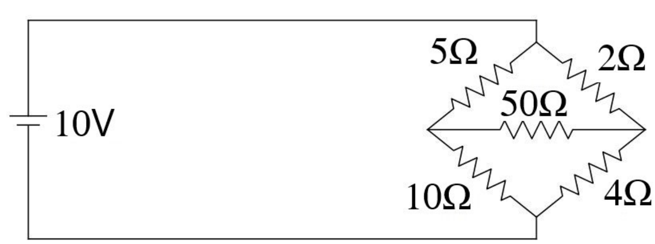
Daarna passen we Kirchhoff's Spanningswet toe op elke gesloten kring. Op het circuit dat vanuit de bovenkant van de batterij, langs de linkertak van het parallelle gedeelte, terugcirkelt naar de onderkant van de batterij is de toename in spanning 20 terwijl de daling $i_1 \cdot 12$ bedraagt, dus de spanningswet levert op dat $12i_1 = 20$. Tegelijkertijd levert dezelfde methode, maar nu door de gesloten kring doorheen de rechterkant van het parallelle gedeelte, op dat $8i_2 = 20$. Het circuit dat door het rechtergedeelte gaat en terugkeert via het linkergedeelte heeft een toename van 0 spanning en een daling van $8i_2 - 12i_1$. De doorstroomrichting is hierin minder van belang. Hieruit volgt dat $8i_2 - 12i_1 = 0$. Als eindresultaat bekomen we:

$$\begin{aligned} i_0 - i_1 - i_2 &= 0, \\ -i_0 + i_1 + i_2 &= 0, \\ 12i_1 &= 20, \\ 8i_2 &= 20, \\ -12i_1 + 8i_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

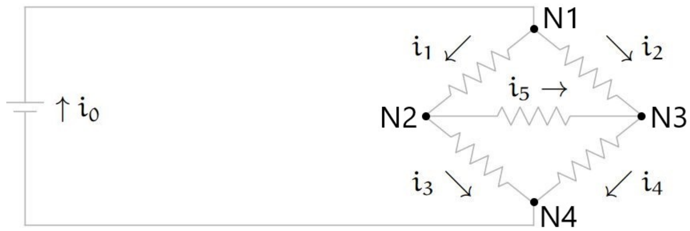
De oplossing is $i_0 = 25/6$, $i_1 = 5/3$, en $i_2 = 5/2$, telkens in ampère. (Daarnaast blijkt dus dat er in de praktijk ook overbodige vergelijkingen kunnen optreden.) ⊠

Voorbeeld 1.19

De Wetten van Kirchhoff stellen ons in staat om de elektrische eigenschappen van zeer complexe netwerken te bepalen. Het volgende diagram toont vijf weerstanden met waarden uitgedrukt in ohm, in een serie-parallel opstelling.



Dit staat bekend als een **Wheatstone Brug**. Om het netwerk te analyseren plaatsen we de pijlen in de volgende richtingen.



De Stromingswet van Kirchhoff, toegepast op knooppunten N1 in de top, N2 aan de linkerkant, N3 aan de rechterkant en N4 aan de onderkant, geeft volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2, \\ i_1 &= i_3 + i_5, \\ i_2 + i_5 &= i_4, \\ i_3 + i_4 &= i_0\,. \end{aligned}$$

Kirchhoff's Spanningswet toepassen op de binnenste kring (i_0 naar i_1 naar i_3 naar i_0), de buitenste kring (i_0 naar i_2 naar i_4 naar i_0) en de bovenste en onderste kringen die de batterij niet omvatten, geeft als vergelijkingen

$$\begin{aligned} 5i_1 + 10i_3 &= 10, \\ 2i_2 + 4i_4 &= 10, \\ 5i_1 + 50i_5 - 2i_2 &= 0, \\ 50i_5 + 4i_4 - 10i_3 &= 0. \end{aligned}$$

Deze volstaan om de oplossing te bepalen: $i_0 = 7/3$, $i_1 = 2/3$, $i_2 = 5/3$, $i_3 = 2/3$, $i_4 = 5/3$, en $i_5 = 0$. ⊠

We kunnen vele soorten netwerken op deze manier doorgronden. Zo kunnen we bijvoorbeeld een aantal netwerken van straten analyseren[2].

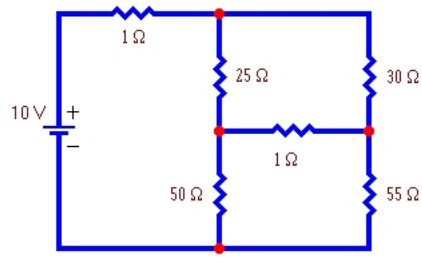
Berekening van Kringstromen in Elektrische Netwerken

In deze methode stellen we een stelsel vergelijkingen op waarin de kringstromen de rol van onbekenden opnemen, en lossen deze op. De stromen in de verschillende vertakkingen van het circuit worden dan eenvoudig bepaald vanuit de kringstromen. De stappen in de methode voor de kringstromen zijn de volgende:

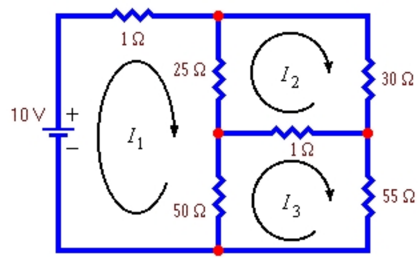
1. Tel het aantal kringstromen dat nodig is. Noem dit aantal n.
2. Kies m onafhankelijke kringstromen en noem deze I_1, I_2, ..., I_m. Teken ze op het diagram.
3. Schrijf Kirchhoff's Stromingswet neer voor elke kring. Het eindresultaat, na simplificatie, is het stelsel van lineaire vergelijkingen.
4. Los het stelsel van lineaire vergelijkingen op via de methoden uit dit hoofdstuk.
5. Reconstrueer de vertakkingsstromen uit de kringstromen.

[2]Bekijk bijvoorbeeld https://www.youtube.com/watch?v=8Kg21jBCm-k voor een goed inleidend voorbeeld.

Voorbeeld 1.20
We zoeken de stroomsterkte in elk van de vertakkingen van dit circuit.



Het aantal benodigde kringstromen is 3. We zullen volgende keuze maken voor de kringstromen.



Schrijf Kirchhoff's Spanningswet uit voor elk van deze kringen. In het bijzonder zien we dat in de linkerkring de spanning van de batterij $10V$ is. Dit is dan ook de totale spanning die door de weerstanden in de linkse kring loopt. Er zitten drie weerstanden vervat in deze kring. De weerstand van 1Ω is de enige die beïnvloed wordt door I_1. De andere twee weerstanden worden beïnvloed door twee kringstromen, in tegengestelde richting doorheen de weerstand. We dienen daarom het verschil te nemen van de kringstromen, rekening houdend met de stroomrichting. Uiteindelijk vinden we voor de linkerkring dat $1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) = 10$. Het volledige stelsel ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned}
1I_1 + 25(I_1 - I_2) + 50(I_1 - I_3) &= 10, \\
25(I_2 - I_1) + 30I_2 + 1(I_2 - I_3) &= 0, \\
50(I_3 - I_1) + 1(I_3 - I_2) + 55I_3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Na groepering van de termen geeft dit

$$\begin{aligned}
76I_1 - 25I_2 - 50I_3 &= 10, \\
-25I_1 + 56I_2 - 1I_3 &= 0, \\
-50I_1 - 1I_2 + 106I_3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

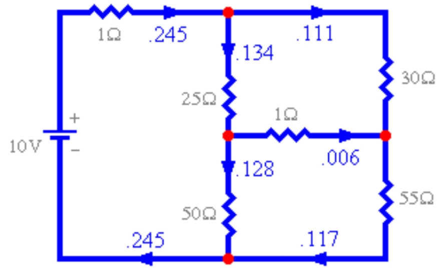
Met behulp van computersoftware lossen we het stelsel vergelijkingen op, met als resultaat de volgende oplossing voor de kringstromen (uitgedrukt in ampère):

$$I_1 = 0.245\,, \qquad I_2 = 0.111\,, \qquad I_3 = 0.117\,.$$

Om de vertakkingsstromen te verklaren, stellen we

$$\begin{aligned}
i_1 &= I_1 - I_2 = 0.134, \\
i_2 &= I_1 - I_3 = 0.128, \\
i_3 &= I_3 - I_2 = 0.006.
\end{aligned}$$

Reconstructie van de vertakkingsstromen uit de kringstromen geeft de resultaten in de volgende figuur.



⊠

Sectie 1.5 Voorbereiding Werkcollege

1. De uitgebreide matrix van een lineair stelsel werd via rijbewerkingen omgezet in volgende vorm.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

   Bepaal of het stelsel oplosbaar is.

2. Voor welke waarden van h en k is het volgende stelsel oplosbaar?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = h, \\ -6x_1 + 3x_2 = k. \end{cases}$$

3. Zoek de algemene oplossing voor het lineair stelsel met als uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Bepaal de algemene oplossing voor het stelsel

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2\,. \end{cases}$$

5. Stel dat een 4×7 coëfficiëntenmatrix voor een stelsel van lineaire vergelijkingen 4 pivotkolommen heeft. Is het stelsel dan oplosbaar? Indien het stelsel oplosbaar is, hoeveel oplossingen zijn er in dat geval?

Sectie 1.6 Oefeningen

Oplossen van stelsels van lineaire vergelijkingen

1. Bepaal de oplossing van de onderstaande stelsels en geef een meetkundige interpretatie van deze oplossing.

(a) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 7 \\ -2x_1 - 7x_2 = -5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 = -4 \\ -4x_1 + 8x_2 = 8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -3x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$

2. Hebben de drie rechten $x_1 - 4x_2 = 1$, $2x_1 - x_2 = -3$ en $-x_1 - 3x_2 = 4$ een gemeenschappelijk snijpunt? Bepaal dit punt indien het bestaat.

3. Bepaal de oplossing van de onderstaande stelsels en geef een meetkundige interpretatie van deze oplossing. Noteer indien mogelijk de oplossing in parametrische vectorvorm.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 = -8 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 6 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 8x_1 - x_2 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 7 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$

4. Hebben de drie vlakken $2x_1+4x_2+4x_3 = 4$, $x_2-2x_3 = -2$ en $2x_1+3x_2 = 0$ een gemeenschappelijk snijpunt? Bepaal dit punt indien het bestaat.

5. Schrijf alle oplossingen van $A\vec{x} = \vec{0}$ in parametrische vectorvorm, waarbij A de gegeven matrix is. Geef een meetkundige interpretatie van de oplossing.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -4 \\ 2 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. De onderstaande matrix is de gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix van een stelsel lineaire vergelijkingen. Noteer op basis van deze matrix de oplossing van dit stelsel in parametrische vectorvorm.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Veronderstel dat elke matrix de uitgebreide matrix A_b is van een stelsel lineaire vergelijkingen, waarbij $\blacksquare$ een getal voorstelt verschillend van 0 en $*$ een willekeurig getal. Bepaal of het stelsel consistent is. Indien dit zo is, bepaal dan of de oplossing uniek is.

(a) $A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$

(b) $A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$

(c) $A_b = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$

8. Beschouw de onderstaande matrices. Bepaal de waarde(n) van h waarvoor de gegeven matrix de uitgebreide matrix is van een consistent, lineair stelsel.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & h & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -4 & h & 8 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & h \\ -6 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

9. Voor welke waarde(n) van de parameter(s) hebben de onderstaande stelsels geen oplossing? Wanneer is er een unieke oplossing? In welk geval zijn er oneindig veel oplossingen?

(a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + hx_2 = k \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + m\,x_3 = 1 \\ x_1 + m\,x_2 + x_3 = 0 \\ m\,x_1 + x_2 + x_3 = m + 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 + mx_2 + 2x_3 = m \\ 2x_1 + (2m-1)x_2 + 4x_3 = 2(m-1) \\ mx_1 + x_2 + mx_3 = 2 \end{cases}$

10. Gegeven is een matrix A. Heeft de vergelijking $A\vec{x} = \vec{0}$ een oplossing verschillend van de nuloplossing? Heeft de vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ tenminste één oplossing voor elke mogelijke $\vec{b}$?

(a) A is een 3×3 matrix met drie pivotposities.

(b) A is een 4×4 matrix met drie pivotposities.

(c) A is een 2×5 matrix met twee pivotposities.

(d) A is een 3×2 matrix met twee pivotposities.

11. Beschouw de onderstaande matrices A en vectoren $\vec{\boldsymbol{b}}$. Toon aan dat de vergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ niet voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing heeft. Beschrijf de verzameling van alle vectoren $\vec{\boldsymbol{b}}$ waarvoor $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ wél een oplossing heeft.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

12. Stel drie verschillende uitgebreide matrices op voor lineaire systemen met als oplossingsverzameling $\{(-2, 1, 0)\}$.

13. De oplossingen (x, y, z) van een lineaire vergelijking

$$ax + by + cz = d, \qquad \text{met} \quad a, b, c \text{ niet allen } 0,$$

vormen een vlak in $\mathbb{R}^3$. Geef een voorbeeld van een verzameling van drie vlakken die

   (a) snijden in een punt,

   (b) snijden in een rechte,

   (c) geen gemeenschappelijke punten hebben.

14. Construeer een 2×3 matrix A die niet in echelonvorm staat en waarvoor

   (a) de oplossing van $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ een rechte in $\mathbb{R}^3$ is,

   (b) de oplossing van $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ een vlak in $\mathbb{R}^3$ is.

15. Zoek de gereduceerde echelonvorm van een 3×3 matrix A zodanig dat enkel de eerste twee kolommen van A pivotkolommen zijn en

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16. Zijn de onderstaande beweringen waar of vals? Als een bewering waar is, geef dan een woordje uitleg. Als een bewering vals is, geef dan een tegenvoorbeeld.

   (a) Een lineair stelsel waarbij de coëfficiëntenmatrix een 3×5 matrix is en drie pivotkolommen heeft, is altijd consistent.

   (b) Een lineair stelsel waarbij de uitgebreide matrix een 3×5 matrix is en de vijfde kolom een pivotkolom is, is altijd inconsistent.

17. Een stelsel met minder vergelijkingen dan onbekenden wordt 'ondergedetermineerd' genoemd. Wat kan je zeggen over het consistent zijn en het aantal oplossingen van dergelijk stelsel?

18. Een stelsel met meer vergelijkingen dan onbekenden wordt 'overgedetermineerd' genoemd. Wat kan je zeggen over het consistent zijn en het aantal oplossingen van dergelijk stelsel?

19. Zijn de onderstaande uitspraken waar of vals voor een $m \times n$ matrix A?

   (a) Als elke rij van A een pivotpositie heeft, dan heeft $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ enkel de nuloplossing.

   (b) Een stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ is altijd consistent.

   (c) Het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ kan inconsistent zijn, zelfs als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ consistent is.

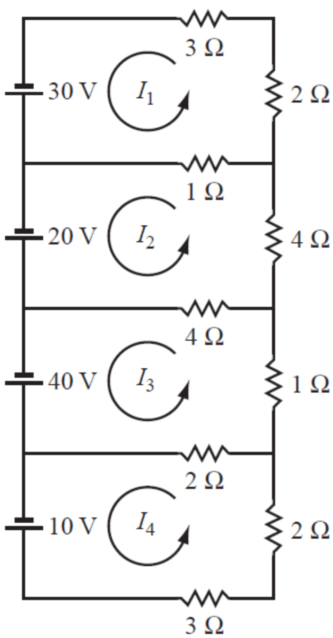
   (d) Het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ kan een unieke oplossing hebben als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ meerdere oplossingen heeft.

   (e) Het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ kan een unieke oplossing hebben als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ meerdere oplossingen heeft.

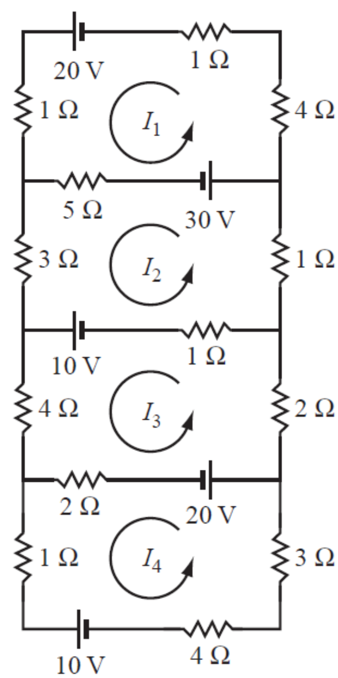
Toepassing: netwerken analyseren

20. Bepaal voor de onderstaande kringen de stroom in elke lus.

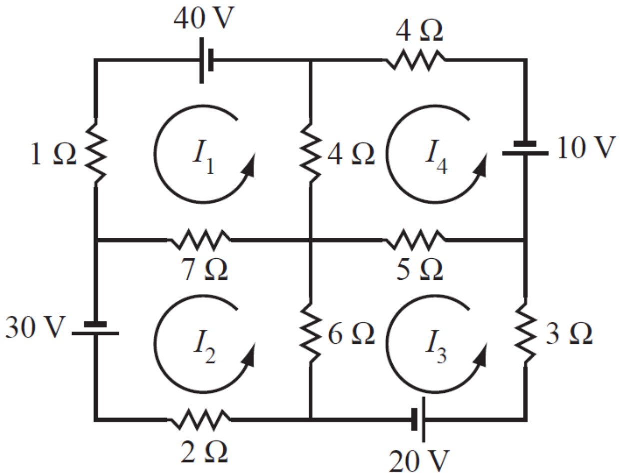
   (a)



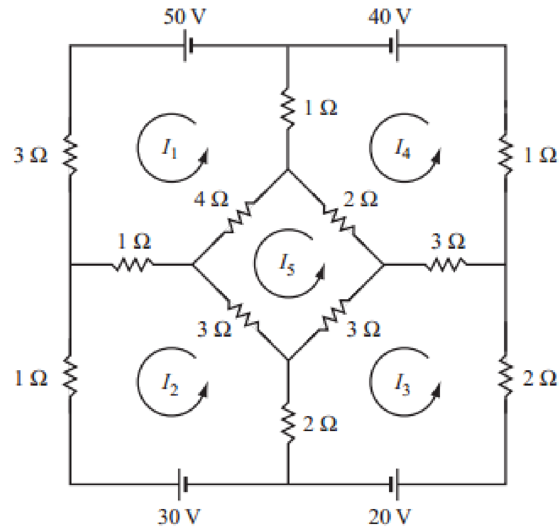
   (b)



(c)

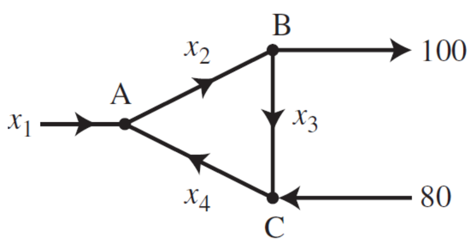


(d)

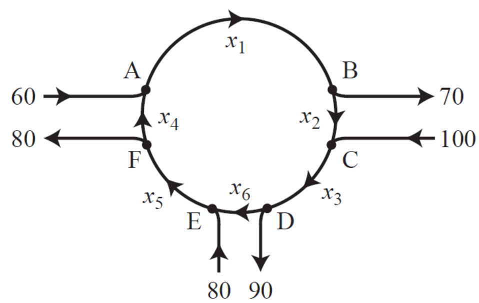


21. Bepaal het algemene stroompatroon van het weergegeven netwerk. Veronderstel dat alle stromen niet-negatief zijn. Wat is de kleinst mogelijke waarde voor x_4?

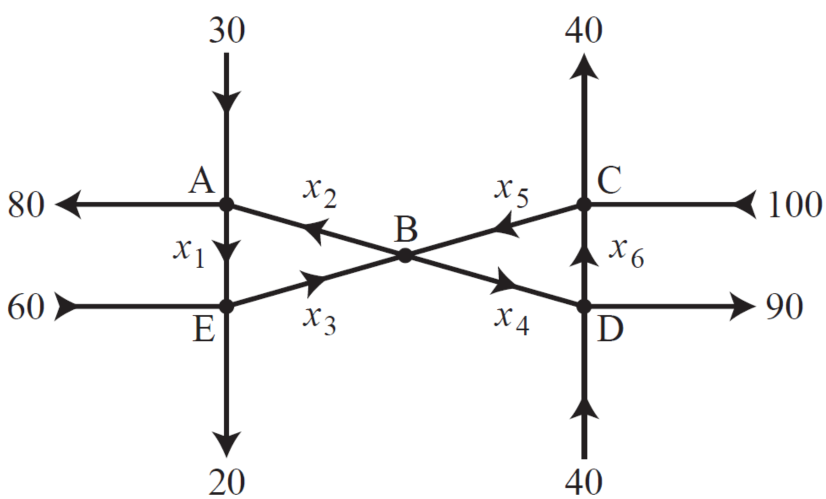
(a)



(b)



22. Beschouw het onderstaand verkeersnetwerk.



(a) Bepaal het algemene stroompatroon van het weergegeven netwerk.

(b) Veronderstel dat alle stromen niet-negatief zijn. Wat is de kleinst mogelijke waarde voor x_2, x_3, x_4 en x_5?

Hoofdstuk 2
Vector- en Matrixvoorstelling voor Lineaire Stelsels

In het vorige hoodstuk hebben we reeds sporadisch met vectoren gewerkt. In dit hoofdstuk gaan we dieper in op de eigenschappen van vectoren en bereiden we ons ondertussen voor op enkele fundamentele concepten, die zullen volgen in de komende hoofdstukken. We zullen onder andere een connectie maken tussen een lineaire combinatie en een stelsel van lineaire vergelijkingen in Stelling 2.4. Deze connectie zal de weg effenen voor een dieper begrip van stelsels. Op het einde van dit hoofdstuk bespreken we een toepassing in de chemie waar de vectornotatie voor stelsels van lineaire vergelijkingen erg nuttig is.

Sectie 2.1 Vectorbewerkingen en Vectorvoorstellingen

Veronderstel dat $\mathbb{R}^m$ de ruimte is van vectoren met m reële componenten. Hieronder geven we twee definities die zullen terugkeren doorheen heel de cursus.

Definitie 2.1 Optelling van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$. De **som** van $\vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$ is de vector $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ bepaald door

$$[\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}]_i = [\vec{\boldsymbol{u}}]_i + [\vec{\boldsymbol{v}}]_i \,, \qquad\qquad \text{met} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Voorbeeld 2.1
Als

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

dan

$$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) \\ -3+5 \\ 4+2 \\ 2+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$\boxtimes$

De tweede bewerking vereist twee verschillende types objecten, een getal en een vector, en combineert deze om een nieuwe vector te construeren. In deze context zullen we het getal een **scalair** noemen om te benadrukken dat het niet om een vector gaat.

Definitie 2.2 Scalaire Vermenigvuldiging van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$ en $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan is de **scalaire vermenigvuldiging** van $\vec{\boldsymbol{u}}$ met α de vector $\alpha\vec{\boldsymbol{u}}$ gedefinieerd door

$$[\alpha\vec{\boldsymbol{u}}]_i = \alpha\,[\vec{\boldsymbol{u}}]_i\,, \qquad\qquad \text{met} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Voorbeeld 2.2
Als

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

en $\alpha = 6$, dan

$$\alpha\vec{\boldsymbol{u}} = 6\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(3) \\ 6(1) \\ 6(-2) \\ 6(4) \\ 6(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \\ -12 \\ 24 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

$\boxtimes$

Definitie 2.3 Scalair Product van Kolomvectoren

Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$. Dan is het **scalair product** van $\vec{\boldsymbol{u}}$ met $\vec{\boldsymbol{v}}$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= [\vec{\boldsymbol{u}}]_1 \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_1 + [\vec{\boldsymbol{u}}]_2 \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_2 + \ldots [\vec{\boldsymbol{u}}]_m \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i \cdot [\vec{\boldsymbol{v}}]_i \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.3

Als

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dan is het scalair product

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot (-8) \\ &= -36\end{aligned}$$

⊠

Definitie 2.4 Norm van een Kolomvector

Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$. Dan is de **L2-norm** van $\vec{\boldsymbol{u}}$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned}\|\vec{\boldsymbol{u}}\| &= \sqrt{[\vec{\boldsymbol{u}}]_1^2 + [\vec{\boldsymbol{u}}]_2^2 + \ldots + [\vec{\boldsymbol{u}}]_m^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.4

Als

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

dan zijn de normen

$$\begin{aligned}\|\vec{\boldsymbol{u}}\| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} \\ &= 30\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\|\vec{\boldsymbol{v}}\| &= \sqrt{5^2 + 6^2 + (-7)^2 + (-8)^2} \\ &= 174\end{aligned}$$

⊠

De L2-norm is dus altijd een positief getal, dat groter wordt als de componenten van de vector (in absolute waarde) groter worden. De norm kan geïnterpreteerd worden als de lengte van de vector.

Er bestaan ook andere normen dan de L2-norm, maar deze vallen buiten het bestek van deze cursus. De L2-norm wordt ook vaak kortweg de norm genoemd.

Als we Definitie 2.4 naast Definitie 2.3 leggen, zien we dat de norm van een vector gelijk is aan de vierkantswortel van het scalair product van de vector met zichzelf:

$$\begin{aligned}\|\vec{\boldsymbol{u}}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m} [\vec{\boldsymbol{u}}]_i^2} \\ &= \sqrt{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.5

Probeer zelf: Gegeven de vectoren $\vec{s} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{t} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, en $\vec{w} = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$. Teken de vectoren in het xy-vlak, en bereken de norm van elke vector en het scalair product van elk mogelijk paar van vectoren (er zijn tien verschillende paren te vormen).

Wat valt je op? Wanneer is het scalair product groot of klein, wanneer is het positief of negatief, en wanneer is het 0? ⊠

Stelling 2.1 Meetkundige interpretatie van het scalair product van vectoren

Veronderstel dat $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$. Het scalair product is gelijk aan het product van de normen van de vectoren en de cosinus van de hoek tussen de vectoren.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\alpha$$

met α de hoek tussen de vectoren.

Deze stelling heeft een aantal belangrijke gevolgen:

- Als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in dezelfde richting wijzen, is $\alpha = 0$, en is het scalair product gelijk aan het product van de normen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- Als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ in tegengestelde richting wijzen, is $\alpha = \pi$, en is het scalair product gelijk aan het tegengestelde van het product van de normen: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
- Als $\vec{u}$ en $\vec{v}$ loodrecht op elkaar staan, is $\alpha = \pm\pi/2$, en is het scalair product 0.
- Als beide normen verschillend van 0 zijn, kan de hoek tussen de vectoren snel berekend worden: $\alpha = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

Eigenschappen van Vectoren

Met de definities voor de optelling van vectoren en de scalaire vermenigvuldiging kunnen we een aantal eigenschappen van deze bewerkingen opsommen en aantonen, alsook sommige eigenschappen die de interactie tussen beide behandelen. We vatten tien van deze eigenschappen samen om later op terug te keren.

Stelling 2.2 Eigenschappen van Kolomvectoren (Deel 1)

Veronderstel dat $\mathbb{R}^m$ de verzameling van kolomvectoren van grootte m is en de optelling en scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie 2.1 en Definitie 2.2. Dan geldt het volgende.

- **Gesloten onder de Optelling**
  Als $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$.
- **Gesloten onder de Scalaire Vermenigvuldiging**
  Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$.
- **Commutativiteit van de Optelling**
  Als $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}}$.

...

Stelling 2.3 Eigenschappen van Kolomvectoren (Deel 2)

...

- **Associativiteit van de Optelling**
  Als $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\vec{\boldsymbol{u}} + (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = (\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) + \vec{\boldsymbol{w}}$.
- **Nulvector**
  Er bestaat een vector $\vec{\boldsymbol{0}}$, genaamd de **nulvector**, waarvoor geldt $\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{u}}$ voor alle $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$.
- **Tegengesteld element**
  Als $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$, dan bestaat er een vector $-\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$ waarvoor geldt dat $\vec{\boldsymbol{u}} + (-\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{0}}$.
- **Associativiteit voor de Scalaire Vermenigvuldiging**
  Als α, $\beta \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha(\beta\vec{\boldsymbol{u}}) = (\alpha\beta)\vec{\boldsymbol{u}}$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Vectoren**
  Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$, dan $\alpha(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) = \alpha\vec{\boldsymbol{u}} + \alpha\vec{\boldsymbol{v}}$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Scalairen**
  Als α, $\beta \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$, dan $(\alpha + \beta)\vec{\boldsymbol{u}} = \alpha\vec{\boldsymbol{u}} + \beta\vec{\boldsymbol{u}}$.
- **Neutraal element**
  Als $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^m$, dan $1\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}$.

Bewijs Als voorbeeld bewijzen we de voorlaatste eigenschap. Voor de vectoren tonen we elementsgewijs aan dat

$$\begin{aligned}
[(\alpha+\beta)\vec{\boldsymbol{u}}]_i &= (\alpha+\beta)\,[\vec{\boldsymbol{u}}]_i && \text{Definitie 2.2} \\
&= \alpha\,[\vec{\boldsymbol{u}}]_i + \beta\,[\vec{\boldsymbol{u}}]_i && \text{Distributiviteit in } \mathbb{R} \\
&= [\alpha\vec{\boldsymbol{u}}]_i + [\beta\vec{\boldsymbol{u}}]_i && \text{Definitie 2.2} \\
&= [\alpha\vec{\boldsymbol{u}} + \beta\vec{\boldsymbol{u}}]_i && \text{Definitie 2.1}\,.
\end{aligned}$$

Hieruit volgt de eigenschap. Het bewijs van de andere negen eigenschappen laten we over als oefening voor de lezer. ■

Lineaire Combinaties

Nu volgt een belangrijk begrip dat zonder twijfel een formele definitie verdient.

Definitie 2.5 Lineaire Combinatie van Kolomvectoren

Voor n gegeven vectoren $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$ uit $\mathbb{R}^m$ en n scalairen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ is hun **lineaire combinatie** de vector

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{u}}_3 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{u}}_n.$$

Deze definitie neemt een gelijk aantal scalairen en vectoren, die ze combineert via de twee nieuwe bewerkingen (scalaire vermenigvuldiging en de optelling van vectoren) en zo één nieuwe vector construeert van dezelfde grootte als de originele vectoren. Wanneer in een definitie of stelling gesproken wordt over een lineaire combinatie, denk dan aan de aard van de elementen waaruit de lineaire combinatie bestaat (de lijst van scalairen en vectoren), en de aard van het eindresultaat (een enkele vector).

Voorbeeld 2.6
Stel dat

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = -4 \qquad \alpha_3 = 2 \qquad \alpha_4 = -1$$

en

$$\vec{\boldsymbol{u}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{u}}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{u}}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

dan is hun lineaire combinatie

$$\begin{aligned} \alpha_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{u}}_3 + \alpha_4\vec{\boldsymbol{u}}_4 &= (1)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 \\ -12 \\ 0 \\ 8 \\ -4 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \\ -7 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 \\ -6 \\ 4 \\ 4 \\ -9 \\ -10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Een andere lineaire combinatie, met dezelfde verzameling vectoren maar met verschillende scalairen, krijgen we als we

$$\beta_1 = 3 \qquad \beta_2 = 0 \qquad \beta_3 = 5 \qquad \beta_4 = -1$$

nemen en de lineaire combinatie

$$\begin{aligned}\beta_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \beta_2\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \beta_3\vec{\boldsymbol{u}}_3 + \beta_4\vec{\boldsymbol{u}}_4 &= (3)\begin{bmatrix}2\\4\\-3\\1\\2\\9\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}6\\3\\0\\-2\\1\\4\end{bmatrix} + (5)\begin{bmatrix}-5\\2\\1\\1\\-3\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\7\\1\\3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}6\\12\\-9\\3\\6\\27\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-25\\10\\5\\5\\-15\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-2\\5\\-7\\-1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-22\\20\\1\\1\\-10\\24\end{bmatrix}\end{aligned}$$

vormen. Bemerk hoe we de vectoren onveranderd hebben gelaten en een andere verzameling scalairen hebben gebruikt om twee verschillende vectoren te construeren. Construeer nu zelf ook een aantal nieuwe lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$, $\vec{\boldsymbol{u}}_4$. Welke vectoren heb je zoal kunnen construeren? Denk je dat je de vector

$$\vec{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix}13\\15\\5\\-17\\2\\25\end{bmatrix}$$

kan construeren met een gepaste keuze voor de vier scalairen? Denk je dat je *elke* vector uit $\mathbb{R}^6$ kan construeren via gepaste keuze voor de scalairen? Deze laatste twee vragen zijn fundamenteel. De tijd nemen om ze nu te beantwoorden zal zeer nuttig blijken voor wat volgt in Stelling 2.5. ⊠

Voorbeeld 2.7

In dit voorbeeld zullen we Voorbeeld 1.12 herschrijven als vectoren, gelijkheden van vectoren en lineaire combinaties. We kunnen het stelsel van $m = 3$ vergelijkingen schrijven als de volgende vectorvergelijking:

$$\begin{bmatrix}-7x_1 - 6x_2 - 12x_3\\5x_1 + 5x_2 + 7x_3\\x_1 + 4x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-33\\24\\5\end{bmatrix}$$

Vervolgens splitsen we de lineaire uitdrukking aan de linkerkant op, eerst via optelling van vectoren,

$$\begin{bmatrix}-7x_1\\5x_1\\x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-6x_2\\5x_2\\0x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-12x_3\\7x_3\\4x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-33\\24\\5\end{bmatrix}.$$

Nu kunnen we elk van deze $n = 3$ vectoren herschrijven als een scalair veelvoud van een vaste vector, waar de scalair één van de onbekende variabelen is, waardoor het linkerlid omgezet wordt in een lineaire combinatie.

$$x_1 \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

We kunnen nu het probleem van het oplossen van het stelsel vergelijkingen zien als het bepalen van de waarden voor de scalaire veelvouden die voldoen aan de vectorvergelijking. Uit de analyse van Voorbeeld 1.12 weten we dat er slechts één oplossing is. Een snelle manier om dit te verifiëren is door de coëfficiëntenmatrix te rij-reduceren tot de 3×3 eenheidsmatrix. De oplossing voor het stelsel is:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 5 \qquad x_3 = 2.$$

Dus binnen de context van dit voorbeeld kunnen we uitdrukken dat deze waarden voor de variabelen een oplossing zijn door de lineaire combinatie neer te schrijven.

$$(-3) \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Deze drie scalairen zijn overigens de enige scalairen die voldoen aan deze vergelijking, aangezien ze afkomstig zijn van de unieke oplossing.

Merk op hoe de drie vectoren uit dit voorbeeld de kolommen zijn van de coëfficiëntenmatrix van het stelsel vergelijkingen. Dit is al een eerste indicatie van de interactie tussen vectoren die de kolommen van de matrix vormen en de matrix zelf. ⊠

Voorbeeld 2.8

Voorbeeld 1.13 kan geschreven worden als een vectorvergelijking:

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Vervolgens spiltsen we de lineaire vergelijkingen in het linkerlid op via optelling van vectoren:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ 0x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

en herschrijven elk van deze $n = 3$ vectoren als scalair veelvoud van een vaste vector, waarbij de scalair een onbekende variabele is. Zodoende zetten we het linkerlid om in een lineaire combinatie

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Rij-reductie van de uitgebreide matrix van Voorbeeld 1.13 vertelt ons dat het stelsel oplosbaar is en vrije variabelen heeft, waardoor het oneindig veel oplossingen heeft. Zo kunnen oplossingen

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 1$$

en

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 0$$

gebruikt worden om te stellen dat

$$(2)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\8\\5\end{bmatrix}=(3)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(2)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(0)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Negeer hierbij het middelste gedeelte van de vergelijking en verplaats alle termen naar het linkerlid,

$$(2)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(3)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+(-0)\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$\boxtimes$

De twee voorbeelden van hierboven verschaffen ons veel informatie. Door vectoren te gebruiken hebben we een geheel nieuwe manier geïntroduceerd voor het noteren van stelsels vergelijkingen. Het is zeer nuttig om later op deze voorbeelden terug te komen om verbanden te leggen met de leerstof die komen zal. We zullen deze connectie later in meer detail bekijken en vastleggen in een stelling.

Parametrische Vectorvorm voor Oplossingsverzamelingen

Lineaire combinaties maken het ook mogelijk om de oplossingsverzameling van een lineair stelsel op een meer systematische manier neer te schrijven. We schrijven de oplossing van een stelsel vergelijkingen als kolomvector. Zo heeft Voorbeeld 1.12 bijvoorbeeld de oplossing $x_1 = -3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, die we nu kunnen herschrijven als

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\5\\2\end{bmatrix},$$

We zullen nu kolomvectoren en lineaire combinaties gebruiken om alle oplossingen van een stelsel van lineaire vergelijkingen op een compacte en leesbare manier neer te schrijven. Eerst bekijken we de volgende twee voorbeelden, die ons motiveren tot de daaropvolgende stelling. Dit is een zeer bruikbare techniek, bijna zo belangrijk als de rij-reductie van een matrix, dus zorg ervoor dat je hier voldoende vertrouwd mee geraakt doorheen deze sectie.

Voorbeeld 2.9

Het lineair stelsel met $m = 5$ vergelijkingen in $n = 7$ variabelen

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 + x_6 + 5x_7 &= 21,\\
x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 &= -5,\\
x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6 - 6x_7 &= -15,\\
3x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 3x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 2x_7 &= -24,\\
-2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 - 9x_7 &= -30,
\end{aligned}$$

heeft de volgende uitgebreide matrix:

$$[A \quad \vec{b}] = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 5 & 21\\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 2 & -5\\ 1 & 2 & -8 & 5 & 1 & 1 & -6 & -15\\ 3 & 3 & -9 & 3 & 6 & 5 & 2 & -24\\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -9 & -30\end{bmatrix}.$$

Via rij-reductie bekomen we de matrix

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 9 & 15 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 4 & 0 & 0 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We bemerken dat deze $r = 4$ niet-nulrijen heeft. Daarnaast geldt $D = \{1, 2, 5, 6\}$ en $F = \{3, 4, 7, 8\}$. De afhankelijke variabelen zijn daarom x_1, x_2, x_5, en x_6. Er zijn ook $n-r = 3$ vrije variabelen, nl. x_3, x_4 en x_7. We zullen een algemene oplossing voor het stelsel uitdrukken op twee verschillende manieren: via een decompositie en via constructie.

Het oplossen van de vergelijkingen voorgesteld door de rij-gereduceerde matrix van de uitgebreide matrix naar de afhankelijke variabelen van elke rij levert, na herschikking, de volgende vectorvergelijking op:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 2x_3 + 3x_4 - 9x_7 \\ -10 + 5x_3 - 4x_4 + 8x_7 \\ x_3 \\ x_4 \\ 11 + 6x_7 \\ -21 - 7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix}.$$

We zullen nu de definities van optelling van vectoren en scalaire vermenigvuldiging aanwenden om deze algemene oplossing te ontleden tot een lineaire combinatie,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2x_3 \\ 5x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_4 \\ -4x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9x_7 \\ 8x_7 \\ 0 \\ 0 \\ 6x_7 \\ -7x_7 \\ x_7 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.1} \\ &= \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.2}. \end{aligned}$$

Deze finale uitdrukking voor de oplossing noemen we de **parametrische vectorvorm** en zal zeer goed van pas komen. Zo kunnen we zeer snel oplossingen afleiden door waarden te kiezen voor de vrije variabelen, om vervolgens de lineaire combinatie te berekenen. We krijgen, als $x_3 = 2$, $x_4 = -4$ en

$x_7 = 3$,

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ 40 \\ 2 \\ -4 \\ 29 \\ -42 \\ 3 \end{bmatrix},$$

of wanneer $x_3 = 5$, $x_4 = 2$, $x_7 = 1$, bekomen we

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (5) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 15 \\ 5 \\ 2 \\ 17 \\ -28 \\ 1 \end{bmatrix},$$

of nog, als $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_7 = 0$, dan is het resultaat

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (0) \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 11 \\ -21 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

We kunnen dus op een compacte manier *alle* oplossingen van het lineaire stelsel uitdrukken met slechts vier vectoren, gegeven dat we een lineaire combinatie opstellen om een oplossingsvector te construeren. ⊠

Sectie 2.2 Span van een verzameling

In de voorgaande paragraaf zagen we hoe we de oplossingsverzameling van een stelsel kunnen beschrijven door alle mogelijke lineaire combinaties van bepaalde vectoren. Dit zal een zeer handige manier blijken te zijn om oneindige verzamelingen vectoren te construeren of te beschrijven, dus gieten we dit idee in de vorm van een definitie.

Definitie 2.6 Span van een Verzameling Kolomvectoren

Gegeven een verzameling van vectoren $S = \{\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \dots, \vec{\boldsymbol{u}}_n\}$. Hun **span**, $\operatorname{Span}(S)$, is de verzameling van alle mogelijke lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, \vec{\boldsymbol{u}}_3, \dots, \vec{\boldsymbol{u}}_n$. In symbolen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Span}(S) &= \{\alpha_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{u}}_3 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{u}}_n \,|\, \alpha_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le n\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{\boldsymbol{u}}_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{R},\, 1 \le i \le n \right\}. \end{aligned}$$

De span is slechts een verzameling van vectoren, alhoewel ze op één geval na steeds oneindig zal zijn. (Wanneer is ze niet oneindig?) We starten dus met een eindige verzameling vectoren S (n vectoren om precies te zijn) en we gebruiken deze eindige verzameling om een oneindige verzameling vectoren, $\mathrm{Span}\,(S)$, te beschrijven. Het verwarren van de *eindige* verzameling S met de *oneindige* verzameling $\mathrm{Span}\,(S)$ is één van de grotere obstakels op weg naar inzicht in de inleidende lineaire algebra. We zullen deze constructie herhaaldelijk tegenkomen. We behandelen daarom eerst enkele voorbeelden om ze gewoon te worden. De meest voordehandliggende vraag die we kunnen stellen bij een verzameling is of een gegeven element van de juiste grootte deel uitmaakt van de verzameling of niet.

Voorbeeld 2.10
Beschouw de verzameling S van vijf vectoren uit $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} \right\}$$

en de oneindige verzameling van vectoren $\mathrm{Span}\,(S)$ bestaande uit alle mogelijke lineaire combinaties van de elementen van S. De volgende vier vectoren zijn met zekerheid elementen van $\mathrm{Span}\,(S)$, aangezien we ze construeren in lijn met Definitie 2.6,

$$\vec{\boldsymbol{w}} = (2)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\2\\28\\10\end{bmatrix},$$

$$\vec{\boldsymbol{x}} = (5)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + (-6)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-26\\-6\\2\\34\end{bmatrix},$$

$$\vec{\boldsymbol{y}} = (1)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\17\\-4\end{bmatrix},$$

$$\vec{\boldsymbol{z}} = (0)\begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Het doel van een verzameling is om objecten met dezelfde eigenschappen te groeperen en objecten die die eigenschappen niet bezitten uit te sluiten. De meest fundamentele vraag omtrent een verzameling is, zoals eerder al vermeld, of een gegeven object een element is van de verzameling of niet. We zullen meer te weten komen over $\mathrm{Span}\,(S)$ door te onderzoeken welke vectoren deel uitmaken van de verzameling en welke niet.

Om te beginnen, is $\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix}-15\\-6\\19\\5\end{bmatrix}$ een element van $\mathrm{Span}\,(S)$?

We vragen of er scalairen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 bestaan zodat

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix}-15\\-6\\19\\5\end{bmatrix}.$$

Gelijkaardig aan wat we gezien hebben in de paragraaf over lineaire combinaties, zien we gelijkenissen tussen het zoeken naar de juiste scalairen en het zoeken naar de oplossing van het stelsel van lineaire vergelijkingen via de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 1 & -1 & -15\\1 & 1 & 3 & 1 & 0 & -6\\3 & 2 & 5 & -1 & 9 & 19\\1 & -1 & -5 & 2 & 0 & 5\end{bmatrix},$$

hetgeen we kunnen rij-reduceren tot

$$\begin{bmatrix}\boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 3 & 10\\0 & \boxed{1} & 4 & 0 & -1 & -9\\0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Hier zien we dat het stelsel oplosbaar is (Stelling 1.5), dus we weten met zekerheid dat er een oplossing *is* voor de vijf scalairen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5. Dit is voldoende bewijs om te kunnen stellen dat $\vec{\boldsymbol{u}} \in \operatorname{Span}(S)$. We kunnen de stelling volledig hard maken door de feitelijke waarden te bepalen. Zo krijgen we

$$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_3 = -2 \qquad \alpha_4 = -3 \qquad \alpha_5 = 2\,.$$

Als we deze waarden invullen in de vergelijking zien we dat

$$(2) \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix}-15\\-6\\19\\5\end{bmatrix},$$

waardoor het expliciet duidelijk is dat $\vec{\boldsymbol{u}} \in \operatorname{Span}(S)$.

We herhalen dit voor een andere vector. Is $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$ een element van $\operatorname{Span}(S)$? We vragen m.a.w. of er scalairen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 bestaan zodat

$$\alpha_1 \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix}7\\3\\5\\-5\end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\2\end{bmatrix} + \alpha_5 \begin{bmatrix}-1\\0\\9\\0\end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Opnieuw zien we hier de analogie met het zoeken naar een oplossing voor het lineaire stelsel vergelijkingen via de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 7 & 1 & -1 & 3\\1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1\\3 & 2 & 5 & -1 & 9 & 2\\1 & -1 & -5 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

die we rij-reduceren tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Hieruit leiden we af dat het stelsel onoplosbaar is, op basis van Stelling 1.5, waardoor we weten dat er geen oplossing bestaat voor de vijf scalairen α_1, α_2, α_3, α_4, α_5. Dit is voldoende bewijs om te kunnen zeggen dat $\vec{v} \notin \mathrm{Span}\,(S)$. ⊠

Voorbeeld 2.11

Begin met de eindige verzameling S van drie vectoren van grootte 3

$$S = \{\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

en beschouw de oneindige verzameling $\mathrm{Span}\,(S)$. De vectoren van S konden eender welke waarden aannemen, maar voor redenen die later duidelijk zullen worden, nemen we hier de drie kolommen van de coëfficiëntenmatrix uit Voorbeeld 1.13. Bemerk eerst, als bij wijze van voorbeeld, dat

$$\vec{v} = (5)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (7)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

in $\mathrm{Span}\,(S)$ bevat zit, aangezien het een lineaire combinatie is van $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$. We noteren dit bondig als $\vec{v} \in \mathrm{Span}\,(S)$. Er is niets bijzonder aan de scalairen $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = 7$, omdat we ze vrij konden kiezen. Herhaal daarom dit deel van het voorbeeld met zelfgekozen waarden voor α_1, α_2, α_3. Wat gebeurt er als we nul kiezen voor alle drie de scalairen?

We weten nu hoe we snel enkele elementen van de verzameling $\mathrm{Span}\,(S)$ kunnen construeren. Een lichtelijk andere vraag dringt zich op wanneer we een vector van de juiste grootte gegeven krijgen en er gevraagd wordt of de vector een element is van $\mathrm{Span}\,(S)$. Is $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ bijvoorbeeld bevat in $\mathrm{Span}\,(S)$? Om deze vraag te kunnen beantwoorden, zoeken we naar scalairen α_1, α_2, α_3 opdat

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{w}.$$

Oplossingen voor deze vectorvergelijking zijn ook oplossingen voor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 8, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 5. \end{aligned}$$

De corresponderende uitgebreide matrix rij-reduceren levert de volgende matrix op

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen (er is een vrije variable, x_3), maar we hebben maar één oplossingsvector nodig. De oplossing

$$\alpha_1 = 2 \qquad\qquad \alpha_2 = 3 \qquad\qquad \alpha_3 = 1$$

geeft ons dat

$$(2)\vec{\boldsymbol{u}}_1 + (3)\vec{\boldsymbol{u}}_2 + (1)\vec{\boldsymbol{u}}_3 = \vec{\boldsymbol{w}}\,,$$

waardoor we snel kunnen afleiden dat $\vec{\boldsymbol{w}}$ daadwerkelijk bevat is in $\operatorname{Span}(S)$. Bemerk dat er oneindig veel manieren zijn om tot een juist antwoord op deze vraag te komen. We kunnen een andere oplossing kiezen. Deze keer kiezen we nul voor de vrije variabele,

$$\alpha_1 = 3 \qquad\qquad \alpha_2 = 2 \qquad\qquad \alpha_3 = 0\,,$$

waaruit we afleiden dat

$$(3)\vec{\boldsymbol{u}}_1 + (2)\vec{\boldsymbol{u}}_2 + (0)\vec{\boldsymbol{u}}_3 = \vec{\boldsymbol{w}}\,.$$

Controle van het rekenwerk in deze tweede vergelijking zorgt ervoor dat er geen twijfel bestaat over dat $\vec{\boldsymbol{w}}$ in deze span bevat zit. Daarnaast zien we ook dat er oneindig veel manieren zijn om ervoor te zorgen dat $\vec{\boldsymbol{w}}$ een element van $\operatorname{Span}(S)$ is.

We stellen nu dezelfde vraag, ditmaal voor een andere vector $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; is $\vec{\boldsymbol{y}} \in \operatorname{Span}(S)$?

We zoeken scalairen α_1, α_2, α_3 waarvoor

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{u}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{u}}_3 = \vec{\boldsymbol{y}}.$$

Oplossingen voor deze vectorvergelijking zijn ook oplossingen voor het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 2, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 4, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Rij-reductie van de bijhorende uitgebreide matrix geeft als resultaat

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

Dit stelsel is onoplosbaar volgens Stelling 1.5 (er staat een leidende 1 in de laatste kolom), waardoor er geen scalairen α_1, α_2, α_3 zijn die een lineaire combinatie van $\vec{\boldsymbol{u}}_1$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2$, $\vec{\boldsymbol{u}}_3$ vormen gelijk aan $\vec{\boldsymbol{y}}$. Er volgt dus dat $\vec{\boldsymbol{y}} \notin \operatorname{Span}(S)$. ⊠

Er zijn drie belangrijke zaken om op te merken aan dit voorbeeld:

1. Het is eenvoudig om vectoren uit $\operatorname{Span}(S)$ te construeren.

2. Het is mogelijk dat sommige vectoren in $\operatorname{Span}(S)$ bevat zitten (zoals $\vec{\boldsymbol{w}}$), terwijl anderen er niet in bevat zijn (zoals $\vec{\boldsymbol{y}}$).

3. Bepalen of een gegeven vector in $\operatorname{Span}(S)$ bevat zit leidt tot het oplossen van een lineair stelsel vergelijkingen en de vraag of dat stelsel oplosbaar is of niet.

Zou je, met een rekenprogramma bij de hand dat stelsels van lineaire vergelijkingen kan oplossen, een programma kunnen opstellen dat kan bepalen of een gegeven vector deel uitmaakt van een gegeven span van vectoren? Dit voorbeeld kwam voort uit de kolommen van de coëfficiëntenmatrix uit Voorbeeld 1.13. Bestudeer de vaststelling dat $\vec{\boldsymbol{v}} \in \operatorname{Span}(S)$ en bekijk of je dit in verband kunt brengen met sommige van de eigenschappen van Voorbeeld 1.13. We raden aan om dezelfde denkoefening te maken voor Voorbeeld 1.12.

Voorbeeld 2.12

Begin met de eindige verzameling B van drie vectoren van grootte 3 die overeenstemmen met de coëfficiëntenmatrix uit Voorbeeld 1.12,

$$R = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\},$$

en beschouw de oneindige verzameling $\operatorname{Span}(R)$. Bemerk eerst, als voorbeeld, dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} = (2)\begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + (4)\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -12 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -10 \end{bmatrix}$$

bevat is in $\operatorname{Span}(R)$, aangezien deze een lineaire combinatie is van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3$. Met andere woorden, $\vec{\boldsymbol{x}} \in \operatorname{Span}(R)$. Probeer zelf een aantal andere waarden voor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ uit en bekijk welke vectoren je kunt bekomen als elementen van $\operatorname{Span}(R)$.

Bekijk nu of een gegeven vector een element is van $\operatorname{Span}(R)$. Is $\vec{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}$ bijvoorbeeld een element van $\operatorname{Span}(R)$? Hiervoor dienen we de gepaste waarden voor de scalairen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ te bepalen zodat

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{z}}\,.$$

Het corresponderende stelsel van lineaire vergelijkingen ziet er als volgt uit:

$$\begin{aligned} -7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 &= -33, \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 24, \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 &= 5\,. \end{aligned}$$

Voor de rij-gereduceerde uitgebreide matrix van het stelsel krijgen we

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel heeft een unieke oplossing, namelijk

$$\alpha_1 = -3 \qquad \alpha_2 = 5 \qquad \alpha_3 = 2\,,$$

waaruit af te leiden valt dat

$$(-3)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (5)\vec{\boldsymbol{v}}_2 + (2)\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{z}}\,.$$

We zijn dus zeker dat $\vec{\boldsymbol{z}}$ in Span (R) zit. Bemerk dat er in dit geval slechts één manier is om deze vraag te beantwoorden, net omdat er een unieke oplossing is voor het stelsel.

We onderzoeken nu een andere vector: is $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}$ een element van Span (R)?

We willen scalairen α_1, α_2, α_3 vinden met

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{x}}\,,$$

waarbij oplossingen voor de vectorvergelijking corresponderen met oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} -7\alpha_1 - 6\alpha_2 - 12\alpha_3 &= -7, \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 &= 8, \\ \alpha_1 + 4\alpha_3 &= -3\,. \end{aligned}$$

Oplossen via de Gauss-Jordan eliminatie van de uitgebreide matrix geeft

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{bmatrix}.$$

De unieke oplossing van het stelsel,

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 2 \qquad \alpha_3 = -1\,,$$

leidt tot de oplossing voor de vectorvergelijking

$$(1)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (2)\vec{\boldsymbol{v}}_2 + (-1)\vec{\boldsymbol{v}}_3 = \vec{\boldsymbol{x}}\,,$$

waardoor geldt dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ zeker in Span (R) zit. Opnieuw is er slechts één mogelijke manier om een lineaire combinatie te maken die aantoont dat $\vec{\boldsymbol{x}} \in \text{Span}\,(R)$. We zouden nog meer vectoren kunnen bekijken om te zien of ze in Span (R) bevat zijn, maar dit biedt weinig meerwaarde. De vraag omtrent lidmaatschap van de verzameling Span (R) laat zich herleiden tot een stelsel van drie vergelijkingen in drie variabelen α_1, α_2, α_3 met een coëfficiëntenmatrix die opgebouwd is uit de vectoren $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, $\vec{\boldsymbol{v}}_3$. Het is deze coëfficiëntenmatrix die aanleiding geeft tot een rij-gereduceerde echelonvorm met een pivotelement in elke kolom, waardoor het stelsel steeds oplosbaar is. (Hier is ze ook uniek, maar dat is hier minder van belang.) We stellen daardoor *altijd* vast dat een vector deel uitmaakt van Span (R), *ongeacht* de keuze van de vector. We bekomen met andere woorden dat elke vector van grootte 3 bevat is in Span (R), of in symbolen Span $(R) = \mathbb{R}^3$. ⊠

Voorbeeld 2.13

Een speciaal geval is de span van een lege verzameling. Voorlopig is het voldoende om te onthouden dat de span van een lege verzameling één element bevat, namelijk de nulvector:

$$\text{Span}\,(\{\}) = \{\vec{\boldsymbol{0}}\}$$

⊠

Sectie 2.3 Matrixvoorstellingen voor Lineaire Stelsels

We weten hoe we vectoren moeten optellen en hoe ze te vermenigvuldigen met scalairen. Door deze twee bewerkingen kunnen we lineaire combinaties maken en een lineair stelsel voorstellen als een vectorvergelijking. In deze sectie zullen we dieper ingaan op het verband met matrices. Op deze manier komen we tot verrassende en belangrijke resultaten.

We beginnen met een definitie van de manier waarop we een vector vermenigvuldigen met een matrix. We vermeldden al meerdere keren het belang van het vormen van lineaire combinaties van de kolommen van de matrix. Een aantal van de vorige voorbeelden tonen ons aan dat iedere oplossing voor een stelsel van lineaire vergelijkingen aanleiding geeft tot een lineaire combinatie van de kolommen van de coëfficiëntmatrix. Dat leidt tot de volgende definitie.

Definitie 2.7 Matrix-Vectorproduct

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix met kolommen $\vec{\boldsymbol{a}}_1$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3$, $\ldots$, $\vec{\boldsymbol{a}}_n$ is:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix}$$

en $\vec{\boldsymbol{u}}$ de vector van grootte n is. Dan is het **matrix-vectorproduct** van A met

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

de lineaire combinatie

$$A\vec{\boldsymbol{u}} = u_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + u_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + u_3\vec{\boldsymbol{a}}_3 + \cdots + u_n\vec{\boldsymbol{a}}_n\,.$$

Het matrix-vectorproduct is dus een andere soort vermenigvuldiging. Merk op dat als we een $m \times n$ matrix vermenigvuldigen met een vector van de grootte n, we een vector van de grootte m creëren. Als A een niet-vierkante matrix is, dan verandert de grootte van de vector. Door al de lineaire combinaties die we tot nu toe uitgevoerd hebben zou deze berekening al vrij bekend moeten aanvoelen.

Voorbeeld 2.14
Veronderstel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

dan

$$A\vec{\boldsymbol{u}} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

⊠

We kunnen nu stelsels van lineaire vergelijkingen voorstellen door een matrix-vectorproduct (Definitie 2.7) en een vectorvergelijking. Dat verklaart uiteindelijk de notatie $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$. De verbanden tussen de verschillende voorstellingen van een lineair stelsel worden samengevat in de volgende stelling.

Stelling 2.4 Stelsels van Lineaire Vergelijkingen als Maxtrixvermenigvuldiging

Stel dat A een $m \times n$ matrix is met kolommen $\vec{\boldsymbol{a}}_1$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3$, $\ldots$, $\vec{\boldsymbol{a}}_n$ en $\vec{\boldsymbol{b}}$ in $\mathbb{R}^m$. De matrixvergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ heeft dezelfde oplossing als de vectorvergelijking

$$x_1\vec{\boldsymbol{a}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{a}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{a}}_n = \vec{\boldsymbol{b}}$$

en dezelfde oplossing als het lineair stelsel met de uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} A & \vec{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \vec{\boldsymbol{a}}_2 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n & \vec{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix}.$$

Bewijs Deze stelling vermeldt de equivalentie van drie begrippen. De equivalentie van de eerste twee volgt uit Definitie 2.5. De equivalentie van het tweede en derde begrip werd al bevestigd in het begin van Sectie 1.3. Om dit in te zien schrijf je elk element van de vectorvergelijking uit als een aparte vergelijking.

■

Voorbeeld 2.15

Veronderstel dat het stelsel van lineaire vergelijkingen van Voorbeeld 1.6,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= -3, \end{aligned}$$

de coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 7 & -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

en constantenvector

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

heeft. Op deze manier zal de vectorvergelijking compact beschreven worden als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$. In de vectornotatie kan het stelsel als volgt beschreven worden:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

⊠

De matrixvoorstelling van een lineair stelsel is ook handig om een fundamentele vraag, die in de volgende hoofdstukken nog zal terugkomen, te beantwoorden: wanneer heeft een lineair stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$? Alvorens we naar de volgende stelling gaan, zullen we eerst deze vraag beantwoorden met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.16
Beschouw de matrix A hieronder. Heeft $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

We werken met een 3×3 matrix, dus elke $\vec{\boldsymbol{b}}$ is van de vorm

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Om deze vraag te beantwoorden moet je de uitgebreide matrix van het stelsel construeren en diens rij-gereduceerde echelonvorm berekenen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - 1/2(b_2 + 4b_1) \end{bmatrix}.$$

Het stelsel heeft enkel een oplossing als voldaan is aan de volgende voorwaarde:

$$b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b_3 + b_1 - \frac{b_2}{2} = 0\,.$$

Natuurlijk voldoet niet elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^3$ aan deze vereiste, dus het stelsel heeft niet voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing.
⊠

Wat was verkeerd aan de matrix A in het vorig voorbeeld zodat het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ geen oplossing had voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$? Het probleem bevond zich in de derde rij. De matrix A had geen pivot in die rij, wat leidde tot de voorwaarde waaraan voldaan moest worden opdat $\vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing zou zijn. In de volgende stelling wordt dit inzicht veralgemeend voor een willekeurige matrix.

Stelling 2.5 Oplossingen voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$

Stel dat $A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \vec{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix}$ een $m \times n$ matrix is. De volgende vier beweringen zijn equivalent:

1. De matrixvergelijking $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ heeft een oplossing voor elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$.
2. Elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A.
3. $\mathrm{Span}\left(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots, \vec{\boldsymbol{a}}_n\}\right) = \mathbb{R}^m$.
4. A heeft een pivot in elke rij.

Bewijs De equivalentie tussen de drie eerste beweringen komt in essentie voort uit Stelling 2.4. De equivalentie met de vierde bewering kan het best gezien worden door terug te kijken naar het vorig voorbeeld. Als de matrix A geen pivot heeft in iedere rij, dan zal er een voorwaarde zijn vooraleer $\vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing kan zijn. Omgekeerd, indien A een pivot heeft in iedere rij, kan de overeenkomstige oplossing verkregen worden door de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix $[A \quad \vec{\boldsymbol{b}}]$ te berekenen. ■

Sectie 2.4 Homogene Stelsels Vergelijkingen

In deze sectie specialiseren we ons in stelsels van lineaire vergelijkingen waarbij de constante term van elke vergelijking nul is. Zulke stelsels spelen een centrale rol in het bepalen van lineaire onafhankelijkheid van een verzameling vectoren, hetgeen het volgende onderwerp zal zijn van dit hoofdstuk. We zullen meer en meer afstappen van het volledig uitschrijven van stelsels vergelijkingen en de verschillende ideeën uitdrukken in de vorm van matrices. De concepten die geïntroduceerd zullen worden in deze sectie zullen terugkeren doorheen de rest van de cursus. Zoals gebruikelijk starten we met een definitie.

Definitie 2.8 Homogene Stelsels

Een stelsel van lineaire vergelijkingen $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ is **homogeen** als de constantenvector de nulvector is, m.a.w. als $\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Voorbeeld 2.17
Voor elk niet-homogeen stelsel kunnen we een gelijkaardig, maar licht verschillend, homogeen stelsel bekomen door in elke vergelijking de constante term door nul te vervangen. Voor Voorbeeld 1.13 kunnen we het originele stelsel aanpassen naar een homogeen stelsel.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Kun je snel een oplossing vinden voor dit stelsel zonder de uitgebreide matrix te rij-reduceren? ⊠

Bij het bestuderen van Voorbeeld 2.17 heb je mogelijk opgemerkt dat elke variabele op nul zetten *altijd* een oplossing zal zijn van een homogeen stelsel. Dit is exact de materie van volgende stelling.

Stelling 2.6 Homogene Stelsels zijn Oplosbaar

Veronderstel dat een stelsel van lineaire vergelijkingen homogeen is. Dan is het stelsel oplosbaar.

Bewijs Stel elke variabele van het stelsel gelijk aan nul. Wanneer we deze waarden vervangen in elke vergelijking dan worden de linkerleden overal nul, ongeacht de coëfficiënten. Omdat een homogeen stelsel nullen heeft in het rechterlid van elke vergelijking als constante term, is elke vergelijking voldaan. Met deze oplossing voor het stelsel is het stelsel dus oplosbaar. ■

Definitie 2.9 Triviale Oplossing voor Homogene Stelsels Vergelijkingen

Veronderstel dat een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen n variabelen heeft. De oplossing $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ (dus $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$) wordt de **triviale oplossing** genoemd.

Hieronder volgen drie typische voorbeelden waarop we doorheen deze sectie nog zullen terugkomen. Overloop de rijbewerkingen die we uitvoeren om tot de rij-gereduceerde echelonvorm te komen. Bemerk ook de gelijkenissen en verschillen tussen de voorbeelden.

Voorbeeld 2.18
Voorbeeld 1.12 kan aangepast worden tot een homogeen stelsel:

$$\begin{aligned} -11x_1 + 2x_2 - 14x_3 &= 0, \\ 23x_1 - 6x_2 + 33x_3 &= 0, \\ 14x_1 - 2x_2 + 17x_3 &= 0. \end{aligned}$$

De uitgebreide matrix van dit stelsel rij-reduceert tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Door Stelling 2.6 is het stelsel oplosbaar, dus betekent de berekening $n - r = 3 - 3 = 0$ dat de oplossingsverzameling slechts één oplossing bevat. Bijgevolg is de triviale oplossing de unieke oplossing. ⊠

Voorbeeld 2.19
Beschouw het homogene stelsel uit Voorbeeld 2.17.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

De uitgebreide matrix van dit stelsel kan rij-gereduceerd worden tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Door Stelling 2.6 is het stelsel oplosbaar. We zien dat $x_1 + x_3 = 0$ en $x_2 - x_3 = 0$. De berekening $n - r = 3 - 2 = 1$ betekent dat de oplossingsverzameling één vrije variabele heeft, en dus oneindig veel oplossingen. We kunnen de oplossingsverzameling beschrijven d.m.v. de vrije variabele x_3,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 = -x_3, \, x_2 = x_3 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

of in parametrische vectorvorm

$$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Meetkundig gezien zijn deze vectoren punten in de drie-dimensionale ruimte die op één rechte door de oorsprong liggen. ⊠

Voorbeeld 2.20
We beschouwen het homogene stelsel

$$2x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 0, \end{aligned}$$

waarvan de rij-gereduceerde uitgebreide matrix

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

is. Via Stelling 2.6 is het stelsel oplosbaar. De berekening $n - r = 4 - 2 = 2$ betekent dat er vrije variabelen zijn voor de oplossingsverzameling, waardoor er oneindig veel oplossingen zijn. We kunnen de oplossingsverzameling beschrijven d.m.v. de vrije variabelen x_3 en x_4,

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 = -3x_3 + 2x_4, \, x_2 = -x_3 + 3x_4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -3x_3 + 2x_4 \\ -x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \middle| \, x_3, \, x_4 \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

of in parametrische vectorvorm

$$\vec{\boldsymbol{x}} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

⊠

Bemerk dat wanneer we de rijbewerkingen uitvoeren op de uitgebreide matrix van een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen, de laatste kolom van de matrix steeds nul is. Eender welke van de drie toegelaten rijbewerkingen zal steeds nullen in nullen omzetten, dus zal de laatste kolom van de matrix steeds een nulkolom blijven. In dit geval kunnen we evenzeer enkel de coëfficiëntenmatrix beschouwen en veronderstellen dat als de laatste kolom begint met nullen, deze nog altijd enkel nul zal zijn na alle rijbewerkingen. Voorbeeld 2.20 suggereert de volgende stelling.

Stelling 2.7 Homogene Stelsels met Meer Variabelen dan Vergelijkingen

Veronderstel dat een homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen m vergelijkingen heeft in n variabelen en $n > m$. Dan heeft het stelsel oneindig veel oplossingen.

Bewijs Noteer het stelsel als $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. We veronderstellen dat het stelsel homogeen is, waardoor Stelling 2.6 zegt dat het stelsel oplosbaar moet zijn. De matrix A heeft meer kolommen dan rijen, dus moet het stelsel vrije variabelen hebben, en heeft het stelsel dus oneindig veel oplossingen. ■

Voorbeeld 2.18 en Voorbeeld 2.19 behandelen homogene stelsels waarbij $n = m$ en illustreren een fundamenteel onderscheid tussen de twee voorbeelden. Het ene voorbeeld heeft een unieke oplossing, terwijl het andere er oneindig veel heeft. Er zijn exact twee mogelijkheden voor een homogeen stelsel en dankzij deze twee voorbeelden weten we dat beide daadwerkelijk kunnen voorkomen (in tegenstelling tot het geval waarbij $n > m$, waar Stelling 2.7 ons vertelt dat er slechts één mogelijkheid is voor een homogeen stelsel).

Sectie 2.5 Lineaire Afhankelijkheid

We sluiten het theoretisch luik van dit hoofdstuk af met de notie van lineaire onafhankelijkheid, een begrip dat sterk verband houdt met homogene stelsels.

Definitie 2.10 Lineaire Onafhankelijkheid van Vectoren

Een verzameling vectoren $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ in $\mathbb{R}^m$ is **lineair onafhankelijk** als het stelsel

$$x_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + x_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

slechts één oplossing heeft, nl. de triviale oplossing. De verzameling is **lineair afhankelijk** als er scalairen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bestaan die niet allemaal nul zijn, waarvoor geldt dat

$$\alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{\boldsymbol{v}}_n = \vec{\mathbf{0}}\,.$$

Lineaire onafhankelijkheid is een eigenschap van een verzameling vectoren. Het is eenvoudig om een verzameling vectoren en evenveel scalairen te nemen en daaruit een lineaire combinatie te maken die de nulvector oplevert. Wanneer de eenvoudige manier, nl. alle scalairen nul kiezen, de enige manier is om de nulvector te bekomen, dan zeggen we dat de verzameling lineair onafhankelijk is. Hieronder vind je een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 2.21
Beschouw de verzameling van $n = 4$ vectoren in $\mathbb{R}^5$,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Om lineaire onafhankelijkheid te bepalen lossen we het volgende stelsel op,

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}.$$

We weten dat $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ een oplossing is van dit stelsel, maar dat is hier niet zozeer interessant. Dit is tenslotte altijd het geval, ongeacht welke vectoren we gekozen zouden hebben. We willen weten of er andere, niet-triviale oplossingen zijn. Stelling 2.4 leert ons dat we een oplossing kunnen vinden via oplossingen van het homogene stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, waarbij de coëfficiëntenmatrix deze vier vectoren als kolommen heeft:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De uitgebreide matrix rij-reduceren levert

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

op. We zouden dit homogeen stelsel volledig kunnen oplossen, maar voor dit voorbeeld volstaat één niet-triviale oplossing. De vrije variabele op eender welke niet-nul waarde zetten, zoals $x_4 = 1$, zal de niet-triviale oplossing

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

opleveren, waarmee we de toepassing van Stelling 2.4 kunnen afronden:

$$2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}.$$

We bekomen dus dat S lineair afhankelijk is. ⊠

Voorbeeld 2.22
Beschouw de verzameling $n = 4$ vectoren van $\mathbb{R}^5$,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Om de lineaire onafhankelijkheid van de verzameling te bepalen lossen we volgend homogeen stelsel op:

$$x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{0}}.$$

We weten dat $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ een oplossing zal zijn van deze vergelijking, maar dit is opnieuw niet interessant. Dit is altijd het geval, ongeacht de keuze van vectoren. We willen weten of er andere, niet-triviale oplossingen zijn. Volgens Stelling 2.4 kunnen we zo'n oplossing bekomen via de oplossingen van het homogene stelsel met als coëfficiëntenmatrix de matrix A en als kolommen de vier vectoren. Rij-reductie van de uitgebreide matrix geeft ons

$$[A \quad \vec{\mathbf{0}}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uit de vorm van deze matrix leiden we af dat er geen vrije variabelen zijn, waardoor de oplossing uniek is. Omdat het stelsel homogeen is, is deze unieke oplossing net de triviale oplossing. Zo weten we nu dat er slechts één manier is om de vier vectoren te combineren tot $\vec{\mathbf{0}}$. In dit geval zeggen we dat de verzameling T lineair onafhankelijk is. ⊠

Voorbeeld 2.21 en Voorbeeld 2.22 steunen op het oplossen van een homogeen stelsel vergelijkingen om lineaire afhankelijkheid te bepalen. We kunnen dit proces omzetten in een stelling die ons tijd zal besparen.

Stelling 2.8 Lineair Onafhankelijke Vectoren en Homogene Stelsels

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en $S = \{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{a}}_n\}$ de verzameling vectoren in $\mathbb{R}^m$ is die de kolommen van A bevat. Dan is S een lineair onafhankelijke verzameling als en slechts als het homogeen stelsel een unieke oplossing heeft.

Bewijs Deze stelling volgt quasi onmiddellijk uit de definities van homogene stelsels en lineaire onafhankelijkheid. ■

Sectie 2.6 Chemische Vergelijkingen Balanceren

Men komt lineaire stelsels tegen in vrijwel alle deelgebieden van de wetenschap en technologie. We lichten hier een simpele toepassing in de chemie toe, nl. het balanceren van chemische vergelijkingen. Deze toepassing is zeer interessant om te behandelen via de vector- en matrixnotatie die we geïntroduceerd hebben in dit hoofdstuk. Om chemische vergelijkingen te balanceren is het belangrijk om de wet van behoud van massa te kennen.

Stelling 2.9 Wet van Behoud van Massa

De massa van een gesloten systeem van stoffen blijft constant, ongeacht het proces binnen het systeem. Massa kan van vorm veranderen, maar niet gecreëerd of vernietigd worden.

Voor elke chemische vergelijking (in een gesloten systeem) moet de massa van de reagenten gelijk zijn aan de massa van de producten. Om ervoor te zorgen dat dit steeds geldt, moet het aantal atomen van elk van de elementen in de reagenten gelijk zijn aan het aantal atomen van diezelfde elementen in de producten. Een voorbeeld is hieronder weergegeven.

Voorbeeld 2.23
Laat ons de chemische vergelijking bekijken die voortvloeit uit het verbrandingsprocess van propaangas. Propaan is een populaire keuze voor barbecues en draagbare ovens omdat het lage kookpunt van $-42°$ C propaan doet verdampen van zodra het uit een hogedrukcontainer wordt gelaten, maar compresseerbaar is tot een transporteerbare vloeistof. Propaan vertoont gelijkaardige ontvlammingsreacties als andere alkanen. In de aanwezigheid van voldoende zuurstof verbrandt propaan om water en koostofdioxide te vormen:

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \to (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O\,.$$

Hieruit kunnen we observeren dat een stelsel van lineaire vergelijkingen dient opgelost te worden om x_1, x_2, x_3, x_4 te bepalen, die overstemmen met het aantal moleculen dat nodig is aan elk van de zijden van de vergelijking. Om het lineaire stelsel meer exact neer te schrijven, lijsten we eerst de atomen op in elk molecule:

	C_3H_8	O_2	CO_2	H_2O
C-atomen	3	0	1	0
H-atomen	8	0	0	2
O-atomen	0	2	2	1

Door de wet van behoud van massa is het totaal aantal atomen aan de linkerkant van de vergelijking gelijk aan het aantal atomen aan de rechterkant. Deze voorwaarde kan geschreven worden als de volgende vectorvergelijking:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

die getransformeerd kan worden naar:

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dit is een goed voorbeeld van het nut van de vectornotatie voor lineaire stelsels. In traditionele notatie krijgen we:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 0x_4 &= 0, \\ 8x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1x_4 &= 0, \end{aligned}$$

en in matrixnotatie

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Dankzij de technieken die we hebben behandeld in de eerste twee hoofdstukken vinden we een oplossing via de rij-gereduceerde echelonvorm van de uitgebreide matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -5/4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3/4 & 0 \end{bmatrix} .$$

We bemerken dat x_4 een vrije variabele is en dat de andere variabelen bepaald worden door:

$$x_1 = \frac{1}{4}x_4 \qquad x_2 = \frac{5}{4}x_4 \qquad x_3 = \frac{3}{4}x_4 \,.$$

De keuze voor $x_4 = 4$ geeft bijvoorbeeld

$$1\,C_3H_8 + 5\,O_2 \to 3\,CO_2 + 4\,H_2O \,.$$

$\boxtimes$

Sectie 2.7 Voorbereiding Werkcollege

1. Voor welke waarden van h zal $\vec{\boldsymbol{y}}$ in Span($\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$) zitten, als

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}?$$

2. Stel $\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \vec{\boldsymbol{w}}_3, \vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$ vectoren in $\mathbb{R}^n$. Veronderstel dat de vectoren $\vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$ in Span($\{\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \vec{\boldsymbol{w}}_3\}$) zitten. Toon aan dat $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ ook in Span($\{\vec{\boldsymbol{w}}_1, \vec{\boldsymbol{w}}_2, \vec{\boldsymbol{w}}_3\}$) zit.

3. Stel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Men kan aantonen dat $\vec{\boldsymbol{p}}$ een oplossing is van $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$. Gebruik dit om aan te tonen dat $\vec{\boldsymbol{b}}$ een specifieke lineaire combinatie is van de kolommen van A.

4. Construeer een 3×3 matrix A en vectoren $\vec{\boldsymbol{b}}$ en $\vec{\boldsymbol{c}}$ in $\mathbb{R}^3$ waarvoor $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing heeft, maar $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ niet.

5. Stel

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{z}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Zijn de verzamelingen $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}\}$, $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{w}}\}$, $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$, $\{\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}\}$, $\{\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$ en $\{\vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$ elk lineair onafhankelijk? Waarom wel of niet?

   (b) Impliceert het antwoord op (a) dat $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$ lineair onafhankelijk is?

   (c) Om te bepalen of $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$ lineair afhankelijk is, is het verstandig om te checken of $\vec{\boldsymbol{w}}$ een lineaire combinatie is van $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ en $\vec{\boldsymbol{z}}$.

   (d) Is $\{\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}}, \vec{\boldsymbol{z}}\}$ lineair afhankelijk?

6. Veronderstel dat $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3\}$ een lineair afhankelijke verzameling vectoren is in $\mathbb{R}^n$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_4$ is een vector in $\mathbb{R}^n$. Toon aan dat $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \vec{\boldsymbol{v}}_4\}$ ook een lineaire afhankelijke verzameling is.

Sectie 2.8 Oefeningen

Bewerkingen met vectoren

1. Beschouw de vectoren $\vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$. Bereken $\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}$ en $\vec{\boldsymbol{u}} - 2\vec{\boldsymbol{v}}$.

   (a) $\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. Werk uit.

(a) $2\begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}+(-3)\begin{bmatrix}7\\6\\5\end{bmatrix}$

(b) $4\begin{bmatrix}2\\-3\\4\\1\\0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}1\\2\\-5\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\3\\0\\1\\2\end{bmatrix}$

Scalair product

3. Beschouw de onderstaande vectoren.

$$\vec{\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\qquad\text{en}\qquad\vec{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$$

Bereken de onderstaande zaken.

(a) $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$

(b) $\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$

(c) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}$

(d) $\dfrac{1}{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}\vec{\boldsymbol{u}}$

(e) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}\vec{\boldsymbol{v}}$

(f) $\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$

4. Beschouw de onderstaande vectoren.

$$\vec{\boldsymbol{u}}=\begin{bmatrix}3\\-1\\-5\end{bmatrix}\qquad\text{en}\qquad\vec{\boldsymbol{v}}=\begin{bmatrix}6\\-2\\3\end{bmatrix}$$

Bereken de onderstaande zaken.

(a) $\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$

(b) $\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$

(c) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}$

(d) $\dfrac{1}{\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}\vec{\boldsymbol{u}}$

(e) $\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}}{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}}\vec{\boldsymbol{v}}$

(f) $\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$

5. Toon de parallellogramregel aan voor vectoren $\vec{\boldsymbol{u}}$ en $\vec{\boldsymbol{v}}$ in $\mathbb{R}^m$.

$$\|\vec{\boldsymbol{u}}+\vec{\boldsymbol{v}}\|^2+\|\vec{\boldsymbol{u}}-\vec{\boldsymbol{v}}\|^2=2\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2+2\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2$$

6. Ga na of de vectoren in de onderstaande verzamelingen loodrecht op elkaar staan.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}8\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}12\\3\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-3\\3\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\7\\-6\end{bmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\1\\-2\\6\end{bmatrix}\right\}$

(e) $\left\{\begin{bmatrix}-3\\7\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-8\\15\\-7\end{bmatrix}\right\}$

7. Beschouw de twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Bepaal x zodanig dat $\vec{a}$ loodrecht staat op $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ 2-x \end{bmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2x \\ 4 \\ -(10+x) \end{bmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$

8. Beschouw de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Zoek twee vectoren die beiden loodrecht staan op $\vec{u}$ en $\vec{v}$.

(b) Bepaal de vector $\vec{x}$ waarvoor geldt dat $\vec{x} \cdot \vec{u} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{v} = 4$ en $\vec{x} \cdot \vec{w} = 6$.

(c) Zoek twee vectoren die een even grote hoek maken met $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$.

9. Toon aan dat de punten A, B en C de hoekpunten zijn van een rechthoekige driehoek.

(a) $A(7,5)$, $B(2,3)$ en $C(6,-7)$

(b) $A(-1,1)$, $B(2,5)$ en $C(10,-1)$

(c) $A(1,2,3)$, $B(2,3,4)$ en $C(0,1,8)$

Lineaire combinatie en Span van een verzameling

10. Ga na of $\vec{b}$ een lineaire combinatie is van $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ en $\vec{a}_3$.

(a) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ -7 \end{bmatrix}$

(c) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$

(d) $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

11. Beschouw de onderstaande vector $\vec{u}$ en matrix A. Ligt $\vec{u}$ in het vlak in $\mathbb{R}^3$ opgespannen door de kolommen van A? Waarom wel of waarom niet?

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Beschouw de vectoren $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$. Voor welke waarde(n) van h ligt $\vec{\boldsymbol{y}}$ in het vlak opgespannen door $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_2$?

   (a) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$

   (b) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}.$

   (c) $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}.$

13. Beschouw de onderstaande matrix A en vector $\vec{\boldsymbol{b}}$ en stel $W = \text{Span}\left(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3\}\right)$.

$$A = [\vec{\boldsymbol{a}}_1 \quad \vec{\boldsymbol{a}}_2 \quad \vec{\boldsymbol{a}}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

   (a) Zit $\vec{\boldsymbol{b}}$ in $\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3\}$? Hoeveel vectoren bevat $\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \vec{\boldsymbol{a}}_3\}$?

   (b) Zit $\vec{\boldsymbol{b}}$ in W? Hoeveel vectoren bevat W?

   (c) Toon aan dat $\vec{\boldsymbol{a}}_1$ in W zit (rijbewerkingen zijn hierbij overbodig).

14. Omschrijf alle mogelijke (niet-gereduceerde) echelonvormen van een matrix A zoals hieronder beschreven. Noteer een element verschillend van 0 met $\blacksquare$ en een willekeurig element met $*$.

   (a) A is een 3×3 matrix wiens kolommen $\mathbb{R}^3$ opspannen.

   (b) A is een 3×4 matrix wiens kolommen $\mathbb{R}^3$ opspannen.

15. Noteer de vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ als een som van twee vectoren, de ene op de rechte met vergelijking $y = 2x$ en de andere op de rechte met vergelijking $y = \dfrac{x}{2}$.

16. Construeer een 3×3 matrix A die niet in echelonvorm staat en waarvan de kolommen $\mathbb{R}^3$ opspannen. Construeer vervolgens een 3×3 matrix B die niet in echelonvorm staat en waarvan de kolommen $\mathbb{R}^3$ NIET opspannen.

Lineaire (on)afhankelijkheid

17. Zijn de onderstaande vectoren lineair onafhankelijk? Leg uit.

   (a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2\\1\end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\\-4\end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\\0\end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\3\\-6\\4\end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix}-2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5\\-4\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\7\end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix}1\\-2\\2\\5\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\\1\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\\2\end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\-1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\4\\-2\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\-1\\-2\\0\end{bmatrix}$

(l) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2\\1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\-7\\0\\10\\4\end{bmatrix}$

18. Bepaal de waarde(n) van h waarvoor de gegeven vectoren lineair afhankelijk zijn.

(a) $\begin{bmatrix}1\\h\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}h\\h+2\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-6\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\2\\h\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}3\\-6\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\4\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\h\\3\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-9\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\h\\-9\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1\\-2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\7\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\h\end{bmatrix}$

Overkoepelende oefeningen

19. Bepaal de waarden van h waarvoor $\vec{v}_3$ in Span($\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$) ligt. Bepaal vervolgens de waarden van h waarvoor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineair afhankelijk is.

(a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\-5\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\9\\15\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\-5\\h\end{bmatrix}$

(b) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-3\\8\\-6\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}5\\-7\\h\end{bmatrix}$

(c) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\-5\\-3\end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}-2\\4\\6\end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\-9\\h\end{bmatrix}$

20. Zijn de onderstaande beweringen waar of vals? Als een bewering waar is, geef dan een woordje uitleg. Als een bewering vals is, geef dan een tegenvoorbeeld.

   (a) Als $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^4$ en $\vec{v}_2$ is geen veelvoud van $\vec{v}_1$, dan is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ lineair onafhankelijk.

   (b) Als $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en $\vec{v}_3$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^3$ en $\vec{v}_3$ is geen lineaire combinatie van $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$, dan is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ lineair onafhankelijk.

21. We beschouwen de 3×4 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

   Beantwoord de onderstaande vragen telkens met een woordje uitleg.

   (a) Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ enkel de triviale oplossing?

   (b) Heeft het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing voor elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$?

   (c) Is elke $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ een lineaire combinatie van de kolommen van A?

   (d) Spannen de kolommen van A $\mathbb{R}^3$ op?

   (e) Zijn de kolommen van A lineair onafhankelijk?

Toepassingen

22. Balanceer de gegeven chemische vergelijkingen.

   (a) $Al_2O_3 + C \rightarrow Al + CO_2$

   (b) $H_3O + CaCO_3 \rightarrow H_2O + Ca + CO_2$

   (c) $FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$

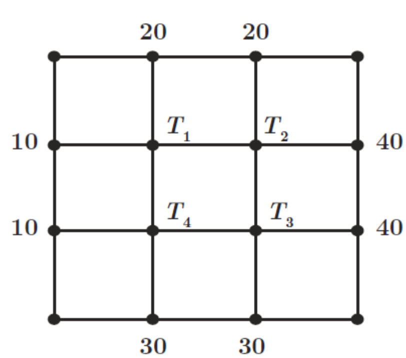
   (d) $Na_3PO_4 + Ba(NO_3)_2 \rightarrow Ba_3(PO_4)_2 + NaNO_3$

   (e) $KMnO_4 + MnSO_4 + H_2O \rightarrow MnO_2 + K_2SO_4 + H_2SO_4$

   (f) $PbN_6 + CrMn_2O_8 \rightarrow Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO$

   (g) $MnS + As_2Cr_{10}O_{35} + H_2SO_4 \rightarrow HMnO_4 + AsH_3 + CrS_3O_{12} + H_2O$

23. Onderstel dat T_1, T_2, T_3 en T_4 de temperaturen zijn in de vier inwendige knopen van het rooster. De temperatuur in een knooppunt is het gemiddelde van de temperaturen in de vier dichtst gelegen knopen. De temperaturen in de buitenste knopen zijn gegeven op de onderstaande figuur. Bepaal T_1, T_2, T_3 en T_4.



24. Een portie geraspte tarwe bevat 160 calorieën, 5 gram eiwitten, 6 gram vezels en 1 gram vetten. Een portie Crispix bevat 110 calorieën, 2 gram eiwitten, 0.1 gram vezels en 0.4 gram vetten.

(a) Stel de matrix B en een vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ op zodat $B\vec{\boldsymbol{u}}$ de hoeveelheid calorieën, eiwitten, vezels en vetten weergeeft in een combinatie van drie porties geraspte tarwe en twee porties Crispix.

(b) Stel dat je cornflakes wil met meer vezels dan Crispix, maar minder calorieën dan geraspte tarwe. Is er een combinatie mogelijk van beide graansoorten die 130 calorieën, 3.2 gram eiwitten, 2.46 gram vezels en 0.64 gram vetten bevat? Zo ja, wat is de combinatie?

Hoofdstuk 3
Matrixberekeningen

We hebben reeds gebruik gemaakt van matrices voor het oplossen van stelsels vergelijkingen en we zijn begonnen met het onderzoeken van enkele van hun eigenschappen. In dit hoofdstuk bestuderen we matrices op een meer gedetailleerde wijze. Na enkele inleidende begrippen focussen we in dit hoofdstuk vooral op de berekening van het product van twee matrices en de inverse van een matrix. We bespreken eveneens een toepassing uit de economie en we sluiten af met een discussie over elementaire matrices.

Sectie 3.1 Bewerkingen op Matrices

In deze sectie zetten we een stap terug en starten we met enkele basisconcepten.

Definitie 3.1 Vectorruimte van $m \times n$ Matrices

De **vectorruimte** M_{mn} is de verzameling van alle $m \times n$ matrices met elementen uit de verzameling van de reële getallen.

We definiëren nu twee bewerkingen op de verzameling M_{mn}.

Definitie 3.2 Optelling van Matrices

Gegeven $m \times n$ matrices A en B, definieer de **som** van A en B als een $m \times n$ matrix, geschreven als $A + B$, volgens

$$[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \,, \qquad \text{met} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Bij de optelling van matrices nemen we twee matrices van dezelfde grootte en combineren ze (op een natuurlijke manier!) om een nieuwe matrix van dezelfde grootte te maken. Dit is waarschijnlijk iets voor de hand liggend om te doen, maar dat betekent niet dat we niet strikt moeten vastleggen wat we doen.

Voorbeeld 3.1
Als

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

dan

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+6 & -3+2 & 4+(-4) \\ 1+3 & 0+5 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

⊠

De tweede bewerking neemt twee verschillende types objecten, namelijk een getal en een matrix, en combineert die tot een nieuwe matrix. Net als bij vectoren noemen we het getal binnen deze context een **scalair** om te benadrukken dat het geen matrix is.

Definitie 3.3 Scalaire Matrixvermenigvuldiging

Voor een $m \times n$ matrix A en een scalair $\alpha \in \mathbb{R}$, is de **scalaire vermenigvuldiging** van A met α de $m \times n$ matrix geschreven als αA en gedefinieerd door

$$[\alpha A]_{ij} = \alpha \, [A]_{ij} \,, \qquad \text{met} \qquad 1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n.$$

Bemerk dat we nu nóg een nieuwe soort vermenigvuldiging hebben, en deze wordt ook genoteerd door twee symbolen naast elkaar te schrijven.

Voorbeeld 3.2
Als

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en $\alpha = 7$, dan

$$\alpha A = 7 \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(2) & 7(8) \\ 7(-3) & 7(5) \\ 7(0) & 7(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 56 \\ -21 & 35 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

⊠

Met de definities van de optelling van matrices en de scalaire vermenigvuldiging kunnen we nu een aantal eigenschappen van deze bewerkingen formuleren en aantonen, alsook enkele eigenschappen voor de interactie tussen de twee bewerkingen. We verzamelen hier tien zulke eigenschappen om later naar te verwijzen.

Stelling 3.1 Eigenschappen van de Vectorruimte van Matrices (Deel 1)

Veronderstel dat M_{mn} de verzameling is van alle $m \times n$ matrices (Definitie 3.1) met de optelling en scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie 3.2 en Definitie 3.3. Dan geldt

- **Gesloten onder de Optelling**
  Als A, $B \in M_{mn}$, dan $A + B \in M_{mn}$.
- **Gesloten onder de Scalaire Vermenigvuldiging**
  Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $A \in M_{mn}$, dan $\alpha A \in M_{mn}$.
- **Commutativiteit van de Optelling**
  Als A, $B \in M_{mn}$, dan $A + B = B + A$.
- **Associativiteit van de Optelling**
  Als A, B, $C \in M_{mn}$, dan $A + (B + C) = (A + B) + C$.

...

Stelling 3.2 Eigenschappen van de Vectorruimte van Matrices (Deel 2)

...

- **Nulmatrix**
  Er bestaat een matrix, $\mathcal{O} \in M_{mn}$, genaamd de **nulmatrix**, waarvoor $A + \mathcal{O} = A$ voor alle $A \in M_{mn}$.
- **Tegengesteld Element**
  Als $A \in M_{mn}$, dan bestaat er een matrix $-A \in M_{mn}$ waarvoor $A + (-A) = \mathcal{O}$.
- **Associativiteit voor de Scalaire Vermenigvuldiging**
  Als α, $\beta \in \mathbb{R}$ en $A \in M_{mn}$, dan $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Matrices**
  Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en A, $B \in M_{mn}$, dan $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- **Distributiviteit t.o.v. Optelling van Scalairen**
  Als α, $\beta \in \mathbb{R}$ en $A \in M_{mn}$, dan $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- **Neutraal Element**
  Als $A \in M_{mn}$, dan $1A = A$.

Bewijs Probeer voor jezelf enkele voorbeelden neer te schrijven om te controleren dat de eigenschappen daadwerkelijk steekhouden. ■

We beschrijven nog een vaak voorkomende bewerking op matrices. Het transponeren van een matrix kan je beschouwen als het construeren van een nieuwe matrix door de rijen en kolommen om te wisselen.

Definitie 3.4 Getransponeerde van een Matrix

Voor een $m \times n$ matrix A wordt de **getransponeerde** van A gedefinieerd als de $n \times m$ matrix A^T, gegeven door

$$\left[A^T\right]_{ij} = [A]_{ji}\,, \qquad \text{met} \qquad 1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m.$$

Voorbeeld 3.3
Veronderstel dat

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

We zouden de getransponeerde element per element kunnen formuleren, gebruikmakend van de definitie. Het is echter gemakkelijker om systematisch de rijen als kolommen te herschrijven (of vice versa). De formulering van de definitie zal handiger blijken bij bewijzen. We hebben nu

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

⊠

Het scalair product van twee vectoren van in Definitie 2.3 wordt ook vaak op een andere manier uitgedrukt:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{u}^T \vec{v} \\ &= \left[u_1 u_2 \ldots u_m\right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_m \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_{i=1}^m u_i v_i\right] \end{aligned}$$

Merk op dat we hier eigenlijk een 1×1-matrix krijgen. In vele handboeken wordt het onderscheid tussen 1×1-matrices en scalairen niet gemaakt.

We ronden deze sectie af met drie eenvoudige stellingen die de interactie illustreren tussen de drie nieuwe bewerkingen, de nieuwe notatie en de technieken om matrixvergelijkingen aan te tonen.

Stelling 3.3 Getransponeerde en Optelling van Matrices

Veronderstel dat A en B $m \times n$ matrices zijn. Dan geldt er dat $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Bewijs We moeten een gelijkheid van matrices bewijzen. We gaan daarom element per element te werk. Denk goed na over de objecten die hier aan te pas komen en het veelvuldig gebruik van het plusteken. Voor $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

$$\left[(A+B)^T\right]_{ij} = [A+B]_{ji} \qquad \text{Definitie 3.4}$$

$$
\begin{aligned}
&= [A]_{ji} + [B]_{ji} && \text{Definitie 3.2} \\
&= \left[A^T\right]_{ij} + \left[B^T\right]_{ij} && \text{Definitie 3.4} \\
&= \left[A^T + B^T\right]_{ij} && \text{Definitie 3.2}
\end{aligned}
$$

Aangezien de matrices $(A+B)^T$ en A^T+B^T overeenkomen op elke positie, zijn de twee matrices gelijk. ■

Stelling 3.4 Getransponeerde en Scalaire Vermenigvuldiging met een Matrix

Veronderstel dat $\alpha \in \mathbb{R}$ en A is een $m \times n$ matrix. Dan $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

Bewijs We moeten een gelijkheid van matrices bewijzen, dus werken we opnieuw element per element. Bemerk dat de gewenste gelijkheid er één is van $n \times m$ matrices, en let goed op welke objecten er aan bod komen. Voor $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\left[(\alpha A)^T\right]_{ji} &= [\alpha A]_{ij} && \text{Definitie 3.4} \\
&= \alpha\,[A]_{ij} && \text{Definitie 3.3} \\
&= \alpha \left[A^T\right]_{ji} && \text{Definitie 3.4} \\
&= \left[\alpha A^T\right]_{ji} && \text{Definitie 3.3},
\end{aligned}
$$

omdat de matrices $(\alpha A)^T$ en αA^T overeenkomen op elke positie, zijn de twee matrices gelijk. ■

Stelling 3.5 Getransponeerde van een Getransponeerde

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is. Dan $\left(A^T\right)^T = A$.

Bewijs We bewijzen deze matrixgelijkheid opnieuw elementsgewijs. Voor $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$,

$$
\begin{aligned}
\left[\left(A^T\right)^T\right]_{ij} &= \left[A^T\right]_{ji} && \text{Definitie 3.4} \\
&= [A]_{ij} && \text{Definitie 3.4},
\end{aligned}
$$

omdat matrices A en $\left(A^T\right)^T$ op elke positie gelijk zijn, zijn de twee matrices gelijk. ■

Sectie 3.2 Matrixvermenigvuldiging

We definiëren nu hoe we twee matrices met elkaar zullen vermenigvuldigen. Hiervoor nemen we als vertrekpunt het matrix-vector product dat we eerder hebben behandeld. Vele syllabi introduceren de matrixvermenigvuldiging veel vroeger. We kiezen hier echter voor een eerder praktische aanpak door deze uit te stellen en veel concepten uit te leggen aan de hand van lineaire combinaties. Voor nu volstaat het om te onthouden dat matrixvermenigvuldiging een centrale definitie is en we het belang beter naar waarde kunnen schatten door ze pas later te introduceren.

Definitie 3.5 Matrixvermenigvuldiging

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en B een $n \times p$ matrix met kolommen $\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_p$. Dan is de **matrixvermenigvuldiging** van A en B de $m \times p$ matrix waarbij kolom i het matrix-vectorproduct $A\vec{\boldsymbol{b}}_i$ is. In symbolen:

$$AB = A\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{b}}_1 & \vec{\boldsymbol{b}}_2 & \vec{\boldsymbol{b}}_3 & \ldots & \vec{\boldsymbol{b}}_p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\vec{\boldsymbol{b}}_1 & A\vec{\boldsymbol{b}}_2 & A\vec{\boldsymbol{b}}_3 & \ldots & A\vec{\boldsymbol{b}}_p\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 3.4
Beschouw

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 6\\ 0 & -4 & 1 & 2 & 3\\ -5 & 1 & 2 & -3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 6 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 6 & 4 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{bmatrix}.$$

Dan

$$AB = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\6\\1\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}6\\4\\1\\4\\-2\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}2\\3\\2\\-1\\3\end{bmatrix} & A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\2\\0\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28 & 17 & 20 & 10\\ 20 & -13 & -3 & -1\\ -18 & -44 & 12 & -3\end{bmatrix}.$$

⊠

Is dit de definitie van matrixvermenigvuldiging die je zelf verwacht had? De voorgaande bewerkingen voor matrices hadden je misschien doen verwachten dat we twee matrices van *dezelfde* grootte, element per element, zouden vermenigvuldigen. Bemerk dat onze huidige definitie matrices van verschillende grootte gebruikt (alhoewel het aantal kolommen van de eerste matrix gelijk moet zijn aan het aantal rijen van de tweede) en het resultaat van een andere grootte is. Daarnaast weten we uit het bovenstaand voorbeeld dat we het product BA niet kunnen beschouwen, omdat de dimensies van de matrices hier niet op de juiste manier overeenkomen.

Het wordt nog vreemder dan dat. Veel van onze oude ideeën zullen niet langer gelden voor matrixvermenigvuldiging, maar sommige nog wel. Maak daarom niet zomaar veronderstellingen en gebruik enkel zaken vanaf wanneer je een stelling hebt gezien (en bewezen) die de actie staaft. Zelfs als de dimensies van de matrices kloppen, is matrixvermenigvuldiging niet commutatief — de volgorde is belangrijk.

Voorbeeld 3.5
We beschouwen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}.$$

Dan hebben we twee vierkante 2×2 matrices, zodat Definitie 3.5 ons toelaat om ze in eender welke volgorde te vermenigvuldigen. We vinden dan

$$AB = \begin{bmatrix}19 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad BA = \begin{bmatrix}4 & 12\\ 4 & 17\end{bmatrix}$$

en $AB \neq BA$. We komen niet eens in de buurt van een gelijkheid. Het zou niet moeilijk moeten zijn om een ander paar matrices te construeren die eveneens niet commuteren (probeer zo een aantal 3×3 matrices). Kun je een paar niet-identieke matrices vinden dat *wél* commuteert? ⊠

Voorbeeld 3.6

Gegeven de matrixvergelijking

$$AB + 7C^{-1}\left(X^{-1}D\right)^T = E.$$

en

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

We proberen X te vinden. Uit de dimensies van de andere matrices kan je afleiden dat $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Je zou dus $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ kunnen stellen, en de vergelijking component per component oplossen.

Een snellere methode is om eerst te rekenen met de symbolen voor de matrices. Opgelet: ook hier mag je niet zomaar de volgorde van matrices in een product omwisselen.

$$\begin{aligned}
& AB + 7C^{-1}\left(X^{-1}D\right)^T = E \\
\Leftrightarrow\ & 7C^{-1}\left(X^{-1}D\right)^T = E - AB \\
\Leftrightarrow\ & \left(X^{-1}D\right)^T = \frac{1}{7}C\left(E - AB\right) \\
\Leftrightarrow\ & X^{-1}D = \frac{1}{7}\left(C\left(E - AB\right)\right)^T = \frac{1}{7}\left(E - AB\right)^T C^T \\
\Leftrightarrow\ & X^{-1} = \frac{1}{7}\left(E - AB\right)^T C^T D^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & X = \left(\frac{1}{7}\left(E - AB\right)^T C^T D^{-1}\right)^{-1} = 7D\left(\left(E - AB\right)^T C^T\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Op de derde regel vermenigvuldigen we het linkerlid langs *links* met $\frac{1}{7}C$, en dus moet dat met het rechterlid ook gebeuren. Op de vierde regel daarentegen vermenigvuldigen we beide leden langs *rechts* met D^{-1}.

Op deze manier vermijden we zoveel mogelijk rekenwerk. De waarden van de matrices invullen in de laatste uitdrukking levert tenslotte:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

⊠

Terwijl een aantal natuurlijke eigenschappen van vermenigvuldiging niet langer standhouden, doen andere dat wel. In de volgende subsectie zullen we een aantal relevante stellingen formuleren en behandelen. Eerst zullen we nog een stelling behandelen die een alternatieve manier van matrixvermenigvuldiging voorstelt. We verkiezen om de volgende formule eerder als een gevolg te zien van de originele definitie.

Stelling 3.6 Rij-Kolomregel

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en B een $n \times p$ matrix is. Dan geldt voor $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$ dat de individuele elementen van AB gegeven worden door

$$\begin{aligned}[AB]_{ij} &= [A]_{i1}\,[B]_{1j} + [A]_{i2}\,[B]_{2j} + [A]_{i3}\,[B]_{3j} + \cdots + [A]_{in}\,[B]_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}\,[B]_{kj} \\ &= \vec{\boldsymbol{a}}_i^T \cdot \vec{\boldsymbol{b}}_j.\end{aligned}$$

met $\vec{\boldsymbol{a}}_i^T$ de kolomvector die de elementen van de i-de rij van A bevat, en $\vec{\boldsymbol{b}}_j$ de j-de kolom van B.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling is niet al te technisch, maar maakt gebruik van een nogal omslachtige notatie. We laten het bewijs hier achterwege en geven in de plaats enkele intuïtieve voorbeelden. ■

Stelling 3.6 is de manier waarop veel mensen matrixproducten met de hand uitrekenen. De definitie (Definitie 3.5) is echter vaak de meest nuttige bij theoretische afleidingen, en we zullen deze definitie nog regelmatig nodig hebben in latere hoofdstukken.

Voorbeeld 3.7
Beschouw opnieuw de twee matrices uit Voorbeeld 3.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veronderstel dan dat we enkel geïntereseerd zijn in het element van AB op de tweede rij en in de derde kolom:

$$\begin{aligned}[AB]_{23} &= [A]_{21}\,[B]_{13} + [A]_{22}\,[B]_{23} + [A]_{23}\,[B]_{33} + [A]_{24}\,[B]_{43} + [A]_{25}\,[B]_{53} \\ &= (0)(2) + (-4)(3) + (1)(2) + (2)(-1) + (3)(3) = -3.\end{aligned}$$

Bemerk dat er vijf termen staan in de som, omdat vijf de gemeenschappelijke dimensie is van de twee matrices (aantal kolommen voor A, aantal rijen voor B). In de conclusie van Stelling 3.6 zal het de index k zijn die van 1 tot en met 5 zal lopen in deze berekening. Een ander voorbeeld is het element op de derde rij en in de eerste kolom:

$$\begin{aligned}[AB]_{31} &= [A]_{31}\,[B]_{11} + [A]_{32}\,[B]_{21} + [A]_{33}\,[B]_{31} + [A]_{34}\,[B]_{41} + [A]_{35}\,[B]_{51} \\ &= (-5)(1) + (1)(-1) + (2)(1) + (-3)(6) + (4)(1) = -18.\end{aligned}$$

Vervolledig zelf, om nog wat meer te oefenen, de andere tien posities van dit matrixproduct. Construeer een aantal andere paren matrices (van overeenkomstige grootte) en bereken hun product op de twee manieren. Doe dit eerst via Definitie 3.5. Nu je lineaire combinaties goed onder de knie hebt, zou dit redelijk rechtlijnig en eenvoudig moeten zijn om te berekenen. Doe het vervolgens via Stelling 3.6.

Omdat dit proces enige oefening vereist, kun je je eerste berekeningen gebruiken om het resultaat van deze laatste te controleren. ⊠

We ronden deze sectie af met enkele nuttige eigenschappen van matrixvermenigvuldiging. Omdat sommige van die eigenschappen gebruik maken van de eenheidsmatrix, introduceren we dit begrip eerst nog formeel.

Definitie 3.6 Eenheidsmatrix

De $m \times m$ **eenheidsmatrix** I_m wordt gedefinieerd als

$$[I_m]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } i = j, \\ 0, & \text{als } i \neq j, \end{cases} \qquad \text{met} \quad 1 \leq i, j \leq m$$

Voorbeeld 3.8

De 4×4 eenheidsmatrix is

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

⊠

Bemerk dat de eenheidsmatrix een vierkante matrix is en in rij-gereduceerde echelonvorm staat. Als we bij het terugbrengen van een matrix tot rij-gereduceerde echelonvorm uitkomen bij de eenheidsmatrix, dan worden alle diagonaalelementen omcirkeld als leidende 1'en. Nu kunnen we een paar bijkomende eigenschappen van de matrixvermenigvuldiging geven.

Stelling 3.7 Eigenschappen van Matrixvermenigvuldiging

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is, B en C $n \times p$ matrices zijn en D een $p \times s$ matrix is. I_n is de $n \times n$ eenheidsmatrix, die 1'en heeft op de diagonaal en voor de overige elementen enkel nullen. $\mathcal{O}$ is de matrix die volledig bestaat uit nullen. Dan gelden de volgende eigenschappen:

1. $A\mathcal{O}_{n\times p} = \mathcal{O}_{m\times p}$,
2. $\mathcal{O}_{p\times m}A = \mathcal{O}_{p\times n}$,
3. $AI_n = A$,
4. $I_mA = A$,
5. $A(B + C) = AB + AC$,
6. $(B + C)D = BD + CD$,
7. Stel dat α een scalair is. Dan is $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
8. $A(BD) = (AB)D$,
9. $(AB)^T = B^T A^T$.

Bewijs Een formeel bewijs van al deze eigenschappen valt buiten het bestek van deze cursus, maar het uitproberen van een aantal voorbeelden doet je aanvoelen dat deze eigenschappen daadwerkelijk gelden. ■

Sectie 3.3 Inverse van een Matrix

We beginnen met een bekend voorbeeld, dat we behandelen op een ietwat andere manier.

Voorbeeld 3.9
Voorbeeld 1.12 is het stelsel van $m = 3$ lineaire vergelijkingen in $n = 3$ variabelen,

$$\begin{aligned} -7x_1 - 6x_2 - 12x_3 &= -33, \\ 5x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 24, \\ x_1 + 4x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Door Stelling 2.4 kunnen we dit stelsel vergelijkingen voorstellen als

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}\,,$$

waarbij

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zonder enige motivatie definiëren we nu de 3×3 matrix B,

$$B = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

en merken de volgende onverwachte eigenschap op:

$$BA = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3\,.$$

We gebruiken deze berekening om het stelsel van lineaire vergelijkingen op te lossen,

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{x}} &= I_3\vec{\boldsymbol{x}} \\ &= (BA)\vec{\boldsymbol{x}} \\ &= B(A\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &= B\vec{\boldsymbol{b}}\,, \end{aligned}$$

waardoor we bekomen dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} = B\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -33 \\ 24 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Via B zijn we dus in staat geweest om een oplossing voor het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ te bepalen, via gerechtvaardigd gebruik van de matrixvermenigvuldiging. Omdat de coëfficiëntenmatrix van dit voorbeeld een pivot heeft in elke kolom, zal er een unieke oplossing zijn, ongeacht de keuze voor de vector $\vec{b}$. De afleiding hierboven versterkt dit resultaat, aangezien we *moesten* besluiten dat $\vec{x} = B\vec{b}$ de enige mogelijke oplossing was. Controleer voor jezelf dat dit argument blijft gelden voor elke mogelijke waarde voor $\vec{b}$.
⊠

De matrix B uit het voorgaande voorbeeld wordt de inverse van A genoemd. Wanneer A en B gecombineerd worden via matrixvermenigvuldiging is het resultaat de eenheidsmatrix, die kan ingevoegd worden voor $\vec{x}$, als eerste stap naar een oplossing. Dit is analoog met hoe we één enkele lineaire vergelijking zouden oplossen, zoals $3x = 12$.

$$x = 1x = \left(\frac{1}{3}(3)\right)x = \frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(12) = 4$$

We hebben hier een oplossing bekomen door de multiplicatieve inverse van 3, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ toe te passen. Dit werkt goed voor de scalaire vermenigvuldiging van x, behalve voor nul, net omdat nul geen multiplicatieve inverse heeft. Beschouw de volgende twee lineaire vergelijkingen afzonderlijk:

$$0x = 12 \qquad\qquad 0x = 0\,.$$

De eerste heeft geen oplossing, terwijl de tweede oneindig veel oplossingen heeft. Voor matrices wordt alles slechts een klein beetje ingewikkelder. Sommige matrices hebben inverses, terwijl andere dat niet hebben. Wanneer een matrix een inverse heeft, hoe moeten we die dan berekenen? Met andere woorden, waar komt de matrix B uit het laatste voorbeeld vandaan? Zijn er andere matrices die ook gewerkt zouden hebben in de plaats van B?

Definitie 3.7 Inverse van een Matrix

Veronderstel dat A en B vierkante matrices zijn van grootte n waarvoor $AB = I_n$. Dan is A inverteerbaar en is B de **inverse** van A. In dit geval schrijven we $B = A^{-1}$.

Bemerk dat als B de inverse is van A, we evenwel kunnen zeggen dat A de inverse is van B, of dat A en B elkaars inverse zijn.

Niet elke vierkante matrix heeft een inverse. In Voorbeeld 3.9 is de matrix B de inverse van de coëfficiëntenmatrix van Voorbeeld 1.12. Hiervoor dient enkel nog $AB = I_n$ gecontroleerd te worden. En wat met Voorbeeld 1.13? Dat is een voorbeeld van een vierkante matrix zonder inverse.

Voorbeeld 3.10

Beschouw de coëfficiëntenmatrix van Voorbeeld 1.13,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veronderstel dat A inverteerbaar is en een inverse B heeft. Kies de constantenvector

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en beschouw het stelsel vergelijkingen $A\vec{x} = \vec{b}$. Net zoals in Voorbeeld 3.9 zou deze matrixvergelijking een unieke oplossing $\vec{x} = B\vec{b}$ moeten hebben.

Het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ is echter onoplosbaar. Bepaal de uitgebreide matrix $[A \quad \vec{b}]$ en rij-reduceer deze naar

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix},$$

waaruit we rechtstreeks de onoplosbaarheid kunnen afleiden dankzij Stelling 1.5.

De veronderstelling van A's inverse leidt dus tot een tegenstrijdigheid in de logica (het stelsel kan niet tegelijkertijd oplosbaar en onoplosbaar zijn) dus is onze veronderstelling fout. A is niet inverteerbaar. ⊠

We bekijken een andere inverse vooraleer we beginnen met een meer systematische bestudering.

Voorbeeld 3.11

Beschouw de matrices,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dan

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dus volgens Definitie 3.7 kunnen we stellen dat A inverteerbaar is en schrijven we $B = A^{-1}$. ⊠

We zullen ons nu minder bezighouden met de vraag of er al dan niet een inverse bestaat voor een matrix, maar in de plaats focussen op hoe je de inverse kan vinden wanneer die bestaat. We zullen binnenkort ook enkele stellingen behandelen die toelaten om eenvoudig te controleren of een matrix inverteerbaar is.

De Inverse van een Matrix Berekenen

We hebben gezien dat de matrix uit Voorbeeld 3.9 een inverse heeft, maar deze is nogal uit de lucht komen vallen. Hoe zouden we een inverse berekenen? En wanneer is een matrix inverteerbaar, en wanneer niet? De ideeën die aan bod zullen komen worden geïllusteeerd door het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3.12
Beschouw de matrix gedefinieerd in Voorbeeld 3.11 als

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Voor diens inverse wensen we een matrix X zodat $AX = I_n$. Stel dat $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_5$ de kolommen van X voorstellen en $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_5$ de kolommen van de eenheidsmatrix I_5. Dan kunnen we de definitie van matrixvermenigvuldiging (Definitie 3.5) toepassen om

$$\begin{aligned} AX = I_5 \;&\Leftrightarrow\; A\left[\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \vec{x}_3 \quad \vec{x}_4 \quad \vec{x}_5\right] = \left[\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \quad \vec{e}_4 \quad \vec{e}_5\right] \\ &\Leftrightarrow\; \left[A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 \quad A\vec{x}_3 \quad A\vec{x}_4 \quad A\vec{x}_5\right] = \left[\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \quad \vec{e}_4 \quad \vec{e}_5\right] \end{aligned}$$

te kunnen schrijven. De matrices kolom per kolom gelijkstellen geeft

$$A\vec{x}_1 = \vec{e}_1 \qquad A\vec{x}_2 = \vec{e}_2 \qquad A\vec{x}_3 = \vec{e}_3 \qquad A\vec{x}_4 = \vec{e}_4 \qquad A\vec{x}_5 = \vec{e}_5.$$

De matrix X is wat we willen berekenen, dus we kunnen elke kolom $\vec{x}_i$ zien als een kolom onbekenden. Dan dienen we vijf stelsels vergelijkingen op te lossen, elk met vijf vergelijkingen en vijf onbekenden. Bemerk dat alle vijf de stelsels dezelfde coëfficiëntenmatrix hebben. We lossen nu elk stelsel apart op.

Rij-reduceer de uitgebreide matrix van het lineair stelsel $A\vec{x}_1 = \vec{e}_1$,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{RREF}} \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rij-reduceer de uitgebreide matrix van het lineair stelsel $A\vec{x}_2 = \vec{e}_2$,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{RREF}} \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Rij-reduceer de uitgebreide matrix van het lineair stelsel $A\vec{x}_3 = \vec{e}_3$,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{RREF}} \left[\begin{array}{cccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \qquad \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Rij-reduceer de uitgebreide matrix van het lineair stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}}_4 = \vec{\boldsymbol{e}}_4$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{x}}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rij-reduceer de uitgebreide matrix van het lineair stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}}_5 = \vec{\boldsymbol{e}}_5$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \qquad \vec{\boldsymbol{x}}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We verzamelen nu onze vijf oplossingsvectoren in de matrix X:

$$\begin{aligned} X &= [\vec{\boldsymbol{x}}_1 \quad \vec{\boldsymbol{x}}_2 \quad \vec{\boldsymbol{x}}_3 \quad \vec{\boldsymbol{x}}_4 \quad \vec{\boldsymbol{x}}_5] \\ &= \left[\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Via deze methode weten we dat $AX = I_5$. Controleer dat $XA = I_5$ en dan weten we met zekerheid dat we de inverse van A hebben gevonden. ⊠

In het voorgaande voorbeeld hebben we de notatie $\vec{\boldsymbol{e}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{e}}_5$ geïntroduceerd om de kolommen van de 5×5 eenheidsmatrix te noteren. In hetgeen volgt zullen deze vectoren de eenheidsvectoren genoemd worden. Ze zullen vaak een sleutelrol opnemen in het beschrijven van formele concepten, dus verdienen ze een formele definitie. Hier geven we die formele definitie voor $\mathbb{R}^m$.

Definitie 3.8 Standaard Eenheidsvectoren

Noteer met $\vec{\boldsymbol{e}}_j \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq j \leq m$ de kolomvectoren gedefinieerd door

$$[\vec{\boldsymbol{e}}_j]_i = \begin{cases} 0, & \text{als } i \neq j, \\ 1, & \text{als } i = j. \end{cases}$$

Dan is de verzameling

$$\{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_m\} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_j | 1 \leq j \leq m\}$$

de verzameling van **standaard eenheidsvectoren** in $\mathbb{R}^m$.

De vector $\vec{e}_j$ is identiek aan kolom j van de $m \times m$ eenheidsmatrix I_m (Definitie 3.6). Deze observatie zal vaak van pas komen. We zullen de notatie $\vec{e}_j$ enkel gebruiken voor deze vectoren. Bemerk dat in sommige wiskunde- en fysicahandboeken de notatie $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ en $\vec{k}$ gebruikt wordt voor de standaard eenheidsvectoren wanneer de analyse beperkt is tot $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$.

Bemerk hoe de vijf stelsels vergelijkingen uit het vorige voorbeeld allemaal opgelost werden door exact dezelfde reeks rijbewerkingen uit te voeren. Zou het niet mooi zijn mochten we deze duidelijke ontdubbeling van werk kunnen vermijden? De hoofdstelling in deze sectie volgt, en ze imiteert het vorig voorbeeld terwijl ze de onnodige ontdubbeling vermijdt.

Stelling 3.8 Berekenen van de Inverse van een Matrix

Veronderstel dat A een vierkante matrix van grootte n is. Dan is A inverteerbaar als en slechts als deze rij-gereduceerd kan worden tot de eenheidsmatrix I_n. Om de inverse te berekenen construeren we de $n \times 2n$ matrix $[A \quad I_n]$ door de $n \times n$ eenheidsmatrix I_n rechts van de matrix A te plaatsen. Dan wordt de inverse van A gevonden door naar de laatste n kolommen te kijken van de rij-gereduceerde echelonvorm van $[A \quad I_n]$.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ∎

We zullen deze stelling illustreren door de inverse te berekenen van de coëfficiëntenmatrix van Voorbeeld 1.12, die we uit onze hoed getoverd hadden in Voorbeeld 3.9. Bemerk dat de inverse opstellen van een rechthoekige matrix niet kan (de dimensies kloppen niet) en dat niet elke vierkante matrix een inverse heeft.

Voorbeeld 3.13
Voorbeeld 1.12 heeft een coëfficiëntenmatrix gegeven door

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 5 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

We oefenen Stelling 3.8 uit:

$$[A \quad I_3] = \begin{bmatrix} -7 & -6 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wat we rij-reduceren naar

$$[I_3 \quad A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 & -12 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Dus

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -9 \\ \frac{13}{2} & 8 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

eens we controleren dat $A^{-1}A = I_3$ (het product in de omgekeerde volgorde is een gevolg van de stelling). $\boxtimes$

Met deze techniek kunnen we ook een formule afleiden voor de inverse van een 2×2 matrix.

Stelling 3.9 Inverse van een 2×2 matrix

Veronderstel
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
Dan is A inverteerbaar als en slechts als $ad - bc \neq 0$. Als A inverteerbaar is, dan
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bewijs Om deze identiteit te bewijzen passen we Stelling 3.8 als volgt toe op A.

$$\begin{aligned}
[A \quad I_2] = \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad &\xrightarrow{R_2 - \frac{c}{a}R_1} \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{aR_2} \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{ad-bc}{b}R_1} \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{b}a & ad-bc & \frac{ad-bc}{b} & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{R_1 - 1R_2} \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{b}a & 0 & \frac{ad-bc}{b}+c & -a \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{bR_1} \begin{bmatrix} (ad-bc)a & 0 & ad & -ab \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{a(ad-bc)}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\frac{1}{ad-bc}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = [I_2 \quad A^{-1}]
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Eigenschappen van Matrixinverses

De inverse van een matrix heeft een aantal interessante eigenschappen. We lijsten er hier enkele op. Eerst vinden we dat een matrix maar één inverse kan hebben.

Stelling 3.10 Matrixinverse is Uniek

Veronderstel dat de vierkante matrix A een inverse heeft. Dan is A^{-1} uniek.

Bewijs Veronderstel dat B en C beide inverses zijn voor A. Dan weten we via Definitie 3.7 dat $AB = BA = I_n$ en $AC = CA = I_n$. Dan hebben we
$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

We kunnen besluiten dat B en C hetzelfde zijn en niet verschillend kunnen zijn. Dus eender welke matrix die zich gedraagt als *een* inverse, is *de* inverse. ■

Wanneer de meesten van ons zich aankleden in de ochtend, doen we eerst onze sokken aan, gevolgd door onze schoenen. 's Avonds doen we dan weer eerst onze schoenen uit, gevolgd door onze sokken. Probeer de conclusie van volgende stelling in verband te brengen met dit alledaags voorbeeld.

Stelling 3.11 Matrixinverse van een Product

Veronderstel dat A en B inverteerbare matrices zijn van grootte n. Dan is AB een inverteerbare matrix en geldt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Bewijs We starten met de matrix $B^{-1}A^{-1}$ (waarvan we weten dat deze bestaat omdat A en B inverteerbaar zijn en we het product van deze twee matrices kunnen nemen). Laat ons onderzoeken of $B^{-1}A^{-1}$ inderdaad de inverse is van AB. Hiervoor controleren we het volgende:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

We dienen ook een tweede voorwaarde te controleren:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Dus de matrix $B^{-1}A^{-1}$ voldoet aan alle voorwaarden om AB's inverse te zijn en we kunnen stellen dat $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

Stelling 3.12 Matrixinverse van een Matrixinverse

Veronderstel dat A een inverteerbare matrix is. Dan is A^{-1} inverteerbaar en $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bewijs Zoals bij het bewijs van Stelling 3.11 onderzoeken we of A een geschikte inverse is voor A^{-1} (per definitie is het omgekeerde dan waar).

$$AA^{-1} = I_n \qquad \text{Definitie 3.7}$$

en

$$A^{-1}A = I_n \qquad \text{Definitie 3.7.}$$

De matrix A voldoet aan alle voorwaarden om de inverse te zijn van A^{-1}, dus A is inverteerbaar en we kunnen schrijven dat $A = (A^{-1})^{-1}$. ■

Stelling 3.13 Matrixinverse van een Getransponeerde

Veronderstel dat A een inverteerbare matrix is. Dan is A^T inverteerbaar en $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bewijs Zoals bij het bewijs van Stelling 3.11 zien we dat $(A^{-1})^T$ een geschikte inverse is voor A^T:

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

en

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

De matrix $(A^{-1})^T$ voldoet aan alle vereisten om de inverse van A^T te zijn, waardoor A^T inverteerbaar is en we kunnen schrijven dat $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ■

Stelling 3.14 Matrixinverse van een Scalair Veelvoud

Veronderstel dat A een inverteerbare matrix is en α een niet-nul scalair. Dan is αA inverteerbaar en

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}.$$

Bewijs Zoals bij het bewijs van Stelling 3.11 merken we op dat $\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ een geschikte inverse is voor αA.

$$\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right)(\alpha A) = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\left(AA^{-1}\right) = 1I_n = I_n$$

en

$$(\alpha A)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\left(A^{-1}A\right) = 1I_n = I_n.$$

De matrix $\frac{1}{\alpha}A^{-1}$ voldoet aan alle vereisten om de inverse van αA te zijn, zodat we kunnen schrijven $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$. ■

Stelling 3.15 Eenzijdige Inverse Volstaat

Veronderstel dat A en B vierkante matrices zijn van grootte n waarvoor $AB = I_n$. Dan $BA = I_n$.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Stelling 3.16 Inverteerbare Matrix Stelling

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n. De volgende beweringen zijn equivalent.

1. A is inverteerbaar.
2. A kan gereduceerd worden tot de eenheidsmatrix.
3. Het lineair stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke mogelijke keuze voor $\vec{b}$.
4. De kolommen van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
5. Het homogeen stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft enkel de triviale oplossing als oplossing.
6. De kolommen van A vormen een lineair onafhankelijke verzameling.

Bewijs De equivalentie van (1) en (2) werd bewezen in Stelling 3.8. A reduceert tot I_n als en slechts als A een pivotelement heeft in elke rij en kolom. De equivalenties met (3)-(6) volgen uit het toepassen van Stelling 2.5 en Stelling 2.8. ■

De volgende stelling is een direct gevolg van Stelling 3.16. Deze stelling is ook een zeer belangrijke stelling voor de toepassing op lineaire stelsels.

Stelling 3.17 Unieke Oplossing van een Lineair Stelsel

Stel dat A een $n \times n$ inverteerbare matrix is. Dan geldt er dat voor elke $\vec{b}$ het lineair stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een unieke oplossing $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ heeft.

Bewijs Het bewijs volgt direct uit:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

■

Bemerk dat er hier enkele aanneembare stellingen ontbreken. Het zou bijvoorbeeld verleidelijk zijn om te denken dat $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$, maar dit is echter niet (altijd) waar. Kun je een tegenvoorbeeld vinden? Het volgende resultaat is interessant omdat de hypothese iets zegt over het product van twee vierkante matrices en de conclusie zegt iets over de afzonderlijke matrices uit dat product. Dit resultaat heeft een analogie in de algebra van de reële getallen: veronderstel dat α, $\beta \in \mathbb{R}$, dan $\alpha\beta \neq 0$ als en slechts als $\alpha \neq 0$ en $\beta \neq 0$. We kunnen dit resultaat beschouwen als de suggestie dat de term “inverteerbaar” voor matrices gelijkaardig is aan de term “niet-nul” voor scalairen.

Stelling 3.18 Inverteerbaar Product heeft Inverteerbare Factoren

Veronderstel dat A en B vierkante matrices zijn van grootte n. Het product AB is inverteerbaar als en slechts als A en B inverteerbaar zijn.

Bewijs ■

Dit is een sterk resultaat in de “voorwaartse” richting, omdat het ons toelaat te beginnen met een hypothese dat iets ingewikkeld (het matrixproduct AB) de eigenschap heeft inverteerbaar te zijn, en we daaruit kunnen besluiten dat de kleinere onderdelen (A en B afzonderlijk) ook de eigenschap hebben inverteerbaar te zijn. Als we dachten dat het matrixproduct een artificiële constructie was, doen resultaten zoals deze ons hieraan twijfelen.

Sectie 3.4 Input-Output Analyse

Het was de late zomer van 1949. Wassily Leontief, professor aan Harvard, voerde voorzichtig zijn laatste ponskaarten in in de Mark II computer van zijn universiteit. De ponskaarten bevatten informatie over de economie van de VS en stelden een samenvatting voor van meer dan 250.000 stukjes informatie, aangeleverd door het U.S. Bureau of Labor Statistics na twee jaar intensief werk. Leontief had de economie van de VS opgedeeld in 500 sectoren, zo onder meer de steenkoolindustrie, de autoindustrie, communicatie en dergelijke meer. Voor elke sector had hij een lineaire vergelijking geschreven die beschreef hoe de ene sector zijn output verdeelde naar andere sectoren van de economie. Daar de Mark II, één van de grootste computers op dat moment, het volledige stelsel van 500 vergelijkingen in 500 onbekenden niet de baas kon, reduceerde Leontief het originele probleem tot een stelsel van 42 vergelijkingen in 42 onbekenden.

Het programmeren van de Mark II computer in voorbereiding op Leontief's 42 vergelijkingen kostte enkele maanden. Hij was dan ook zeer benieuwd om te zien hoe lang de computer erover zou doen om het probleem op te lossen. De Mark II zoemde en bliepte voor 56 uur aan een stuk vooraleer ze uiteindelijk een oplossing opleverde. We zullen in deze sectie de aard van deze oplossing bespreken. Leontief, die in 1973 de Nobelprijs in de Economie ontving, opende de deur naar een nieuw tijdperk in wiskundige modellering van de economie. Zijn verdiensten aan Harvard in 1949 waren één van de eerste opmerkelijke toepassingen van computers bij het analyseren van wat toen een grootschalig wiskundig model was. Sindsdien hebben onderzoekers uit veel andere gebieden computers ingeschakeld om wiskundige modellen te analyseren. Door de massale hoeveelheid data die erbij komt kijken zijn de modellen doorgaans *lineair*; ze worden beschreven door *stelsels van lineaire vergelijkingen*.

Het belang van lineaire algebra in toepassingen is mee gestegen, proportioneel met de groei in computationele rekenkracht, waarbij elke nieuwe generatie aan hardware en software het vuur aanwakkert voor nog grotere ambities. Computerwetenschappen is daarom intrinsiek verbonden met lineaire algebra door de explosieve groei van parallele processen en grootschalige berekeningen. Zodoende is algebra een onmisbaar deel in de bagage van de hedendaagse ingenieur. We illustreren dit met een toepassing in de economie.

Leontief's model toont de relaties tussen sectoren binnen een economie, hoe de output van een industriële sector de input kan worden van een andere sector. Stel dat we n sectoren hebben. In de inter-sectoren matrix, die we noteren als C, stellen de vectoren $\vec{\boldsymbol{c}}_1, ..., \vec{\boldsymbol{c}}_n$ doorgaans de input van een sector voor, waarvan de rijelementen de output voorstellen van een gegeven sector. Deze vorm toont daardoor hoe afhankelijk een sector is van een andere sector, zowel als een afnemer van de output van een andere sector als door het voorzien van input voor andere sectoren. Elke kolom toont de monetaire waarde van de inputs van elk van de sectoren en elke rij stelt de waarde van output van elke sector voor.

Voorbeeld 3.14
Veronderstel dat de economie bestaat uit drie sectoren: industrie, landbouw en diensten. De input-output matrix C kan er dan als volgt uitzien:

	Input verbruikt per eenheid aan output		
Gekocht van	Industrie	Landbouw	Diensten
Industrie	.50	.40	.20
Landbouw	.20	.30	.10
Diensten	.10	.10	.30
	$\vec{\boldsymbol{c}}_1$	$\vec{\boldsymbol{c}}_2$	$\vec{\boldsymbol{c}}_3$

De eerste kolom kan voorgesteld worden door de hoeveelheden die verbruikt worden door productie per geproduceerde eenheid; als deze sector 100 eenheden aan goederen produceert, dan geeft dit aanleiding tot de volgende consumptievector:

$$100\vec{\boldsymbol{c}}_1 = 100\begin{bmatrix} .50 \\ .20 \\ .10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Indien de drie sectoren samen x_1, x_2 en x_3 eenheden aan goederen produceren, dan zullen zij in totaal

$$x_1\vec{\boldsymbol{c}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{c}}_2 + x_3\vec{\boldsymbol{c}}_3 = \begin{bmatrix} .50 & .40 & .20 \\ .20 & .30 & .10 \\ .10 & .10 & .30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = C\vec{\boldsymbol{x}}$$

verbruiken. We zullen deze vector de intermediaire vraag noemen. Bemerk dat deze voortvloeit uit een gewone matrix-vectorvermenigvuldiging. ⊠

Veronderstel dat, in een economie met n sectoren, elke sector x_i eenheden van éénzelfde soort produceert. Veronderstel dat de j-de sector $[C]_{ij}$ eenheden van sector i nodig heeft om 1 eenheid te produceren. Stel daarnaast dat elke sector een deel van zijn output verkoopt aan andere sectoren (intermediaire output, of intermediaire vraag) en een deel van zijn output aan consumenten (finale output of finale vraag). Noem de finale vraag in de i-de sector d_i. Dan stelde Leontief dat volgende vergelijkingen gelden:

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \text{totale} \\ \text{output} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \text{intermediaire} \\ \text{vraag} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \text{finale} \\ \text{vraag} \end{bmatrix} \\ \vec{\boldsymbol{x}} & = & C\vec{\boldsymbol{x}} & + & \vec{\boldsymbol{d}}, \end{array}$$

waarin $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, ..., x_n)$ de totale output van elke sector voorstelt en $\vec{\boldsymbol{d}} = (d_1, ..., d_n)$ een vectorvoorstelling is van de finale vraag. We kunnen de totale output van elke sector vinden door het stelsel van lineaire vergelijkingen op te lossen. We doen dit als volgt:

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{\boldsymbol{x}} & = & C\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{d}} \\ \Leftrightarrow & (I - C)\,\vec{\boldsymbol{x}} & = & \vec{\boldsymbol{d}} \\ \Leftrightarrow & (I - C)^{-1}(I - C)\,\vec{\boldsymbol{x}} & = & (I - C)^{-1}\vec{\boldsymbol{d}} \\ \Leftrightarrow & \vec{\boldsymbol{x}} & = & (I - C)^{-1}\vec{\boldsymbol{d}}, \end{array}$$

ervan uitgaande dat de inverse bestaat.

Er geldt inderdaad dat, onder relatief milde voorwaarden die doorgaans voldaan zijn voor input-output matrices, het stelsel altijd een unieke oplossing zal hebben. Dit wordt samengevat in de volgende stelling, die gegeven wordt zonder bewijs.

Stelling 3.19 Unieke Oplossing Input-Output Analyse

Als de kolomsommen van C kleiner zijn dan 1, dan bestaat $(I - C)^{-1}$.

Bewijs Om deze stelling te bewijzen hebben we matrixnormen nodig (een onderwerp dat niet aan bod komt in deze cursus). Daarnaast hebben we ook de eigenschappen van convergente machtreeksen nodig, die wellicht behandeld worden in de cursus Calculus. We verwijzen de geïntereseerde lezer door naar: Frederick Waugh, Inversion of the Leontief Matrix by Power Series, Econometrica 18, p. 142-154, 1950. ∎

Sectie 3.5 Elementaire Matrices

Elementaire matrices zijn, zoals de naam al doet vermoeden, zeer eenvoudig. Hun doel is het beschrijven van rijbewerkingen (Definitie 1.5) op een matrix via matrixvermenigvuldiging (Definitie 3.5). We zullen deze nodig hebben om een aantal belangrijke eigenschappen van determinanten aan te tonen.

Definitie 3.9 Elementaire Matrices

1. Voor $i \neq j$ is $E_{i,j}$ de vierkante matrix van grootte n die voortkomt uit de eenheidsmatrix door rij i en j te verwisselen.
2. Voor $\alpha \neq 0$ is $E_i(\alpha)$ de vierkante matrix van grootte n die voortkomt uit de eenheidsmatrix door rij i te vermenigvuldigen met een scalair α.
3. Voor $i \neq j$ is $E_{i,j}(\alpha)$ de vierkante matrix van grootte n die voortkomt uit de eenheidsmatrix door α keren rij i bij rij j op te tellen.

Elementaire matrices zijn dus in feite kleine wijzigingen in de $n \times n$ eenheidsmatrix (Definitie 3.6). $E_{i,j}$ is de eenheidsmatrix waarbij rijen (of kolommen) i en j van plaats zijn gewisseld, $E_i(\alpha)$ is de eenheidsmatrix waarbij het diagonaalelement op rij i en kolom i vervangen is door α en $E_{i,j}(\alpha)$ is de eenheidsmatrix waar het element van rij j en kolom i vervangen is door α. Bemerk dat onze notatie geen referentie bevat naar de grootte van de elementaire matrix, omdat deze altijd duidelijk zal zijn uit de context, of niet belangrijk zal zijn.

Het nut van elementaire matrices is om rijbewerkingen te "doen" op matrices via matrixvermenigvuldiging. Daarom geven we hier een voorbeeld waar we zowel een paar elementaire matrices zien, alsook hoe ze rijbewerkingen faciliteren wanneer gebruikt in een matrixvermenigvuldiging.

Voorbeeld 3.15
We voeren een reeks rijbewerkingen (Definitie 1.5) uit op de 3×4 matrix A, en vermenigvuldigen tegelijkertijd de matrix aan de linkerkant met de gepaste 3×3 elementaire matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \leftrightarrow R_3 : \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{1,3} : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2R_2 : \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2\left(2\right) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 + 2R_3 : \begin{bmatrix} 9 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_{3,1}\left(2\right) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 9 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

⊠

De volgende drie stelllingen tonen aan dat elementaire matrices daadwerkelijk de rijbewerkingen vastleggen in de vorm van een matrixvermenigvuldiging.

Stelling 3.20 Elementaire Matrices Representeren Rijbewerkingen

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is en B een matrix van dezelfde grootte die bekomen werd uit A door er één rijbewerking op toe te passen. Dan is er een elementaire matrix van grootte m die A omzet in B via linkse matrixvermenigvuldiging. Meer specifiek,

1. Als de rijbewerking rijen i en j verwisselt, dan $B = E_{i,j}A$.
2. Als de rijbewerking rij i vermenigvuldigt met α, dan $B = E_i\left(\alpha\right) A$.
3. Als de rijbewerking rij i vermenigvuldigt met α en optelt bij de rij j, dan $B = E_{i,j}\left(\alpha\right) A$.

Bewijs Het formeel bewijzen van deze stelling voor een $m \times n$ matrix A wordt al snel een zeer technische onderneming. Een formeel bewijs valt daarom buiten het bestek van deze cursus, maar voorbeelden zoals Voorbeeld 3.15 zijn een sterke indicatie dat de stelling daadwerkelijk standhoudt. ■

In deze cursus zullen we twee eigenschappen van elementaire matrices nodig hebben.

Stelling 3.21 Elementaire Matrices zijn Inverteerbaar

Als E een elementaire matrix is, dan is E inverteerbaar.

Bewijs We tonen aan dat elke elementaire matrix rij-gereduceerd kan worden tot de eenheidsmatrix. Beschouw een willekeurige elementaire matrix van de vorm $E_{i,j}$ en pas de rijbewerking toe die rijen i en j omwisselt. Beschouw een willekeurige elementaire matrix van de vorm $E_i\left(\alpha\right)$, waar $\alpha \neq 0$, en pas de rijbewerking toe die rij i vermenigvuldigt met $1/\alpha$. Beschouw een willekeurige elementaire matrix van de vorm $E_{i,j}\left(\alpha\right)$, met $\alpha \neq 0$, en pas de rijbewerking toe die rij i vermenigvuldigt met $-\alpha$ en optelt bij rij j. In elk van de gevallen is het resultaat na een enkele rijbewerking de eenheidsmatrix. Elke elementaire matrix is daardoor rij-equivalent met de eenheidsmatrix, en via Stelling 3.16 inverteerbaar.

■

Bemerk dat we gebruik hebben gemaakt van de niet-nul voorwaarde op α in de definitie van $E_i\left(\alpha\right)$. We behandelen nog een belangrijke eigenschap van elementaire matrices.

Stelling 3.22 Inverteerbare Matrices zijn Producten van Elementaire Matrices

Stel dat A een inverteerbare matrix is. Dan bestaan er elementaire matrices E_1, E_2, E_3, …, E_t zodat $A = E_1E_2E_3 \dots E_t$.

Bewijs Omdat A inverteerbaar is, is A rij-equivalent met de eenheidsmatrix door Stelling 3.16, dus is er een reeks rijbewerkingen die I_n omzet in A. Stel voor elk van deze rijbewerkingen de bijhorende elementaire matrix op uit Stelling 3.20 en noteer deze matrices als E_1, E_2, E_3, …, E_t. Toepassen van de eerste rijbewerking op I_n levert E_1I_n op. De tweede rijbewerking levert $E_2(E_1I_n)$ op en de derde rijbewerking geeft $E_3E_2E_1I_n$. Het eindresultaat van de volledige reeks is de matrix A, dus

$$A = E_t \dots E_3E_2E_1I_n = E_t \dots E_3E_2E_1$$

Op een herindexering van deze elementaire matrices naar de omgekeerde volgorde na is dit het gewenste resultaat. ■

Sectie 3.6 Voorbereiding Werkcollege

1. Omdat vectoren in $\mathbb{R}^n$ beschouwd kunnen worden als $n \times 1$ matrices, gelden de eigenschappen van transponeren uit Stellingen 3.3 - 3.5 ook voor vectoren. Stel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   Bereken $(A\vec{\boldsymbol{x}})^T$, $\vec{\boldsymbol{x}}^T A^T$, $\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{x}}^T$, en $\vec{\boldsymbol{x}}^T\vec{\boldsymbol{x}}$. Is $A^T\vec{\boldsymbol{x}}^T$ gedefinieerd?

2. Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is waarvan alle rijen identiek zijn. Stel dat B een $n \times p$ matrix is waarvan alle kolommen identiek zijn. Wat kan je zeggen over de elementen van AB?

3. Bepaal of $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ inverteerbaar is.

4. Stel dat A en B $n \times n$ matrices zijn en de vergelijking $AB\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ een niet-triviale oplossing heeft. Wat kan je zeggen over de matrix AB?

Sectie 3.7 Oefeningen

Bewerkingen op matrices

1. Beschouw de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Voer de onderstaande bewerkingen uit.

(a) $A + B$

(b) $A + C$

(c) $B^T + C$

(d) $A + B^T$

(e) $\frac{1}{2}C$

(f) $4A - 3B$

(g) $A^T + 4C$

(h) $A + B - C^T$

(i) $4A + 2B - 5C^T$

2. Bepaal a, b en c zodat de onderstaande gelijkheid geldig is.

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -b \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & -3 \\ 2c & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

3. Los de onderstaande vergelijkingen op naar x of leg uit waarom er geen oplossing is.

(a) $2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $x\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $x\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

4. Bepaal α and β zodat onderstaande gelijkheid een oplossing heeft.

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Bepaal het product AB voor de gegeven matrices A en B.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. Beschouw de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bereken AD en DA. Leg uit hoe de kolommen of rijen van A veranderen als A vermenigvuldigd wordt met D langs rechts of links. Zoek een 3×3 matrix B (verschillend van de nulmatrix en de eenheidsmatrix) zodat $AB = BA$.

7. Gegeven de uitdrukking voor $[A]_{ij}$. Schrijf de 3×3 matrix A uit.

   (a) $[A]_{ij} = i + j$

   (b) $[A]_{ij} = i - j$

   (c) $[A]_{ij} = 16 - ij$

8. Gegeven de matrix A. Zoek een algemene uitdrukking voor de elementen $[A]_{ij}$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 16 & 36 \\ 9 & 36 & 81 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 14 \\ -1 & 2 & 7 & 14 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

9. Beschouw de onderstaande matrices A. Bepaal telkens A^2, A^3, A^4. Zoek een algemene formule voor A^n, met $n \in \mathbb{N}_0$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Een involutorische $n \times n$ matrix A is een matrix waarvoor geldt dat $A^2 = I_n$. Toon aan dat de onderstaande matrices A involutorisch zijn.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

11. We beschouwen onderstaande matrix A. Bewijs dat $A^3 - 2A^2 - 9A = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

12. We beschouwen een $n \times n$ matrix A waarvoor geldt dat $A^2 - 2A + I = 0$. Toon aan dat $A^3 = 3A - 2I$ en $A^4 = 4A - 3I$.

13. Beschouw twee symmetrische $n \times n$ matrices A en B, d.w.z. $A^T = A$ en $B^T = B$.

    (a) Toon aan dat $A.B$ symmetrisch is als $A.B = B.A$.

    (b) Toon aan dat $A.B = B.A$ als $A.B$ symmetrisch is.

14. Onderstel dat A een symmetrische matrix is. Toon aan dat voor elke matrix B het product $B^T AB$ ook symmetrisch is.

Inverse van een matrix

15. Zijn de onderstaande matrices inverteerbaar?

    (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Bepaal de inverse van de gegeven matrix, indien deze bestaat.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

    (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

    (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

    (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

    (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

    (f) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

    (g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    (h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

    (i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

    (j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

17. Leg uit waarom $A^T A$ inverteerbaar is als A inverteerbaar is. Toon vervolgens aan dat $A^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$.

18. Los de onderstaande stelsels op m.b.v. de inverse matrix van de coëfficiëntenmatrix.

    (a) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = -9 \\ -6x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$

19. Veronderstel dat A, B en X $n \times n$ matrices zijn met A, X en $A - AX$ inverteerbaar en veronderstel dat

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B.$$

(a) Leg uit waarom B inverteerbaar is.

(b) Los de bovenstaande vergelijking op naar X. Als een matrix moet geïnverteerd worden, leg dan steeds uit waarom dit mag.

20. Stel dat A, B, C en X inverteerbare $n \times n$ matrices zijn. Los de onderstaande vergelijkingen op naar X.

(a) $C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$

(b) $-BA^{-1} + (C + X^{-1})BA^{-1} = C$

21. Los de onderstaande vergelijkingen op naar X.

(a) $\left(X\begin{bmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 4\\6 & 2\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & -2\end{bmatrix}^{-1}\left(X^{-1}\begin{bmatrix}6 & -1\\2 & -3\end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix}6 & 10\\-2 & -1\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}X + \begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 2\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 7 & 9\\2 & 6 & 7\end{bmatrix}^{-1} X\begin{bmatrix}1 & -2\\3 & 2\end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix}8 & 3 & -6\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T = 2\begin{bmatrix}-19 & -29 & -39\\15 & 21 & 27\\-16 & -23 & -30\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}116 & 134\\134 & 155\end{bmatrix}^{-1}$

Input-output analyse

22. Veronderstel dat er vijf sectoren zijn in een bepaalde economie: Auto, Staal, Elektriciteit, Steenkool en Chemie, en dat de input-output matrix C en de vector met finale vraag voor de vijf sectoren $\vec{d}$ gegeven worden door:

$$C = \begin{bmatrix}0.15 & 0.10 & 0.05 & 0.05 & 0.10\\0.40 & 0.20 & 0.10 & 0.10 & 0.10\\0.10 & 0.25 & 0.20 & 0.10 & 0.20\\0.10 & 0.20 & 0.30 & 0.15 & 0.10\\0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.02 & 0.05\end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{d} = \begin{bmatrix}100\\200\\300\\400\\500\end{bmatrix}.$$

De eerste kolom van de matrix C kan geïnterpreteerd worden als het bedrag (in euro) dat elke sector nodig heeft om 1 euro Auto te produceren: 15 cent Auto, 40 cent Staal, 10 cent Elektriciteit en Steenkool en 5 cent Chemie.

Bepaal de totale output van elke sector door de vergelijking $\vec{x} = C\vec{x} + \vec{d}$ op te lossen naar $\vec{x}$.

Hoofdstuk 4
Lineaire Transformaties

Functies zijn belangrijke objecten binnen het studiegebied van calculus, maar zijn tot dusver afwezig geweest in deze cursus (zo lijkt het alvast wel). Bij meer geavanceerde wiskunde en talloze ingenieurstoepassingen is het vrijwel onmogelijk om te ontkomen aan het gebruik van functies — ze zijn even fundamenteel als verzamelingen. In dit hoofdstuk ontwikkelen we een functionele kijk op matrixbewerkingen. We focussen op lineaire transformaties, dewelke functies zijn met speciale eigenschappen. We behandelen surjectieve en injectieve lineaire transformaties als meer gespecialiseerde deelklassen van functies. Deze eigenschappen zullen een verband vertonen met het inverteren van een matrix.

Sectie 4.1 Lineaire Transformaties

Zoals gewoonlijk leiden we een hoofdstuk in met een geheel nieuwe definitie.

Definitie 4.1 Lineaire Transformatie

Een **lineaire transformatie**, $T\colon U \to V$, is een functie die de elementen van de vectorruimte U (genaamd het **domein**) afbeeldt op elementen van de vectorruimte V (het **codomein** genoemd) en twee karakteristieke eigenschappen heeft:

1. $T\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \vec{\boldsymbol{u}}_2\right) = T\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1\right) + T\left(\vec{\boldsymbol{u}}_2\right)$ voor alle $\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2 \in U$,
2. $T\left(\alpha\vec{\boldsymbol{u}}\right) = \alpha T\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right)$ voor alle $\vec{\boldsymbol{u}} \in U$ en alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Je kunt zien dat het woord *vectorruimte* voorkomt in de definitie. In tegenstelling tot meer gevorderde teksten over lineaire algebra zullen we geen formele definitie geven van dit begrip. Voor al wat volgt volstaat het om over U en V te denken als $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, met n en m eender welk natuurlijk getal. Er bestaan nog veel meer andere types vectorruimten, maar deze worden niet besproken in deze cursus.

De twee voorwaarden in de definitie zeggen wat het betekent om lineair te zijn. Als alle eigenschappen van vectorruimten afgeleid zijn uit de optelling van vectoren en scalaire vermenigvuldiging, dan zijn ook alle eigenschappen van een lineaire transformatie afgeleid van deze twee karakteriserende voorwaarden. De twee diagrammen hieronder vatten de essentie van de twee voorwaarden samen. Begin in beide gevallen in de linkerbovenhoek en volg de pijlen doorheen de rechthoek naar de hoek rechtsonder, waarbij je twee verschillende routes kan nemen terwijl je de bewerkingen op de labels van de pijlen uitvoert. Er zijn daarbij twee resultaten. Voor lineaire transformaties zijn de twee resultaten altijd gelijk.

$$\begin{tikzcd}
\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2 \arrow[r] \arrow[d, "+"] & T(\vec{\mathbf{u}}_1), \mathrm{T}(\vec{\mathbf{u}}_2) \arrow[d, "+"] \\
\vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2 \arrow[r] & T(\vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2) = T(\vec{\mathbf{u}}_1) + \mathrm{T}(\vec{\mathbf{u}}_2)
\end{tikzcd}$$

Diagram DLTA. Definitie van Lineaire Transformatie, Additief

$$\begin{tikzcd}
\vec{\mathbf{u}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & T(\vec{\mathbf{u}}) \arrow[d, "\alpha"] \\
\alpha\vec{\mathbf{u}} \arrow[r] & T(\alpha\vec{\mathbf{u}}) = \alpha T(\vec{\mathbf{u}})
\end{tikzcd}$$

Diagram DLTM. Definitie van Lineaire Transformatie, Multiplicatief

T is de naam van de lineaire transformatie en dient gebruikt te worden wanneer we het hebben over de functie in zijn geheel. $T(\vec{\boldsymbol{u}})$ is hoe we de output van de functie aanduiden, die een vector is in de vectorruimte V. We schrijven nu $T(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) = T(\vec{\boldsymbol{x}}) + T(\vec{\boldsymbol{y}})$, waarbij het plusteken aan de linkerkant duidt op de optelling van vectoren in de vectorruimte U, omdat $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$ elementen zijn van U. Het plusteken aan de rechterkant daarentegen is de optelling van vectoren in de vectorruimte V, omdat $T(\vec{\boldsymbol{x}})$ en $T(\vec{\boldsymbol{y}})$ elementen zijn van V. Deze twee optellingen van vectoren kunnen sterk verschillend zijn. Laat ons enkele voorbeelden onderzoeken en een opsomming geven van gekende lineaire transformaties waarmee we kunnen werken.

Voorbeeld 4.1

Definieer $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ door de output van de functie te beschrijven voor een generieke input via de formule

$$T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_3 \\ -4u_2 \end{bmatrix}$$

en controleer de twee karakteristieke eigenschappen:

$$\begin{aligned}
T(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) &= T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) \\ -4(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1 + x_3) + (2y_1 + y_3) \\ -4x_2 + (-4)y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y_1 + y_3 \\ -4y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= T(\vec{\boldsymbol{x}}) + T(\vec{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T(\alpha \vec{\boldsymbol{x}}) &= T\left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 2(\alpha x_1) + (\alpha x_3) \\ -4(\alpha x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(2x_1 + x_3) \\ \alpha(-4x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ -4x_2 \end{bmatrix} \\ &= \alpha T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \alpha T(\vec{\boldsymbol{x}}) \ . \end{aligned}$$

Dus door Definitie 4.1 is T een lineaire transformatie. ⊠

Het kan nuttig zijn om functies te bekijken die *geen* lineaire transformatie zijn. Omdat de karakteristieke voorwaarden moeten gelden voor *alle* vectoren en scalairen, is het voldoende om slechts één situatie te vinden waarvoor de voorwaarden niet voldaan zijn.

Voorbeeld 4.2
Definieer $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ door

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ x_1 + 3x_3 - 2 \end{bmatrix}.$$

Deze functie lijkt lineair, maar beschouw

$$3\,T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 3 \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix},$$

terwijl

$$T\left(3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Dan is de tweede voorwaarde niet voldaan voor de keuze $\alpha = 3$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, en door Definitie 4.1 is T dan geen lineaire transformatie. Het is even eenvoudig om een voorbeeld te vinden dat niet voldoet aan de eerste voorwaarde (probeer dit zelf). Bemerk dat het de -2 in de derde component van de output van T is die ervoor zorgt dat de functie geen lineaire transformatie is. ⊠

Laat ons nu twee basiseigenschappen van lineaire transformaties aantonen, die op een andere manier verifiëren dat de lineaire transformatie in Voorbeeld 4.2 niet-lineair is.

Stelling 4.1 Eigenschappen van Lineaire Transformaties

Als T een lineaire transformatie is, dan gelden de volgende twee eigenschappen:

$$T(\vec{\boldsymbol{0}}) = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad \text{en} \qquad T(c\vec{\boldsymbol{u}} + d\vec{\boldsymbol{v}}) = cT(\vec{\boldsymbol{u}}) + dT(\vec{\boldsymbol{v}}) \ ,$$

voor alle $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in U$ en $c, d \in \mathbb{R}$.

Bewijs De twee eigenschappen volgen rechtstreeks uit het toepassen van Definitie 4.1:

$$\begin{aligned} T(\vec{\mathbf{0}}) &= T(0\vec{\boldsymbol{u}}) = 0\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\mathbf{0}}\,, \\ T(c\vec{\boldsymbol{u}} + d\vec{\boldsymbol{v}}) &= T(c\vec{\boldsymbol{u}}) + T(d\vec{\boldsymbol{v}}) = c\,T(\vec{\boldsymbol{u}}) + d\,T(\vec{\boldsymbol{v}})\,. \end{aligned}$$

■

Net als de twee eigenschappen in Definitie 4.1 zijn dit noodzakelijke en voldoende voorwaarden om een lineaire transformatie te zijn. Als je erin slaagt om de eigenschappen van ofwel Definitie 4.1 ofwel Stelling 4.1 aan te tonen voor een gegeven transformatie, heb je bewezen dat ze lineair is. Dit is handig voor oefeningen.

Lineaire Transformatiediagrammen

Doorheen dit hoofdstuk zullen we tekeningen van lineaire transformaties meegeven, dewelke we **lineaire transformatiediagrammen** zullen noemen. Hierbij een eerste diagram, gevolgd door wat uitleg die je helpt begrijpen hoe dit diagram enkele fundamentele waarheden over lineaire transformaties beschrijft, terwijl ze andere waarheden weerlegt.

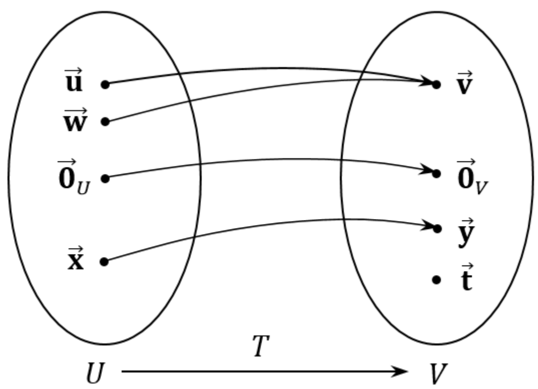


Diagram ALT. Algemene Lineaire Transformatie

Hier tonen we een lineaire transformatie $T\colon U \to V$ (zie onderaan diagram). De Venn-diagrammen stellen vectorruimten voor. In dit geval U -het domein- aan de linkerkant en V -het codomein- aan de rechterkant. Uiteraard zijn vectorruimten doorgaans oneindige verzamelingen, dus dien je die eigenschap in je achterhoofd te houden. Een kleine stip in een ovaal stelt een vector in die vectorruimte voor, al dan niet met een naam erbij. De grootte van de Venn-diagrammen zou evenredig moeten zijn met de dimensie van de vectorruimten. Wanneer we echter geen veronderstellingen (kunnen) maken over de dimensies, tekenen we de verzamelingen even groot, zoals we hier gedaan hebben (wat dus niet betekent dat de dimensies gelijk zijn).

Om aan te duiden dat de lineaire transformatie een bepaalde input met een bepaalde output associeert, tekenen we een pijl van de input naar de output. Zo suggereert dit diagram bijvoorbeeld dat $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{y}}$. Niets in de definitie van een lineaire transformatie zegt dat twee inputs een verschillende uitkomst moeten hebben. Daarenboven is het ook mogelijk dat een output (element van V) geen input heeft die naar die output gestuurd wordt. In het bovenstaand diagram vertaalt dit zich in het ontbreken van een pijl naar $\vec{\boldsymbol{t}}$. In dit diagram hebben we de essentie vastgelegd van de algemene stelling omtrent lineaire transformaties. Stelling 4.1, $T\left(\vec{\mathbf{0}}_U\right) = \vec{\mathbf{0}}_V$. Soms vermelden we dit elementair gegeven wanneer het relevant is, anders niet. Bemerk dat de definitie van een lineaire transformatie vereist dat T een functie is, zodat elk element van het domein geassocieerd is met een element van het codomein V. Dit vertaalt zich in het feit dat er geen enkel element is in het domein van waaruit geen pijl vertrekt.

Deze diagrammen zijn uiteraard geen vervanging voor zorgvuldig opgestelde definities en bewijzen, maar kunnen wel van pas komen wanneer we nadenken over de verschillende eigenschappen die we zullen bestuderen.

Matrices en Lineaire Transformaties

Beschouw een willekeurige matrix. Van daaruit is het eenvoudig om een lineaire transformatie te construeren. Eerst een voorbeeld om dit te staven, gevolgd door de stelling.

Voorbeeld 4.3
Stel

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

en definieer een functie $P\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ door

$$P(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}\,.$$

We gebruiken het matrix-vectorproduct (Definitie 2.7) als een manier om een vector met vier componenten om te zetten naar een vector met drie componenten. Toepassing van Definitie 2.7 maakt dat we de formule voor P in een lichtelijk andere vorm neerschrijven,

$$P(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

We herkennen de actie van de functie P die de componenten van de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ gebruikt als scalairen om de output van P te vormen als lineaire combinatie van de vier kolommen van de matrix A, die allemaal bevat zitten in $\mathbb{R}^3$, dus is het resultaat een vector in $\mathbb{R}^3$. We kunnen de uitdrukking verder herschikken, gebruik makend van de definities van bewerkingen in $\mathbb{R}^3$ (Sectie 2.1).

$$\begin{aligned}
P(\vec{\boldsymbol{x}}) &= A\vec{\boldsymbol{x}} && \text{Definitie van } P \\
&= x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.7} \\
&= \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ 0 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8x_3 \\ 5x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_4 \\ -2x_4 \\ -7x_4 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.2} \\
&= \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.1}
\end{aligned}$$

Je herkent wellicht in deze laatste uitdrukking dezelfde stijl als in enkele voorgaande voorbeelden (Voorbeeld 4.1). Maar de uitdrukking die zegt dat de output van deze lineaire transformatie een lineaire combinatie is van de kolommen van A, is waarschijnlijk de meest solide manier om na te denken over dit soort voorbeelden.

We moeten echter wel nog verifiëren dat P effectief een lineaire transformatie is. Dit is eenvoudig dankzij twee matrixeigenschappen uit Sectie 3.2:

$$\begin{aligned} P(\vec{x}+\vec{y}) &= A(\vec{x}+\vec{y}) && \text{Definitie van } P \\ &= A\vec{x}+A\vec{y} && \text{Stelling 3.7} \\ &= P(\vec{x})+P(\vec{y}) && \text{Definitie van } P, \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} P(\alpha\vec{x}) &= A(\alpha\vec{x}) && \text{Definitie van } P \\ &= \alpha(A\vec{x}) && \text{Stelling 3.7} \\ &= \alpha P(\vec{x}) && \text{Definitie van } P. \end{aligned}$$

Dus dankzij Definitie 4.1 is P een lineaire transformatie. ⊠

De vermenigvuldiging van een vector met een matrix *transformeert* de inputvector naar een outputvector, mogelijks van een andere grootte, door het vormen van een lineaire combinatie. En deze transformatie gebeurt op een lineaire manier. Deze functionele kijk op het matrix-vectorproduct is de sterkste verandering in de manier van denken die je op dit moment kan maken op vlak van lineaire algebra. Hier is de beloofde stelling, waarvan het bewijs een vrijwel exacte kopie is van de verificatie in het laatste voorbeeld.

Stelling 4.2 Matrices Induceren Lineaire Transformaties

Stel dat A een $m \times n$ matrix is. Definieer de functie $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ door $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Dan is T een lineaire transformatie.

Bewijs

$$\begin{aligned} T(\vec{x}+\vec{y}) &= A(\vec{x}+\vec{y}) && \text{Definitie van } T \\ &= A\vec{x}+A\vec{y} && \text{Stelling 3.7} \\ &= T(\vec{x})+T(\vec{y}) && \text{Definitie van } T \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{x}) &= A(\alpha\vec{x}) && \text{Definitie van } T \\ &= \alpha(A\vec{x}) && \text{Stelling 3.7} \\ &= \alpha T(\vec{x}) && \text{Definitie van } T \end{aligned}$$

Dus is T een lineaire transformatie via Definitie 4.1. ■

Stelling 4.2 geeft ons dus een snelle en eenvoudige manier om lineaire transformaties op te stellen. Neem een $m \times n$ matrix A, definieer $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ en Stelling 4.2 zegt ons dat T een lineaire transformatie is van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$, zonder dat we verder iets moeten controleren. We kunnen Stelling 4.2 ook omkeren.

Voorbeeld 4.4

Definieer de functie $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ als

$$P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Je kan controleren dat P een lineaire transformatie is door de definitie toe te passen, maar we kunnen ook de uitdrukking herschrijven tot een typische output die behoort tot een gekende klasse van lineaire transformaties.

$$\begin{aligned}
P\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ x_2 - 4x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ 5x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ x_3 \\ -3x_3 \\ -4x_3 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.1} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.2} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} && \text{Definitie 2.7}
\end{aligned}$$

Dus als we de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

definiëren, dan geldt $P(\vec{x}) = A\vec{x}$. Door Stelling 4.2 herkennen we P nu als een lineaire transformatie, net omdat P de vorm heeft die beschreven werd in de hypothese van de vorige stelling. ⊠

Andere voorbeelden zullen tot gelijkaardige inzichten leiden. Hieronder volgt de stelling, die opmerkelijk is, omdat het onze eerste kans is om de sterkte van de karakteristieke voorwaarden van een lineaire transformatie ten volste te benutten als de hypothese een lineaire transformatie bevat.

Stelling 4.3 Matrix van een Lineaire Transformatie

Stel dat $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een lineaire transformatie is. Dan is er een $m \times n$ matrix A waarvoor $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Bewijs De conclusie zegt ons dat er een zekere matrix bestaat. Welke betere manier is er om te bewijzen dat er één bestaat dan hem te construeren? Het bewijs zal daarom constructief zijn en de abstracte procedure die we zullen volgen doorheen het bewijs kan gebruikt worden voor concrete voorbeelden.

Stel dat $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$ de kolommen zijn van de eenheidsmatrix I_n met grootte n (Definitie 3.8). Evalueer de lineaire transformatie T met als input elk van de standaard eenheidsvectoren, en noteer de resultaten. Met andere woorden, definieer de n vectoren $\vec{a}_i$, $1 \leq i \leq n$ in $\mathbb{R}^m$ via

$$\vec{a}_i = T(\vec{e}_i).$$

Voeg deze vectoren dan samen zodat ze de kolommen vormen van een matrix

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \ldots \quad \vec{a}_n].$$

Heeft A de gewenste eigenschappen? A is allereerst alvast een $m \times n$ matrix. Dan is

$$\begin{aligned}
T(\vec{x}) &= T(I_n\vec{x}) & \\
&= T([\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \quad \dots \quad \vec{e}_n]\,\vec{x}) & \text{Definitie 3.8} \\
&= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 + \cdots + x_n\vec{e}_n) & \text{Definitie 2.7} \\
&= T(x_1\vec{e}_1) + T(x_2\vec{e}_2) + T(x_3\vec{e}_3) + \cdots + T(x_n\vec{e}_n) & \text{Definitie 4.1} \\
&= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + x_3T(\vec{e}_3) + \cdots + x_nT(\vec{e}_n) & \text{Definitie 4.1} \\
&= x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + \cdots + x_n\vec{a}_n & \text{Definitie van } \vec{a}_i \\
&= A\vec{x} & \text{Definitie 2.7}
\end{aligned}$$

zoals gewenst. ■

Dus voor een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ leidt elke matrix tot een lineaire transformatie van deze vorm (Stelling 4.2), terwijl elke lineaire transformatie aanleiding geeft tot een matrix (Stelling 4.3). Matrices en lineaire transformaties zijn dus wezenlijk hetzelfde. We noemen de matrix A uit Stelling 4.3 de **matrixvoorstelling** van T. We illustreren Stelling 4.3 met een voorbeeld.

Voorbeeld 4.5

Stel dat $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gedefinieerd wordt door

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 9x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ 4x_2 \end{bmatrix}.$$

Dan is

$$\vec{c}_1 = S(\vec{e_1}) = S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{c}_2 = S(\vec{e_2}) = S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\vec{c}_3 = S(\vec{e_3}) = S\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definieer vervolgens

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

en Stelling 4.3 garandeert dat $S(\vec{x}) = A\vec{x}$. Als een eerste voorbeeld, stel

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

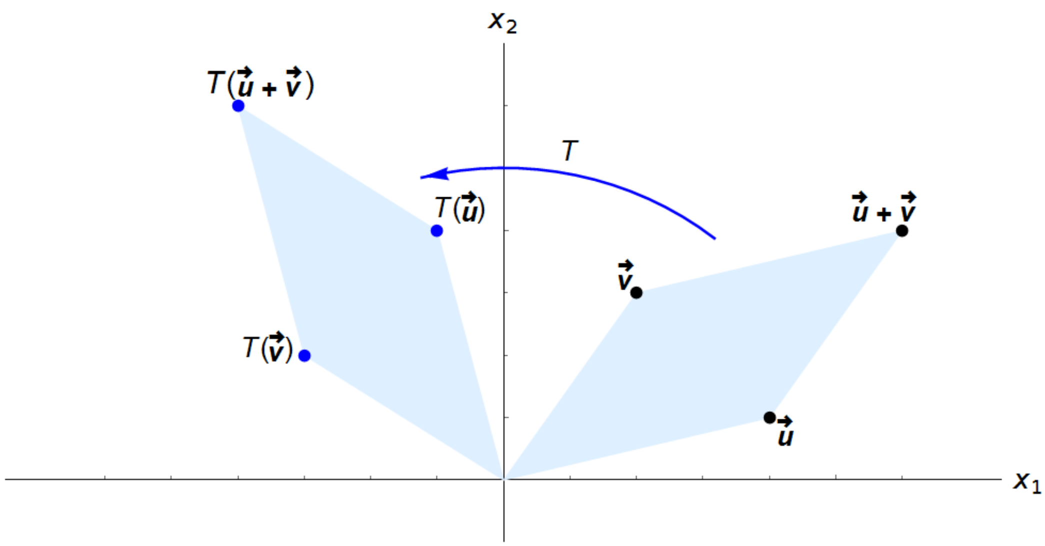
en bereken $S(\vec{z})$ op twee verschillende manieren. Keer eerst terug naar de definitie van S en evalueer rechtstreeks $S(\vec{z})$. Voer daarna het matrix-vectorproduct $A\vec{z}$ uit. In beide gevallen zou je de vector

$$S(\vec{z}) = \begin{bmatrix} 27 \\ 2 \\ 39 \\ -12 \end{bmatrix}$$

moeten uitkomen. ⊠

Voorbeeld 4.6

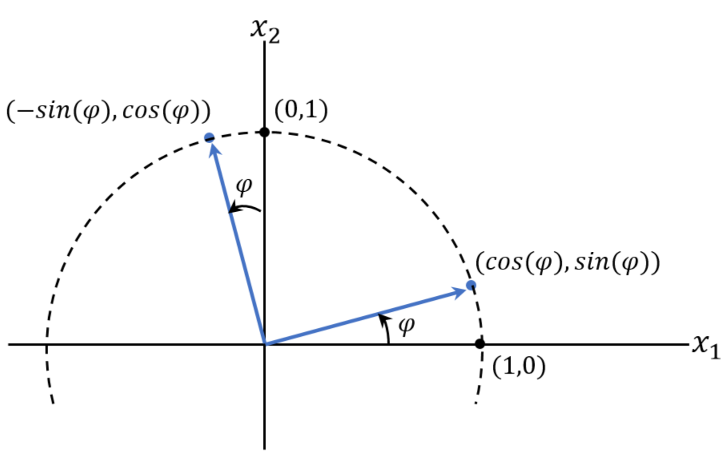
We beschouwen de transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die elke vector in $\mathbb{R}^2$ tegenwijzerzin roteert rond de oorsprong over een hoek φ. We kunnen visueel controleren dat de eigenschappen $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u})+T(\vec{v})$ en $T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$ voldaan zijn, waaruit we besluiten dat een rotatie een lineaire transformatie moet zijn. De volgende figuur toont dit voor de eerste eigenschap.



Als een toepassing van Stelling 4.3 kunnen we dus de zogenaamde rotatiematrix opstellen. De figuur hieronder visualiseert de transformatie van de standaard eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^2$. De standaard basisvector $(1,0)$ roteert naar $(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ en de standaard basisvector $(0,1)$ roteert naar $(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))$. Bijgevolg is

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

met A de matrix die een rotatie over een hoek φ voorstelt.



$\boxtimes$

In feite zijn de meeste basisberekeningen in twee dimensies lineaire transformaties. Hier is een overzicht van enkele transformaties en hun corresponderende matrix[1].

Beschrijving lineaire transformatie	Matrix
Spiegeling t.o.v. de horizontale as	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Spiegeling t.o.v. de verticale as	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Spiegeling t.o.v. de eerste bissectrice	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Horizontale uitrekking ($k > 1$) of samendrukking ($0 < k < 1$)	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Verticale uitrekking ($k > 1$) of samendrukking ($0 < k < 1$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
Horizontale afschuining	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Verticale afschuining	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

Sectie 4.2 Surjectieve Lineaire Transformaties

Sommige lineaire transformaties bezitten één of twee belangrijke eigenschappen, die we surjectiviteit en injectiviteit zullen noemen. We zullen zien dat ze beide sterk verband houden met concepten zoals opspannen en lineaire onafhankelijkheid. In deze sectie definiëren we een surjectieve lineaire transformatie en analyseren we de gevolgen ervan. De volgende sectie zal hetzelfde doen voor de injectieve eigenschap.

Definitie 4.2 Surjectieve Lineaire Transformatie

Stel dat $T\colon U \to V$ een lineaire transformatie is. Dan is T **surjectief** als voor elke $\vec{v} \in V$ er een $\vec{u} \in U$ bestaat waarvoor geldt $T(\vec{u}) = \vec{v}$.

Voor een willekeurige functie is het mogelijk dat er een element uit het codomein is dat geen output is van de functie (denk aan de functie $y = f(x) = x^2$ en het element $y = -3$ uit het codomein). Voor een surjectieve functie kan dit niet voorkomen. Als we een willekeurig element uit het codomein kiezen ($\vec{v} \in V$) dan moet er een input zijn uit het domein ($\vec{u} \in U$) die wordt afgebeeld op het beschouwde

[1]Tabel gereproduceerd uit https://www.quora.com/What-is-a-linear-transformation

element uit V ($T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{v}}$). We zullen soms verwijzen naar een surjectieve lineaire transformatie als een **surjectie**. We onderzoeken als eerste voorbeeld een lineaire transformatie die niet surjectief is.

Voorbeeld 4.7
Beschouw de volgende lineaire transformatie:

$$T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 \\ -16x_1 + 9x_2 + 12x_3 - 28x_4 + 28x_5 \\ -19x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 32x_4 + 37x_5 \\ -21x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 35x_4 + 39x_5 \\ -9x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 16x_4 + 16x_5 \end{bmatrix}.$$

Opdat T surjectief zou zijn, moet elke $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^5$ een element zijn van het codomein. Stel daarom dat $\vec{\boldsymbol{u}}$ een element is van het domein zodat $T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{v}}$. We onderzoeken een goedgekozen vector $\vec{\boldsymbol{v}}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{v}} = T(\vec{\boldsymbol{u}}) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -2u_1 + 3u_2 + 3u_3 - 6u_4 + 3u_5 \\ -16u_1 + 9u_2 + 12u_3 - 28u_4 + 28u_5 \\ -19u_1 + 7u_2 + 14u_3 - 32u_4 + 37u_5 \\ -21u_1 + 9u_2 + 15u_3 - 35u_4 + 39u_5 \\ -9u_1 + 5u_2 + 7u_3 - 16u_4 + 16u_5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ -16 & 9 & 12 & -28 & 28 \\ -19 & 7 & 14 & -32 & 37 \\ -21 & 9 & 15 & -35 & 39 \\ -9 & 5 & 7 & -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Negeer op dit moment even waarom we deze bepaalde vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ hebben gekozen. We herkennen nu de bijhorende inputvector $\vec{\boldsymbol{u}}$ als een oplossing van een lineair stelsel. Als we de bovenstaande matrix A noemen, dan wordt het stelsel $A\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$. We reduceren A nu tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uit Stelling 2.5 volgt dat het stelsel geen oplossing heeft voor elke mogelijke vector $\vec{\boldsymbol{v}}$, omdat A geen pivotelement heeft in elke rij. Door de afwezigheid van een oplossing voor een zekere $\vec{\boldsymbol{v}}$ besluiten we dat deze $\vec{\boldsymbol{v}}$ geen element van het codomein van T kan zijn, en bijgevolg is T niet surjectief.

⊠

Hieronder is een diagram te zien van een niet-surjectieve lineaire transformatie. Bemerk dat het voornaamste kenmerk van dit diagram is dat er twee vectoren van V niet bereikt worden door een element van U.

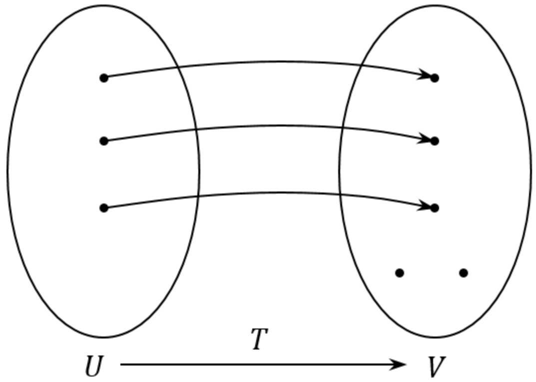


Diagram NSLT. Niet-Surjectieve Lineaire Transformatie

Om te bewijzen dat een lineaire transformatie niet surjectief is, volstaat het om één element te vinden in het codomein dat niet bereikt wordt door eender welke input, zoals in Voorbeeld 4.7. Om echter te bewijzen dat een lineaire transformatie wel surjectief is, moeten we aantonen dat *elk* element van het codomein voorkomt als de output van de lineaire transformatie voor een zekere input.

Voorbeeld 4.8
Beschouw een lineaire transformatie

$$T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -65x_1 + 128x_2 + 10x_3 - 262x_4 + 40x_5 \\ 36x_1 - 73x_2 - x_3 + 151x_4 - 16x_5 \\ -44x_1 + 88x_2 + 5x_3 - 180x_4 + 24x_5 \\ 34x_1 - 68x_2 - 3x_3 + 140x_4 - 18x_5 \\ 12x_1 - 24x_2 - x_3 + 49x_4 - 5x_5 \end{bmatrix}.$$

Om vast te stellen dat T surjectief is, moeten we beginnen met een volledig willekeurig element van het codomein, $\vec{v}$, en op één of andere manier een inputvector $\vec{u}$ vinden waarvoor geldt dat

$$T(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} -65u_1 + 128u_2 + 10u_3 - 262u_4 + 40u_5 \\ 36u_1 - 73u_2 - u_3 + 151u_4 - 16u_5 \\ -44u_1 + 88u_2 + 5u_3 - 180u_4 + 24u_5 \\ 34u_1 - 68u_2 - 3u_3 + 140u_4 - 18u_5 \\ 12u_1 - 24u_2 - u_3 + 49u_4 - 5u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}.$$

We herkennen deze vergelijking als een stelsel vergelijkingen in de variabelen u_i, maar de vector met constanten bevat symbolen. Over het algemeen zouden we de uitgebreide matrix met de hand moeten rij-reduceren, volgens de laatste, symbolische, kolom. In dit voorbeeld is de 5×5 coëfficiëntenmatrix echter inverteerbaar.

$$\begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -47 & 92 & 1 & -181 & -14 \\ 27 & -55 & \frac{7}{2} & \frac{221}{2} & 11 \\ -32 & 64 & -1 & -126 & -12 \\ 25 & -50 & \frac{3}{2} & \frac{199}{2} & 9 \\ 9 & -18 & \frac{1}{2} & \frac{71}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Dus vinden we dat

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 & 92 & 1 & -181 & -14 \\ 27 & -55 & \frac{7}{2} & \frac{221}{2} & 11 \\ -32 & 64 & -1 & -126 & -12 \\ 25 & -50 & \frac{3}{2} & \frac{199}{2} & 9 \\ 9 & -18 & \frac{1}{2} & \frac{71}{2} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -47v_1 + 92v_2 + v_3 - 181v_4 - 14v_5 \\ 27v_1 - 55v_2 + \frac{7}{2}v_3 + \frac{221}{2}v_4 + 11v_5 \\ -32v_1 + 64v_2 - v_3 - 126v_4 - 12v_5 \\ 25v_1 - 50v_2 + \frac{3}{2}v_3 + \frac{199}{2}v_4 + 9v_5 \\ 9v_1 - 18v_2 + \frac{1}{2}v_3 + \frac{71}{2}v_4 + 4v_5 \end{bmatrix}.$$

Dit vertelt ons dat wanneer we een *willekeurige* outputvector $\vec{v}$ krijgen, we diens componenten kunnen substitueren in deze finale uitdrukking om een vector $\vec{u}$ te construeren zodat $T(\vec{u}) = \vec{v}$. Met behulp van Definitie 4.2 weten we nu dat T surjectief is. ⊠

We zijn nu klaar om formeel uit te drukken wanneer een lineaire transformatie surjectief is. Dit brengt ons terug tot het volgende bekende resultaat.

Stelling 4.4 Surjecties en Pivotelementen

Een lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is surjectief als en slechts als A een pivotelement heeft in elke rij.

Bewijs Opdat $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ surjectief zou zijn, moet het stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ een oplossing hebben voor elke $\vec{b}$. We hebben gezien in Stelling 2.5 dat een dergelijk stelsel een oplossing heeft voor elke $\vec{b}$ als A een pivotelement heeft op elke rij. ■

We merken op dat deze stelling inderdaad gebruikt werd in Voorbeeld 4.8. De matrix in dat voorbeeld is inverteerbaar gebleken, net omdat die een pivotelement had op elke rij.

Sectie 4.3 Injectieve Lineaire Transformaties

In deze sectie zullen we ons toeleggen op lineaire transformaties die injectief zijn. Injectieve lineaire transformaties zijn sterk verbonden met lineaire onafhankelijkheid. Zoals gewoonlijk starten we met een definitie.

Definitie 4.3 Injectieve Lineaire Transformatie

Veronderstel dat $T: U \to V$ een lineaire transformatie is. Dan is T **injectief** als $T(\vec{x}) = T(\vec{y})$ impliceert dat $\vec{x} = \vec{y}$.

Voor een willekeurige functie is het mogelijk dat twee verschillende inputs dezelfde output teweegbrengen (denk aan de functie $f(x) = x^2$ en de inputs $x = 3$ en $x = -3$). Bij een injectieve functie komt dit nooit voor. Als we gelijke outputs hebben ($T(\vec{x}) = T(\vec{y})$) dan kan het niet anders dan dat deze inputs gelijk zijn aan elkaar ($\vec{x} = \vec{y}$). Sommige auteurs verkiezen de term **één-op-één** in plaats van injectief. We zullen soms ook verwijzen naar een injectieve lineaire transformatie als een **injectie**. We onderzoeken eerst een lineaire transformatie die niet injectief is.

Voorbeeld 4.9
In Voorbeeld 4.7 analyseerden we de lineaire transformatie

$$T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 \\ -16x_1 + 9x_2 + 12x_3 - 28x_4 + 28x_5 \\ -19x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 32x_4 + 37x_5 \\ -21x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 35x_4 + 39x_5 \\ -9x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 16x_4 + 16x_5 \end{bmatrix}.$$

Merk op dat we voor $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ hebben dat

$$T\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 55 \\ 72 \\ 77 \\ 31 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad T\left(\vec{\boldsymbol{y}}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 55 \\ 72 \\ 77 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

We hebben dus twee verschillende vectoren uit het domein, met name $\vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\boldsymbol{y}}$, maar toch geldt dat $T\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = T\left(\vec{\boldsymbol{y}}\right)$, wat in tegenstrijd is met Definitie 4.3. Ook dit is een voorbeeld waarbij onze specifieke keuze voor $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$ pas later duidelijk zal worden. Bestudeer echter wel *waarom* deze twee vectoren voldoende bewijs leveren om te besluiten dat T niet injectief is. ⊠

Hieronder staat een diagram van een niet-injectieve lineaire transformatie. Bemerk dat het voornaamste kenmerk van dit diagram het feit is dat $T\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right) = \vec{\boldsymbol{v}} = T\left(\vec{\boldsymbol{w}}\right)$. Het is voldoende om één vector te vinden die het beeld is van twee verschillende vectoren om te besluiten dat de lineaire transformatie niet injectief is. Merk ook op dat de vectoren die niet bereikt worden geen verschil maken voor wat betreft het besluit over de injectiviteit van T.

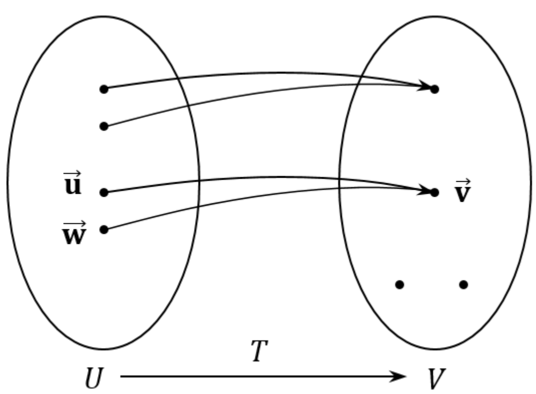


Diagram NILT. Niet-Injectieve Lineaire Transformatie

Om aan te tonen dat een lineaire transformatie niet injectief is, is het voldoende om één paar inputs te vinden die op dezelfde output worden afgebeeld, zoals in Voorbeeld 4.9. Om echter aan te tonen dat een lineaire transformatie injectief is, dienen we te controleren dat twee outputs *nooit* samenvallen. Het volgende voorbeeld toont hoe we dit het best kunnen aanpakken.

Voorbeeld 4.10
In Voorbeeld 4.8 analyseerden we de lineaire transformatie

$$T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -65x_1 + 128x_2 + 10x_3 - 262x_4 + 40x_5 \\ 36x_1 - 73x_2 - x_3 + 151x_4 - 16x_5 \\ -44x_1 + 88x_2 + 5x_3 - 180x_4 + 24x_5 \\ 34x_1 - 68x_2 - 3x_3 + 140x_4 - 18x_5 \\ 12x_1 - 24x_2 - x_3 + 49x_4 - 5x_5 \end{bmatrix}.$$

Om aan te tonen dat T injectief is, veronderstellen we dat $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = T(\vec{\boldsymbol{y}})$ en moeten we op de één of andere manier kunnen concluderen dat $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}$.

$$\begin{aligned}
& T(\vec{\boldsymbol{x}}) = T(\vec{\boldsymbol{y}}) \\
\Leftrightarrow\ & T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -65x_1 + 128x_2 + 10x_3 - 262x_4 + 40x_5 \\ 36x_1 - 73x_2 - x_3 + 151x_4 - 16x_5 \\ -44x_1 + 88x_2 + 5x_3 - 180x_4 + 24x_5 \\ 34x_1 - 68x_2 - 3x_3 + 140x_4 - 18x_5 \\ 12x_1 - 24x_2 - x_3 + 49x_4 - 5x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -65y_1 + 128y_2 + 10y_3 - 262y_4 + 40y_5 \\ 36y_1 - 73y_2 - y_3 + 151y_4 - 16y_5 \\ -44y_1 + 88y_2 + 5y_3 - 180y_4 + 24y_5 \\ 34y_1 - 68y_2 - 3y_3 + 140y_4 - 18y_5 \\ 12y_1 - 24y_2 - y_3 + 49y_4 - 5y_5 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -65x_1 + 128x_2 + 10x_3 - 262x_4 + 40x_5 \\ 36x_1 - 73x_2 - x_3 + 151x_4 - 16x_5 \\ -44x_1 + 88x_2 + 5x_3 - 180x_4 + 24x_5 \\ 34x_1 - 68x_2 - 3x_3 + 140x_4 - 18x_5 \\ 12x_1 - 24x_2 - x_3 + 49x_4 - 5x_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -65y_1 + 128y_2 + 10y_3 - 262y_4 + 40y_5 \\ 36y_1 - 73y_2 - y_3 + 151y_4 - 16y_5 \\ -44y_1 + 88y_2 + 5y_3 - 180y_4 + 24y_5 \\ 34y_1 - 68y_2 - 3y_3 + 140y_4 - 18y_5 \\ 12y_1 - 24y_2 - y_3 + 49y_4 - 5y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -65(x_1 - y_1) + 128(x_2 - y_2) + 10(x_3 - y_3) - 262(x_4 - y_4) + 40(x_5 - y_5) \\ 36(x_1 - y_1) - 73(x_2 - y_2) - (x_3 - y_3) + 151(x_4 - y_4) - 16(x_5 - y_5) \\ -44(x_1 - y_1) + 88(x_2 - y_2) + 5(x_3 - y_3) - 180(x_4 - y_4) + 24(x_5 - y_5) \\ 34(x_1 - y_1) - 68(x_2 - y_2) - 3(x_3 - y_3) + 140(x_4 - y_4) - 18(x_5 - y_5) \\ 12(x_1 - y_1) - 24(x_2 - y_2) - (x_3 - y_3) + 49(x_4 - y_4) - 5(x_5 - y_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} -65 & 128 & 10 & -262 & 40 \\ 36 & -73 & -1 & 151 & -16 \\ -44 & 88 & 5 & -180 & 24 \\ 34 & -68 & -3 & 140 & -18 \\ 12 & -24 & -1 & 49 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \\ x_4 - y_4 \\ x_5 - y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

We herkennen nu een homogeen stelsel van vijf vergelijkingen in vijf variabelen (de uitdrukkingen $x_i - y_i$ zijn de variabelen), dus rij-reduceren we de uitgebreide matrix tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dus de enige oplossing is de triviale oplossing

$$x_1 - y_1 = 0, \qquad x_2 - y_2 = 0, \qquad x_3 - y_3 = 0, \qquad x_4 - y_4 = 0, \qquad x_5 - y_5 = 0,$$

en we besluiten dat er inderdaad geldt dat $\vec{x} = \vec{y}$. Via Definitie 4.3 is T injectief. ⊠

Hieronder staat het diagram voor een injectieve lineaire transformatie. Dit illustreert dat er nooit twee inputs zijn die geassocieerd zijn met dezelfde output. De vectoren uit V die niet bereikt worden, maken opnieuw geen verschil voor de injectiviteit van T.

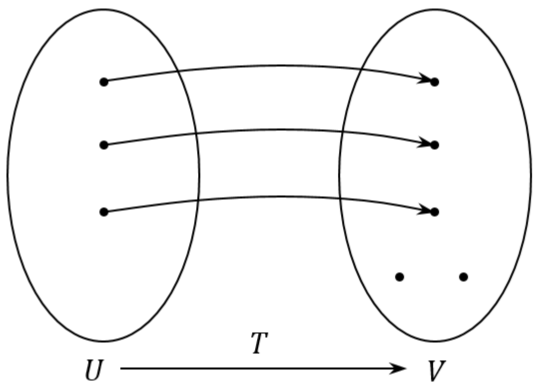


Diagram ILT. Injectieve Lineaire Transformatie

In Voorbeeld 4.10 hebben we injectiviteit gecontroleerd door na te gaan of een homogeen stelsel meer dan één oplossing heeft. We kunnen dezelfde methode toepassen op eender welke lineaire transformatie. Dit leidt tot een nieuwe stelling.

Stelling 4.5 Injecties en Pivotelementen

Een lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is injectief als en slechts als A een pivotelement heeft in elk kolom.

Bewijs Een formeel bewijs van deze stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Dergelijk bewijs kan in principe geconstrueerd worden door de procedure uit Voorbeeld 4.10 te veralgemenen. ■

Door Stelling 4.4 en Stelling 4.5 te combineren bekomen we nog een interessant resultaat. Wanneer is een lineaire transformatie zowel surjectief als injectief? De corresponderende matrix moet dan een pivotelement hebben in elke rij en elke kolom. Dit kan enkel voorkomen bij vierkante matrices en zal enkel gelden voor vierkante matrices die inverteerbaar zijn. We kunnen daarom de stelling van de inverteerbare matrices uitbreiden met twee additionele eigenschappen.

Sectie 4.4 Bijectieve Lineaire Transformaties

Definitie 4.4 Bijectieve Lineaire Transformatie

Als een transformatie zowel surjectief als injectief is, noemen we ze **bijectief**.

Voorbeeld 4.11
We toonden aan dat de transformatie in Voorbeeld 4.8 en Voorbeeld 4.10 surjectief en injectief is. Bijgevolg is deze transformatie bijectief. ⊠

Voortredenerend op Stelling 4.4 en Stelling 4.5, weten we dat een transformatie $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ een transformatiematrix A met een pivotelement in elke rij en elke kolom heeft. Dit kan alleen maar als A vierkant is, m.a.w. als $m = n$.

Stelling 4.6 Inverteerbare Matrix Stelling, Deel 2

Veronderstel dat A een vierkante matrix is van grootte n, dan zijn volgende stellingen equivalent.

1. A is inverteerbaar.
2. A kan gereduceerd worden tot de eenheidsmatrix.
3. Het lineair stelsel $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft een unieke oplossing voor elke mogelijke keuze voor $\vec{b}$.
4. De kolommen van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
5. Het homogene stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft enkel de triviale oplossing als oplossing.
6. De kolommen van A vormen een lineair onafhankelijke verzameling.
7. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is surjectief.
8. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is injectief.
9. De lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ is bijectief.

Sectie 4.5 Voorbereiding Werkcollege

1. Stel dat $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ en $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ voor een zekere matrix A en voor elke vector $\vec{x}$ in $\mathbb{R}^5$. Hoeveel rijen en kolommen heeft A?
2. Stel $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Geef een meetkundige beschrijving van de transformatie $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.
3. Veronderstel dat $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de transformatie is die eerst een horizontale verschuiving uitvoert die $\vec{e}_2$ naar $\vec{e}_2 - 0.5\vec{e}_1$ verschuift (maar $\vec{e}_1$ onveranderd laat) en daarna het resultaat spiegelt rond de x_2-as. Wetende dat T lineair is, vind dan de bijhorende standaardmatrix.
4. Stel dat A een $7{\times}5$ matrix is met 5 pivotelementen. Beschouw de lineaire transformatie $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ van $\mathbb{R}^5$ naar $\mathbb{R}^7$. Is T een injectieve lineaire transformatie? Is T surjectief?

Sectie 4.6 Oefeningen

Definitie en eigenschappen van een lineaire transformatie

1. Zijn de onderstaande transformaties lineaire transformaties?

(a) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4x_1-2x_2\\3|x_2|\end{bmatrix}$

(b) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x_1-x_2+5x_3\\-4x_1+2x_2-10x_3\end{bmatrix}$

2. Beschouw de lineaire transformatie $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ waarvoor geldt dat

$$T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\quad\text{en}\quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}.$$

Bepaal $T\left(\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\right)$.

3. Als T gedefinieerd is als $T(\vec{x})=A\vec{x}$, bepaal dan de vector $\vec{x}$ waarvoor $\vec{b}$ het beeld is onder T. Ga na of $\vec{x}$ uniek is.

(a) $A=\begin{bmatrix}1&-5&-7\\-3&7&5\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-8&8\\0&1&2\\1&0&8\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\6\\3\\10\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}1&0&-3\\-3&1&6\\2&-2&-1\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\end{bmatrix}$

(d) $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&1&-3\\2&-5&6\end{bmatrix}$, $\vec{b}=\begin{bmatrix}-6\\-4\\-5\end{bmatrix}$

4. Beschouw de matrix A en de vector $\vec{b}$. Ligt $\vec{b}$ in het bereik van de lineaire transformatie $\vec{x}\mapsto A\vec{x}$? Waarom wel of waarom niet?

(a) $\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ en $A=\begin{bmatrix}1&-3&5&-5\\0&1&-3&5\\2&-4&4&-4\end{bmatrix}$

(b) $\vec{b}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\4\end{bmatrix}$ en $A=\begin{bmatrix}3&2&10&-6\\1&0&2&-4\\0&1&2&3\\1&4&10&8\end{bmatrix}$

5. Gebruik een rechthoekig assenstelsel om de vectoren $\vec{u}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ en $\vec{v}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$ en hun beeld onder de gegeven transformatie T te tekenen.

(a) $T(\vec{x})=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

(b) $T(\vec{x})=\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

(c) $T(\vec{x})=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

(d) $T(\vec{x})=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

6. Beschouw de vectoren

$$\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2}} = \begin{bmatrix}-1\\6\end{bmatrix}.$$

De transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is een lineaire transformatie die $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}$ afbeeldt op $\vec{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}}$ en $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}$ op $\vec{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2}}$. Zoek het beeld van $\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$.

7. Veronderstel dat $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ een lineaire transformatie is. Bepaal de standaardmatrix van T als T eerst punten spiegelt t.o.v. de horizontale x_1-as en daarna t.o.v. de rechte $x_1 = x_2$.

Injectieve en surjectieve lineaire transformaties

8. Ga na of de gegeven lineaire transformatie injectief en/of surjectief is.

(a) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\2x+y\\x+2y\end{bmatrix}$

(b) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x+y+z\\x-y+2z\\x+2y-z\end{bmatrix}$

(c) $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x+y\\2y+z\\x+2z\end{bmatrix}$

(d) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1-x_2+5x_3\\-4x_1+2x_2-10x_3\end{bmatrix}$

(e) $T\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a+b+2c\\2c\\a+b+c\end{bmatrix}$

(f) $T\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}a+b-c\\a-b+c\\-a+b+c\\a+b+c\end{bmatrix}$

(g) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1+2x_2\\0\\2x_2+x_4\\x_2-x_4\end{bmatrix}$

(h) $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2x_1+x_2+x_3\\-x_1+3x_2+x_3-x_4\\3x_1+x_2+2x_3-2x_4\end{bmatrix}$

9. Beschouw de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, met

$$T(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}) = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, \quad T(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}) = \begin{bmatrix}-2\\9\end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}}) = \begin{bmatrix}3\\-8\end{bmatrix},$$

waarbij $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}$, $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}}$ en $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}}$ de kolommen zijn van de 3×3 eenheidsmatrix. Ga na of de gegeven lineaire transformatie injectief en/of surjectief is.

10. Beschrijf de mogelijke echelonvormen van de standaardmatrix van de gegeven lineaire transformatie T.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ is injectief.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ is surjectief.

Overkoepelende oefeningen

11. Beschouw de afbeelding $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ die elke drie-dimensionale vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ afbeeldt op zijn afstand tot de vector $\vec{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, of anders gezegd $S(\vec{\boldsymbol{x}}) = ||\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_1||$. Zijn de onderstaande beweringen waar of vals? Geef telkens een duidelijke verklaring of tegenvoorbeeld.

    (a) S is een lineaire transformatie.

    (b) S is een surjectieve afbeelding.

12. Beschouw de afbeelding

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x+3y \\ x+az \end{bmatrix} \qquad \text{met parameter } a \in \mathbb{R}.$$

    (a) Toon aan dat deze afbeelding T een lineaire transformatie is.

    (b) Bepaal de matrixvoorstelling van T. Noem deze matrix A.

    (c) Voor welke waarde(n) van a is T een bijectieve lineaire afbeelding?

13. Beschouw een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ waarvoor geweten is dat de vectoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectievelijk afgebeeld worden op de vectoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Welke van de onderstaande beweringen is/zijn dan waar?

    - Er is slechts één lineaire transformatie die aan bovenstaande voorwaarden voldoet,
    - $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
    - T is surjectief,
    - T is injectief.

Hoofdstuk 5
Deelruimten van $\mathbb{R}^m$

In dit theoretisch hoofdstuk worden een aantal concepten geïntroduceerd die in de volgende hoofdstukken toepassingen zullen kennen. We starten met een formele definitie van een deelruimte van $\mathbb{R}^m$, gevolgd door de begrippen basis en dimensie. We illustreren deze begrippen op een belangrijke deelruimte: de nulruimte van een matrix. We sluiten dit hoofdstuk af met een discussie over coördinatensystemen en basisverandering.

Sectie 5.1 Deelruimten van $\mathbb{R}^m$

Doorgaans starten we met een formele definitie wanneer we een nieuw begrip onder handen nemen.

Definitie 5.1 Deelruimte

Veronderstel dat W een deelverzameling is van $\mathbb{R}^m$. Dan is W een **deelruimte** van $\mathbb{R}^m$ als de volgende drie voorwaarden gelden

1. $\vec{\mathbf{0}} \in W$.
2. Als $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$ en $\vec{\boldsymbol{y}} \in W$, dan $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \in W$.
3. Als $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$, dan $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \in W$.

We zullen ontdekken dat we reeds bekend zijn met een breed gamma aan deelruimten uit voorgaande hoofdstukken. Laat ons een voorbeeld van een deelruimte bekijken.

Voorbeeld 5.1
Beschouw de deelverzameling

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0 \right\}.$$

Het is duidelijk dat $W \subseteq \mathbb{R}^3$ omdat alle objecten in W kolomvectoren van grootte 3 zijn. Maar is W een deelruimte van $\mathbb{R}^3$? Voldoet het aan de drie eigenschappen uit Definitie 5.1? Dat is de vraag. Het spreekt voor zich dat de eerste voorwaarde voldaan is, want $\vec{\mathbf{0}} \in W$.

We proberen nu de tweede eigenschap te bewijzen. Veronderstel dat $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ vectoren zijn uit W. Dan weten we dat deze vectoren niet geheel willekeurig kunnen zijn. We weten bijvoorbeeld dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ moet voldoen aan $2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0$ terwijl $\vec{\boldsymbol{y}}$ moet voldoen aan $2y_1 - 5y_2 + 7y_3 = 0$. Onze tweede eigenschap stelt de vraag of $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \in W$. Wanneer onze verzameling vectoren nog $\mathbb{R}^3$ was, was deze vraag snel beantwoord. Nu is ze minder duidelijk. Bemerk eerst dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} .$$

We kunnen het lidmaatschap tot W controleren via

$$\begin{aligned} 2(x_1 + y_1) - 5(x_2 + y_2) + 7(x_3 + y_3) &= 2x_1 + 2y_1 - 5x_2 - 5y_2 + 7x_3 + 7y_3 \\ &= (2x_1 - 5x_2 + 7x_3) + (2y_1 - 5y_2 + 7y_3) \\ &= 0 + 0 && \vec{\boldsymbol{x}} \in W,\ \vec{\boldsymbol{y}} \in W \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

en via deze berekening zien we dat $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \in W$. Eén extra eigenschap klaar, nog één te gaan.

Als α een scalair is en $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$, geldt er dan altijd dat $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \in W$? Dit is wat we dienen te bewijzen voor de derde voorwaarde. We bekijken de vector

$$\alpha\vec{\boldsymbol{x}} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} .$$

We kunnen testen of deze vector tot W behoort met de formule

$$\begin{aligned} 2(\alpha x_1) - 5(\alpha x_2) + 7(\alpha x_3) &= \alpha(2x_1 - 5x_2 + 7x_3) \\ &= \alpha 0 && \vec{\boldsymbol{x}} \in W \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

We zien zo dat er inderdaad geldt dat $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \in W$, voor elke combinatie van vector en scalair. Bijgevolg concluderen we dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^3$. ⊠

Het kan nuttig zijn om enkele deelverzamelingen te beschouwen die *geen* deelruimte zijn. Een deelverzameling is geen deelruimte als minstens één van de drie voorwaarden niet voldaan is. In eender welk interessant voorbeeld zal dit alvast niet de eerste voorwaarde zijn. Het is voldoende dat een voorwaarde niet geldt voor één vector of koppel vectoren.

Voorbeeld 5.2
Beschouw de deelverzameling W als een kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, 3x_1 - 5x_2 = 12 \right\}$$

De nulvector van $\mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, zal niet de nulvector in W zijn, want $\vec{\mathbf{0}} \notin W$ aangezien $3(0) - 5(0) = 0 \neq 12$. Dus W heeft geen nulvector, waardoor de eerste voorwaarde uit Definitie 5.1 niet voldaan is.

Deze deelverzameling is eveneens niet gesloten onder de optelling en scalaire vermenigvuldiging. Kun je hier voorbeelden van vinden? ⊠

Voorbeeld 5.3
Beschouw de deelverzameling X als een kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 x_2 = 0 \right\}$$

Je kan controleren dat $\vec{\mathbf{0}} \in X$. We beschouwen $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in X$ en $\vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in X$. Toch geldt er dat

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin X$$

Dus voldoet X niet aan de tweede voorwaarde uit Definitie 5.1 en is daardoor geen deelruimte. ⊠

Voorbeeld 5.4
Beschouw de deelverzameling Y als kandidaat-deelruimte van $\mathbb{R}^2$.

$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{Z},\, x_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

We laten enkel gehele getallen toe als elementen in onze vectoren. Nu geldt dat $\vec{\mathbf{0}} \in Y$ en dat de verzameling gesloten is onder de optelling (verifieer dit zelf). We beschouwen $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ en $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in Y$, echter

$$\alpha \vec{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \notin Y\,.$$

Dus de derde voorwaarde van Definitie 5.1 geldt niet voor Y. Dit is bijgevolg geen deelruimte. ⊠

Er zijn twee voorbeelden van triviale deelruimten. Via Definitie 5.1 komt $\mathbb{R}^m$ in aanmerking om een deelruimte van zichzelf te zijn. De verzameling die enkel de nulvector bevat, $Z = \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$, is ook een deelruimte, wat we kunnen inzien door Definitie 5.1 toe te passen. Deze deelruimten zijn zo duidelijk (en daardoor niet al te interessant) dat we ernaar zullen verwijzen als triviale deelruimten. We sluiten deze sectie af met een minder triviale observatie.

Stelling 5.1 Opspannende verzamelingen zijn deelruimten

Stel dat $S = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ een verzameling is van vectoren in $\mathbb{R}^m$. Dan is $\mathrm{Span}\,(S)$ een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

Bewijs $\mathrm{Span}\,(S)$ bevat alle lineaire combinaties van $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n$, met name alle vectoren $\vec{\boldsymbol{x}}$ van de vorm

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

met $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. De nulvector maakt natuurlijk deel uit van $\mathrm{Span}\,(S)$, met de keuze $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, dus de eerste voorwaarde is voldaan. Om de tweede voorwaarde na te gaan, beschouw $\vec{\boldsymbol{x}}$ en een tweede vector $\vec{\boldsymbol{y}}$ in $\mathrm{Span}\,(S)$:

$$\vec{\boldsymbol{y}} = c_1'\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2'\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n'\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

met $c'_1, \ldots, c'_n \in \mathbb{R}$. Dan is de som van $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$ eveneens in Span (S), omdat

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = (c_1 + c'_1)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (c_2 + c'_2)\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + (c_n + c'_n)\vec{\boldsymbol{v}}_n\,.$$

De derde voorwaarde wordt op een gelijkaardige manier aangetoond. Beschouw opnieuw een willekeurige $\vec{\boldsymbol{x}}$ in Span (S). Dan maakt

$$\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \;=\; \alpha(c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + c_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n) = (\alpha c_1)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + (\alpha c_2)\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \cdots + (\alpha c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_n$$

ook deel uit van Span (S) voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$. ■

Sectie 5.2 Basissen

Een basis van een vectorruimte is één van de meest waardevolle concepten in de lineaire algebra. Dikwijls zal deze een compacte, eindige beschrijving geven van een deelruimte. We beschikken nu over alle middelen om een basis van een deelruimte te definiëren.

Definitie 5.2 Basis

Veronderstel dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^m$. Dan is de verzameling $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ van vectoren in W een **basis** voor W als $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ lineair onafhankelijk is en W opspant.

Dus een basis is een lineair onafhankelijke opspannende verzameling voor een deelruimte. De benodigdheden opdat de verzameling de deelruimte W opspant, zorgen ervoor dat de verzameling voldoende “grondstoffen” bevat om W op te bouwen, terwijl de lineaire onafhankelijkheid verzekert dat we niet meer grondstoffen hebben dan we eigenlijk nodig hebben. Zoals we zullen zien in de volgende sectie, is een basis een minimale opspannende verzameling.

Voorbeelden van Basissen

Merk op dat Definitie 5.2 toelaat dat een deelruimte meerdere basissen heeft. Dit zal in werkelijkheid ook het geval zijn, zoals zal blijken uit de volgende voorbeelden. Meer algemeen kunnen we eender welke basis van een deelruimte nemen, elke basisvector vermenigvuldigen met een scalair verschillend van nul en een andere verzameling maken die nog altijd een basis zal zijn. Voor $\mathbb{R}^m$ zal het gemakkelijk zijn om een collectie aan “mooie” basissen te hebben. Wanneer een vectorruimte één bepaalde, goedgevormde basis heeft, wordt deze soms de **standaardbasis** genoemd.

Stelling 5.2 Standaard Eenheidsvectoren zijn een Basis

De verzameling van standaard eenheidsvectoren voor $\mathbb{R}^m$, $B = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2, \vec{\boldsymbol{e}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_m\} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_i |\, 1 \leq i \leq m\}$ is een basis voor de vectorruimte $\mathbb{R}^m$.

Bewijs We moeten aantonen dat de verzameling B zowel lineair onafhankelijk als een opspannende verzameling voor $\mathbb{R}^m$ is. Eerst en vooral zijn de vectoren van B de kolommen van de eenheidsmatrix

I, waarvan we weten dat I inverteerbaar is (want I is rij-equivalent met de eenheidsmatrix). Bovendien zijn de kolommen van een inverteerbare matrix lineair onafhankelijk. Veronderstel dat we een willekeurige vector uit $\mathbb{R}^m$ nemen, stel

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Kunnen we $\vec{\boldsymbol{v}}$ schrijven als een lineaire combinatie van de vectoren in B? Ja, en wel vrij eenvoudig.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + v_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + v_3\vec{\boldsymbol{e}}_3 + \cdots + v_m\vec{\boldsymbol{e}}_m$$

Dit toont aan dat $\mathbb{R}^m \subseteq \operatorname{Span}(B)$, wat voldoende is om aan te tonen dat B een opspannende verzameling is voor $\mathbb{R}^m$. ■

De basissen hierboven beschreven zullen vaak de eenvoudigste zijn om mee te werken. Een basis hoeft echter niet altijd op het eerste zicht op een basis te lijken. We zullen weldra voorbeelden van die aard tegenkomen.

Vectoren elimineren

Als we een lineair afhankelijke verzameling gebruiken om een span te construeren, dan kunnen we *altijd* dezelfde oneindige verzameling opspannen uit een verzameling die één vector kleiner is in grootte. We zullen dit gedrag illustreren in Voorbeeld 5.5. Dit is echter niet mogelijk wanneer we een span opbouwen uit een lineair onafhankelijke verzameling. In zekere zin is het gebruiken van een lineair onafhankelijke verzameling om een span te construeren de best mogelijke manier — er zijn geen extra vectoren die gebruikt worden om alle nodige lineaire combinaties op te bouwen.

Stelling 5.3 Van Span tot Basis

Stel $S = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ en $H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\})$.

a. Wanneer $\vec{\boldsymbol{v}}_k \in S$ een lineaire combinatie is van de andere vectoren in S, dan spant $S \setminus \{\vec{\boldsymbol{v}}_k\}$ nog altijd H op.

b. Als $H \neq \left\{\vec{\boldsymbol{0}}\right\}$, dan bestaat er een deelverzameling van S die een basis is voor H.

Bewijs Om (a) te bewijzen starten we met het herordenen van de verzameling $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ zodat de laatste vector in de verzameling geschreven kan worden als een lineaire combinatie van de andere vectoren, i.e. $\vec{\boldsymbol{v}}_n$ wordt $\vec{\boldsymbol{v}}_k$ en vice versa. Bijgevolg kunnen we $\vec{\boldsymbol{v}}_n$ schrijven als

$$\vec{\boldsymbol{v}}_n = a_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + a_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}.$$

Beschouw nu een willekeurige vector $\vec{\boldsymbol{x}} \in H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\})$. Voor deze vector geldt er dat

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{x}} &= c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} + c_n\vec{\boldsymbol{v}}_n \\
&= c_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + c_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1} + c_n\left(a_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + a_{n-1}\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\right) \\
&= (c_1 + a_1c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \cdots + (c_{n-1} + a_{n-1}c_n)\vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\,.
\end{aligned}$$

Dus, $H = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}) = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \vec{\boldsymbol{v}}_{n-1}\})$, want elke vector in H kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de overige $n-1$ vectoren.

Om (b) te bewijzen passen we herhaaldelijk de procedure uit (a) toe. Op een gegeven punt zullen we een gereduceerde verzameling bekomen waarbij geen van de resterende vectoren een lineaire combinatie is van de anderen. Deze vectoren vormen dan een lineair onafhankelijke verzameling. Door (a) spant de gereduceerde verzameling ook de deelruimte op, dus moet ze een basis zijn voor de deelruimte. ■

Deze stelling kan gebruikt worden, soms herhaaldelijk, om een verzameling vectoren in een span terug te brengen tot een basis. In het volgende voorbeeld gaan we dieper in op de subtiliteiten.

Voorbeeld 5.5
Beschouw de verzameling R van vier vectoren uit $\mathbb{R}^5$,

$$R = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_3,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 6 \\ -11 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

en definieer $W = \operatorname{Span}(R)$. Om Stelling 2.8 toe te passen, stellen we de 5×4 coëfficiëntenmatrix A op:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \\ -1 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -11 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix},$$

en rij-reduceren we de uitgebreide matrix van het homogene stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

We kunnen oneindig veel oplossingen vinden voor dit stelsel, waarvan de meeste niet-triviaal zijn:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -4x_4 \\
x_2 &= 0 \\
x_3 &= -x_4.
\end{aligned}$$

We kunnen eender welke vector kiezen om een lineaire afhankelijkheid in R op te stellen. We beginnen met $x_4 = 1$ en vinden de oplossing

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen dus het lineair verband

$$(-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 0\vec{\boldsymbol{v}}_2 + (-1)\vec{\boldsymbol{v}}_3 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4 = \vec{\mathbf{0}}$$

neerschrijven. Stelling 5.3 garandeert dan dat we deze lineaire afhankelijkheid kunnen oplossen naar *een* vector van R, maar de keuze is volledig aan ons. Merk echter op dat $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ nul als coëfficiënt heeft. In dit geval kunnen we niet kiezen om op te lossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_2$. Misschien zou een ander lineair verband een niet-nul coëfficiënt bij $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ teweegbrengen als we enkel voor deze vector dienden op te lossen. Dit voorbeeld is echter zo opgebouwd dat het *altijd* een nul zal opleveren bij $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, zoals je kan zien door het homogeen stelsel op te lossen. Elke oplossing heeft $x_2 = 0$.

Als we nu overtuigd zijn dat we niet kunnen oplossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_2$, dan kiezen we om op te lossen naar $\vec{\boldsymbol{v}}_3$,

$$\vec{\boldsymbol{v}}_3 = (-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 0\vec{\boldsymbol{v}}_2 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4 = (-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4\,.$$

We beweren nu dat deze specifieke vergelijking ons toelaat om te schrijven dat

$$W = \operatorname{Span}(R) = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_3,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\}) = \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\})\ ,$$

waarbij $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ in essentie overbodig wordt om W op te bouwen als span. Deze bewering is een gelijkheid van twee verzamelingen. Stel $R' = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1,\, \vec{\boldsymbol{v}}_2,\, \vec{\boldsymbol{v}}_4\}$ en $W' = \operatorname{Span}(R')$. We willen aantonen dat $W = W'$.

Toon eerst aan dat $W' \subseteq W$. Omdat elke vector van R' in R bevat is, kan elke vector die we kunnen construeren in W' als lineaire combinatie van R' ook geconstrueerd worden als vector in W door dezelfde lineaire combinatie van dezelfde vectoren in R. Dat was eenvoudig. Nu draaien we het om.

Vervolgens tonen we dat $W \subseteq W'$. Kies een $\vec{\boldsymbol{v}}$ uit W. Dan zijn er scalairen $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \alpha_4$ zodat

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{v}} &= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_3 + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \alpha_3\left((-4)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{v}}_4\right) + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \alpha_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \left((-4\alpha_3)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_3\vec{\boldsymbol{v}}_4\right) + \alpha_4\vec{\boldsymbol{v}}_4 \\
&= \left(\alpha_1 - 4\alpha_3\right)\vec{\boldsymbol{v}}_1 + \alpha_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 + \left(\alpha_3 + \alpha_4\right)\vec{\boldsymbol{v}}_4.
\end{aligned}$$

Deze vergelijking zegt dat $\vec{\boldsymbol{v}}$ geschreven kan worden als lineaire combinatie van de vectoren in R' en zodoende zit deze vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ in W'. Dus $W \subseteq W'$ en we hebben vastgesteld dat $W = W'$.

Als R' ook lineair afhankelijk was, dan konden we de verzameling nog verder reduceren. R' is echter lineair onafhankelijk, dus vormt deze verzameling een basis voor de span. Merk op dat we ervoor konden kiezen om eender welke van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ of $\vec{\boldsymbol{v}}_4$ te elimineren, maar schijnbaar is $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ essentieel voor de constructie van W, omdat $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ niet vervangen kan worden door een lineaire combinatie van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$, $\vec{\boldsymbol{v}}_3$ of $\vec{\boldsymbol{v}}_4$.
⊠

In Voorbeeld 5.5 maakten we gebruik van vier vectoren om een span te creëren. Startend van een lineair afhankelijke verzameling die uit vier vectoren bestond, waren we in staat om een vector te verwijderen, zonder dat dat gevolgen had voor de opspannende verzameling van die vectoren. We moesten wel zorgvuldig te werk gaan, zodat we de juiste verctor verwijderden. De volgende stelling stelt een gefundeerde methode voor om steeds de juiste vector te kiezen als we vectoren verwijderen uit een lineair afhankelijke verzameling.

Stelling 5.4 Basis van een Span

Stel dat $S = \{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2, \vec{\boldsymbol{v}}_3, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_n\}$ een verzameling van kolomvectoren is. Definieer $W = \operatorname{Span}(S)$ en laat A de matrix zijn die de vectoren van S als kolommen heeft. Stel dat B de gereduceerde echelonvorm van A is, met $D = \{d_1, d_2, d_3, \ldots, d_r\}$ de verzameling van indices die corresponderen met pivotkolommen in B. Dan geldt:

1. $T = \{\vec{\boldsymbol{v}}_{d_1}, \vec{\boldsymbol{v}}_{d_2}, \vec{\boldsymbol{v}}_{d_3}, \ldots \vec{\boldsymbol{v}}_{d_r}\}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.
2. $W = \operatorname{Span}(T)$.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Nu volgt een directe toepassing van Stelling 5.4.

Voorbeeld 5.6

Start met een verzameling van vijf vectoren in $\mathbb{R}^4$,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\1\\-1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\5\\1\end{bmatrix} \right\}$$

en stel $W = \operatorname{Span}(S)$. Om een kleinere lineair onafhankelijke verzameling te bekomen, volg de procedure die beschreven wordt in Stelling 5.4. Plaats de vectoren in S als kolommen in een matrix en rij-reduceer,

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 7 & 0\\1 & 2 & 0 & 1 & 2\\2 & 4 & -1 & -1 & 5\\1 & 2 & 1 & 4 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{RREF}} \begin{bmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Kolommen 1 en 3 zijn de pivotkolommen ($D = \{1, 3\}$) dus de verzameling

$$T = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

is linear onafhankelijk en $\operatorname{Span}(T) = \operatorname{Span}(S) = W$.

Omdat de gereduceerde echelonvorm van een matrix uniek is (Stelling 1.4), leidt de procedure in Stelling 5.4 tot een unieke verzameling T. Er zijn echter heel wat verzamelingen T die lineair onafhankelijk zijn en W opspannen. Zonder bewijs geven we twee andere mogelijkheden:

$$T' = \left\{ \begin{bmatrix}2\\2\\4\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\-1\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$$T^* = \left\{ \begin{bmatrix}3\\1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\3\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Kan je zelf bewijzen dat T' en T^* lineair onafhankelijk zijn en $W = \operatorname{Span}(S) = \operatorname{Span}(T') = \operatorname{Span}(T^*)$? ⊠

Basissen en Inverteerbare Matrices

Een snelle manier om verschillende basissen voor $\mathbb{R}^m$ te bekomen is de verzameling van de kolommen van een inverteerbare matrix te beschouwen.

Stelling 5.5 Kolommen van een Inverteerbare Matrix vormen een Basis

Stel dat A een vierkante matrix is van grootte m. Dan vormen de kolommen van A een basis voor $\mathbb{R}^m$ als en slechts als A inverteerbaar is.

Bewijs ($\Rightarrow$) Stel dat de kolommen van A een basis vormen voor $\mathbb{R}^m$. Dan zegt Definitie 5.2 dat de verzameling bestaande uit deze kolommen lineair onafhankelijk is. Wegens Stelling 3.16 is A dan inverteerbaar.

($\Leftarrow$) Stel dat A inverteerbaar is. Dan is deze verzameling wegens Stelling 3.16 lineair onafhankelijk. Diezelfde stelling zegt ook dat de kolommen van A dan een opspannende verzameling zijn. Als lineair onafhankelijke, opspannende verzameling komt A in aanmerking als basis voor $\mathbb{R}^m$ (Definitie 5.2). ■

Voorbeeld 5.7

Beschouw de 5×5 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 18 & 24 & 24 & -12 \\ 12 & -2 & -6 & 0 & -18 \\ -30 & -21 & -23 & -30 & 39 \\ 27 & 30 & 36 & 37 & -30 \\ 18 & 24 & 30 & 30 & -20 \end{bmatrix}$$

die rij-equivalent is met de 5×5 eenheidsmatrix I_5. Dus via Stelling 3.16 is A inverteerbaar. Dan zegt Stelling 5.5 dat de verzameling

$$\left\{ \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -30 \\ 27 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ -2 \\ -21 \\ 30 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ -6 \\ -23 \\ 36 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ -30 \\ 37 \\ 30 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ -18 \\ 39 \\ -30 \\ -20 \end{bmatrix} \right\}$$

een (andere) basis is voor $\mathbb{R}^5$. ⊠

We kunnen het feit dat de standaard eenheidsvectoren een basis vormen (Stelling 5.2) zien als niets meer of minder dan een rechtstreeks gevolg van Stelling 5.5.

Dimensie van een Deelruimte

Nu volgt een zeer eenvoudige definitie. Neem een basis en tel het aantal vectoren in die basis. Dat is de dimensie.

Definitie 5.3 Dimensie

Stel dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ en $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ een basis voor W is. Dan wordt de **dimensie** van W gedefinieerd als $\dim(W) = n$.

Deze eenvoudige definitie heeft echter een inherent probleem. Voor een deelruimte kunnen jij en ik verschillende basissen construeren. Wat als jouw en mijn basis een verschillende dimensie hebben? We zouden dus kunnen concluderen dat het begrip dimensie niet goed gedefinieerd is. Gelukkig is er een stelling die dat probleem oplost.

Stelling 5.6 Basissen hebben dezelfde grootte

Stel dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ is, met een basis B en een tweede basis C. Dan hebben B en C dezelfde grootte.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. Probeer zelf verschillende basissen te construeren voor een bepaalde deelruimte, en toon aan dat elke basis evenveel vectoren heeft. ■

We sluiten deze sectie af met een eerder triviaal resultaat.

Stelling 5.7 Dimensie van $\mathbb{R}^m$

De dimensie van $\mathbb{R}^m$ is m.

Bewijs Stelling 5.2 voorziet ons van een basis die uit m vectoren bestaat. ■

Voorbeeld 5.8

In Voorbeeld 2.13 zagen we dat een lege verzameling de verzameling met enkel de nulvector omspant. Toepassing van Definitie 5.3 leert ons dat $\{\ \vec{\mathbf{0}}\ \}$ dimensie 0 heeft. Meetkundig klopt dit ook: deze verzameling bevat slechts één punt, de oorsprong.

⊠

Sectie 5.3 De Nulruimte van een Matrix

Onze discussie over deelruimten heeft als ultieme doel om een specifieke deelruimte wat meer in detail te bestuderen: de nulruimte van een matrix. De oplossingsverzameling van een homogeen stelsel (die als gevolg van Stelling 2.6 nooit ledig is) is, is voldoende interessant om een specifieke naam te verkrijgen. Dat is wat we nu zullen doen. We zullen de nulruimte echter niet definiëren als een eigenschap van het homogeen stelsel, maar als een eigenschap van de corresponderende coëfficiëntenmatrix.

Definitie 5.4 Nulruimte van een Matrix

De **nulruimte** van een matrix A, genoteerd als $\mathcal{N}(A)$, is de verzameling van alle vectoren die een oplossing zijn van het homogene stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.

De nulruimte van een matrix kan gevonden worden door technieken die we eerder al hebben gezien. Hier zijn twee (klassieke) voorbeelden van de berekening van de nulruimte.

Voorbeeld 5.9
Laat ons de nulruimte van

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

berekenen, die we noteren als $\mathcal{N}(A)$. Als we Definitie 5.4 vertalen, wensen we enkel het homogeen stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ op te lossen. We rij-reduceren nu de uitgebreide matrix om

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

te bekomen. We kunnen het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ herschrijven als

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0\,. \end{aligned}$$

De variabelen x_3 en x_5 zijn vrij (omdat enkel kolommen 1, 2 en 4 pivotkolommen zijn), dus herschikken we de vergelijkingen voorgesteld door de matrix in rij-gereduceerde echelonvorm tot

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - x_5 \\ x_2 &= 3x_3 - 4x_5 \\ x_4 &= -2x_5\,. \end{aligned}$$

Dus kunnen we de oneindige oplossingsverzameling schrijven gebruikmakend van kolomvectoren.

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \; x_1 = -2x_3 - x_5, x_2 = 3x_3 - 4x_5, x_4 = -2x_5 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2x_3 - x_5 \\ 3x_3 - 4x_5 \\ x_3 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} \middle| \; x_3,\, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

⊠

Voorbeeld 5.10
Laat ons de nulruimte van

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

berekenen, die we noteren als $\mathcal{N}(A)$. Als we Definitie 5.4 vertalen, wensen we enkel het homogeen stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ op te lossen. We rij-reduceren nu de uitgebreide matrix tot

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er zijn geen vrije variabelen, dus het homogeen stelsel heeft enkel de triviale oplossing, de nulvector $\vec{\mathbf{0}}$. Zo kunnen we de (triviale) oplossingsverzameling schrijven als

$$\mathcal{N}(A) = \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

⊠

De vorige voorbeelden geven aanleiding tot een weinig verrassende stelling. We zullen deze stelling formeel aantonen. Bemerk dat we hier $\mathbb{R}^n$ gebruiken in plaats van $\mathbb{R}^m$, omdat we hier de oplossingsverzameling bespreken van een homogeen stelsel met als geassocieerde matrix een $m \times n$ matrix.

Stelling 5.8 Nulruimte van een Matrix is een Deelruimte

Veronderstel dat A een $m \times n$ matrix is. Dan is de nulruimte van A, $\mathcal{N}(A)$, een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

Bewijs We zullen de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 controleren. Herinner je dat $\mathcal{N}(A) = \left\{ \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \,|\, A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}} \right\}$. Ten eerste geldt $\vec{\mathbf{0}} \in \mathcal{N}(A)$, wat afgeleid kan worden als een gevolg van Stelling 2.6. Dus $\mathcal{N}(A) \neq \varnothing$.

Vervolgens controleren we of de nulruimte gesloten is onder de optelling door te veronderstellen dat $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$ en $\vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A)$. Dus we weten al iets over $\vec{\boldsymbol{x}}$ en $\vec{\boldsymbol{y}}$, nl. dat $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ en $A\vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\mathbf{0}}$. De vraag is nu: is $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A)$? We controleren dit als volgt.

$$\begin{aligned} A(\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}) &= A\vec{\boldsymbol{x}} + A\vec{\boldsymbol{y}} && \text{Stelling 3.7} \\ &= \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{0}} && \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)\,,\ \vec{\boldsymbol{y}} \in \mathcal{N}(A) \\ &= \vec{\mathbf{0}} && \text{Stelling 2.2} \end{aligned}$$

Dus inderdaad, $\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}$ zit in de verzameling $\mathcal{N}(A)$.

Als laatste dienen we het gesloten zijn onder de scalaire vermenigvuldiging te controleren. Veronderstel daarvoor dat $\alpha \in \mathbb{R}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$. Dus we weten dat $\vec{\boldsymbol{x}}$ voldoet aan $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$. De vraag is of $\alpha\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A)$?

$$\begin{aligned} A(\alpha\vec{\boldsymbol{x}}) &= \alpha(A\vec{\boldsymbol{x}}) && \text{Stelling 3.7} \\ &= \alpha\vec{\mathbf{0}} && \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{N}(A) \\ &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

Dus $\alpha\vec{\boldsymbol{x}}$ is inderdaad een element van $\mathcal{N}(A)$.

Nu de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 voldaan zijn, kunnen we met zekerheid zeggen dat de nulruimte van een matrix een deelruimte is van $\mathbb{R}^n$. ■

Hieronder geven we een voorbeeld waar we Stelling 5.8 op kunnen toepassen.

Voorbeeld 5.11

Beschouw de deelverzameling $\mathbb{R}^5$ gegeven door

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + x_5 = 0 \end{array} \right\}.$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat W een deelruimte is van $\mathbb{R}^5$ door de drie voorwaarden uit Definitie 5.1 rechtstreeks te controleren, maar dit wordt snel zeer ingewikkeld. We kiezen er daarentegen voor om W vanuit een andere hoek te bekijken en bemerken dat het de verzameling is van oplossingen voor een homogeen stelsel vergelijkingen. Definieer de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & -6 & -5 \\ -2 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

en stel dan vast dat $W = \mathcal{N}(A)$. Door Stelling 5.8 zien we direct dat W een deelruimte is. ⊠

Een basis en de dimensie van de nulruimte kunnen ook gevonden worden via technieken die we al gezien hebben. We illustreren dit met een nieuw voorbeeld, waarbij we terug vanaf nul de redenering opbouwen.

Voorbeeld 5.12
We zijn op zoek naar de nulruimte van de matrix A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ -1 & -4 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Begin met het rij-reduceren van A. Het resultaat is

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Met $D = \{1, 2, 4\}$ en $F = \{3, 5\}$ herkennen we dat x_3 en x_5 vrije variabelen zijn in het stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$ en we elke niet-nulrij kunnen schrijven als een uitdrukking voor (respectievelijk) de afhankelijke variabelen x_1, x_2, x_4 in functie van de vrije variabelen x_3 en x_5. Hiermee kunnen we de vectorvorm van een oplossingsvector herschrijven als

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_3 - 4x_5 \\ x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ -3x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deze twee vectoren vormen eenvoudigweg een basis voor de nulruimte, omdat ze lineair onafhankelijk zijn en ze de nulruimte opspannen. We kunnen dus besluiten dat

$$\mathcal{N}(A) = \operatorname{Span}\left(\{\vec{z}_1, \vec{z}_2\}\right) = \operatorname{Span}\left(\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Deze basis bevat twee vectoren, dus de dimensie van de nulruimte is in dit geval twee. ⊠

We sluiten de discussie over de nulruimte af met een stelling die evident lijkt als we het bovenstaande nogmaals bekijken.

Stelling 5.9 Dimensie van de Nulruimte

De dimensie van de nulruimte van een matrix is gelijk aan het aantal niet-pivotkolommen in de gereduceerde echelonvorm van die matrix.

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus. ■

Sectie 5.4 Coördinatenstelsels en Basisverandering

In deze sectie starten we met een stelling die een nieuwe definitie zal teweegbrengen. Meer bepaald bewijzen we dat elke vector van een deelruimte kan geschreven worden als een unieke lineaire combinatie van de verzameling basisvectoren. De coëfficiënten van deze unieke lineaire combinatie worden de coördinaten van een vector met betrekking tot die basis genoemd.

Stelling 5.10 Unieke Voorstelling

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een basis is voor deelruimte W, dan bestaan er voor elke $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$ unieke getallen $c_1, \ldots, c_n$ zodat er geldt dat:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Bewijs Beschouw een willekeurige maar vaste $\vec{\boldsymbol{x}} \in W$. $\mathcal{B}$ is een basis voor W, dus $\vec{\boldsymbol{x}}$ is een lineaire combinatie van de elementen van $\mathcal{B}$ met bepaalde coëfficiënten $c_1, \ldots, c_n$:

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Veronderstel dat de getallen $c_1, \ldots, c_n$ niet uniek zijn. Dat betekent dat er andere getallen $d_1, \ldots, d_n$ bestaan zodat:

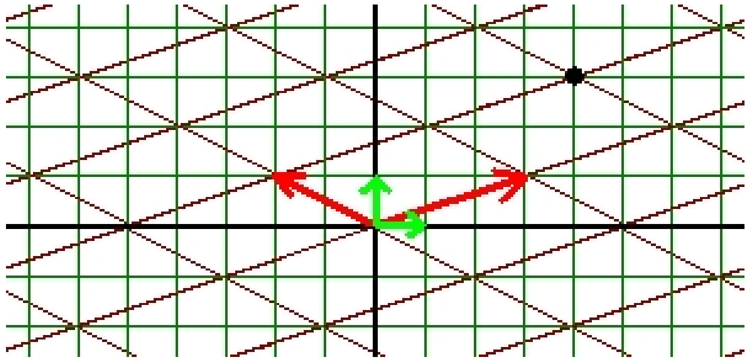
$$\vec{\boldsymbol{x}} = d_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + d_n\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Laat ons de twee voorstellingen op volgende manier combineren:

$$\vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}} = (c_1 - d_1)\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\vec{\boldsymbol{b}}_n.$$

Omdat $\left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is, moet gelden dat $c_i - d_i = 0$ voor alle i. Dit impliceert dat $c_i = d_i$ voor alle i. Dit is een contradictie, want dan zijn de getallen $d_1, \ldots, d_n$ niet verschillend van $c_1, \ldots, c_n$. Bijgevolg zijn $c_1, \ldots, c_n$ uniek en geldt het gestelde. ■

De voorstelling is uniek, dus verdient ze een aparte benaming.



Figuur 5.1: Twee verschillende coördinatenstelsels in $\mathbb{R}^2$. De standaardbasis voor $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven in het groen. Een tweede basis staat in het rood.

Definitie 5.5 Coördinaten m.b.t. een Basis

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ een basis is voor een deelruimte W. De reële getallen $c_1, \ldots, c_n$ waarvoor

$$\vec{\boldsymbol{x}} = c_1\vec{\boldsymbol{b}}_1 + \cdots + c_n\vec{\boldsymbol{b}}_n$$

worden de **coördinaten van $\vec{\boldsymbol{x}}$** m.b.t. de basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_n\right\}$ genoemd.

We gebruiken de volgende notatie: $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Voorbeeld 5.13

Beschouw de twee basissen voorgesteld in Figuur 5.1. Enerzijds hebben we in het groen de standaardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \vec{\boldsymbol{e}}_2\}$ met

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Anderzijds hebben we in het rood een andere basis $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2\right\}$ met

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De coördinaten van het zwarte punt $\vec{\boldsymbol{x}}$ in de figuur t.o.v. de groene, respectievelijk de rode basis, zijn

$$[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

We stellen een interessante link vast tussen de twee coördinaatvectoren. Omdat

$$2\vec{\boldsymbol{b}}_1 + 1\vec{\boldsymbol{b}}_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}}$$

bekomen we in matrixnotatie:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}}.$$

De 2×2 matrix die we hebben opgesteld bevat de basisvectoren $\vec{\boldsymbol{b}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{b}}_2$ als kolommen. ⊠

De matrix die we geconstrueerd hebben in het laatste voorbeeld verschaft ons een belangrijk inzicht. Door de basisvectoren van de basis $\mathcal{B}$ als kolommen in een matrix te plaatsen, kunnen we de ene basis in de andere omzetten. We hebben dit expliciet gedaan voor de beschouwde vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ hierboven, maar we zouden eender welke vector in $\mathbb{R}^2$ kunnen gekozen hebben. Deze vector vermenigvuldigen met de speciale matrix zou de coördinaten m.b.t. de standaardbasis voortbrengen uit de coördinaten m.b.t. de basis $\mathcal{B}$. Omdat deze unieke matrix zo speciaal is, krijgt die een speciale naam: matrix voor basisverandering. We geven onmiddellijk een algemene definitie voor $\mathbb{R}^m$.

Definitie 5.6 Matrix voor Basisverandering

Stel dat $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_m\right\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^m$. De **matrix voor basisverandering** $P_{\mathcal{B}}$ is een $m \times m$ matrix waarvan de kolommen de vectoren $\vec{\boldsymbol{b}}_1$, $\vec{\boldsymbol{b}}_2$, $\vec{\boldsymbol{b}}_3$, ..., $\vec{\boldsymbol{b}}_m$ zijn.

Uit de Inverteerbare Matrix Stelling (Stelling 3.16) volgt direct dat $P_{\mathcal{B}}$ inverteerbaar is, omdat de kolommen basisvectoren zijn en daardoor in het bijzonder lineair onafhankelijk zijn. Bijgevolg is een verandering van basis een omkeerbare bewerking.

Stelling 5.11 Verandering van Basis

Stel dat $\mathcal{E} = \{\vec{\boldsymbol{e}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{e}}_m\}$ de standaardbasis is in $\mathbb{R}^m$, en $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{b}}_m\right\}$ een andere basis is in $\mathbb{R}^m$, dan geldt voor alle $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$ dat

$$P_{\mathcal{B}}\,[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} \qquad \text{en} \qquad P_{\mathcal{B}}^{-1}\,[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Bewijs Een formeel bewijs van de stelling valt buiten het bestek van deze cursus, maar de voorbeelden die we zullen behandelen maken duidelijk dat de stelling daadwerkelijk zal gelden. ■

Voorbeeld 5.14
We gaan verder op Voorbeeld 5.13 en bekomen

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

We kunnen de inverse berekenen:

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}.$$

Wanneer we opnieuw de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ uit Figuur 5.1 nemen, kunnen we de coördinaten m.b.t. $\mathcal{B}$ vinden uit de coördinaten m.b.t. de standaardbasis:

$$\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix} [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{E}} = [\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}\,.$$

Deze inverse transformatie zal zeer nuttig blijken. ⊠

Sectie 5.5 Voorbereiding Werkcollege

1. Bepaal de dimensie van de deelruimte H van $\mathbb{R}^3$, opgespannen door de vectoren

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{v}}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

2. Beschouw de basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   in $\mathbb{R}^2$. Als $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, wat is $\vec{\boldsymbol{x}}$ dan?

3. Kan $\mathbb{R}^3$ een vier-dimensionale deelruimte bevatten? Leg uit.

4. Stel

$$\vec{\boldsymbol{b}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Toon aan dat de vezameling $\mathcal{B} = \left\{\vec{\boldsymbol{b}}_1, \vec{\boldsymbol{b}}_2, \vec{\boldsymbol{b}}_3\right\}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$.

   (b) Vind de coördinatentransformatie van basis $\mathcal{B}$ naar de standaardbasis.

   (c) Schrijf de vergelijking die $\vec{\boldsymbol{x}}$ uit $\mathbb{R}^3$ in verband brengt met $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$.

   (d) Vind $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$ voor de $\vec{\boldsymbol{x}}$ die hierboven gegeven is.

5. Stel dat

$$\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ en } \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

   Bepaal of $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$. Is $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$?

6. Stel $\vec{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, en $H = \left\{ \left| \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \right| s \text{ in } \mathbb{R} \right\}$. Dan is elke vector in H een lineaire combinatie van $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ en $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ wegens

$$\begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Is $\{\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ een basis voor H?

Sectie 5.6 Oefeningen

Definitie en eigenschappen van een deelruimte

1. Beschouw onderstaande verzamelingen W. Is W een deelruimte van $\mathbb{R}^2$?

(a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 + x_2 = 2 \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, 4x_1 - x_2 = 0 \right\}$

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 x_2 \geq 0 \right\}$

(d) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \, x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$

2. Beschouw onderstaande verzamelingen W. Is W een deelruimte van $\mathbb{R}^3$?

(a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, 5x_1 - 1 = x_2 + 2x_3 \right\}$

(c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \middle| \, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \right\}$

(d) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a + 3b \\ -1 \\ 2a - 5b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3a - 5b \\ 3b + 2a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

3. Beschouw onderstaande verzamelingen W. Is W een deelruimte van $\mathbb{R}^4$?

(a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 2a - b \\ 3b - c \\ 3c - a \\ 3b \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 4a + 3b \\ 0 \\ a + 3b + c \\ 3b - 2c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

Nulruimte van een matrix

4. Beschouw de matrix A en de vector $\vec{\boldsymbol{p}}$. Zit $\vec{\boldsymbol{p}}$ in $\mathcal{N}(A)$?

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 6 \\ 6 & -7 & -7 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ -9 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ en $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. Beschouw de onderstaande matrices A. Zoek een niet-nul vector in $\mathcal{N}(A)$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

Basissen

6. Ga na of de onderstaande verzamelingen basissen zijn van $\mathbb{R}^3$.

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(f) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

(g) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

(h) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

7. Zoek een basis voor $\mathcal{N}(A)$ en $\mathrm{Span}(S)$, met S de verzameling van vectoren die de kolommen zijn van A, en bepaal de dimensie van deze deelruimtes.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 \\ -3 & 0 & -26 & -19 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -2 & -7 \\ 2 & -6 & 4 & 8 \\ 3 & -9 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 9 \\ 5 & 15 & 0 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 3 & 9 \\ -2 & 2 & -2 & 7 & 5 \\ -5 & 9 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 11 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 15 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -5 & 19 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Beschouw de vectoren

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} k \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Is de verzameling $\{\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}}, \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}}, \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{3}}\}$ lineair onafhankelijk?

(b) Voor welke waarde(n) van k is $\vec{\boldsymbol{b}} \in \operatorname{Span}(\{\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{1}}, \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{2}}, \vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{3}}\})$?

(c) Bepaal een basis voor $\mathcal{N}(A)$ en geef de dimensie van $\mathcal{N}(A)$.

9. Beschouw de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bepaal een basis voor de nulruimten $\mathcal{N}(A)$ en $\mathcal{N}(A^TA)$ en hun dimensie. Welk verband hebben deze ruimten?

10. Bepaal een basis voor de volgende verzamelingen vectoren.
Hint: Bekijk de vergelijking als een stelsel van homogene vergelijkingen.
   (a) Verzameling vectoren in $\mathbb{R}^3$ in het vlak $x - 3y + 2z = 0$.
   (b) Verzameling vectoren in $\mathbb{R}^2$ op de rechte $y = -3x$.

Coördinatenstelsels

11. Bepaal de vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ die bepaald wordt door de coördinaatvector $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$ en de gegeven basis $\mathcal{B}$.
   (a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$
   (b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$
   (c) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$
   (d) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
   (e) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
   (f) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
   (g) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ en $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$

12. Bepaal de coördinaatvector $[\vec{\boldsymbol{x}}]_{\mathcal{B}}$ van $\vec{\boldsymbol{x}}$ die bepaald wordt door de gegeven basis $\mathcal{B}$.
   (a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$
   (c) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$
   (d) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
   (e) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
   (f) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$
   (g) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

(h) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$

(i) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

(j) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ en $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$