Hoofdstuk 3: Matrixberekeningen

Sectie 3.1: Matrixbewerkingen

Som en product met scalair

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \alpha = 2$$

Bereken

- $A + B$
- αA

Stelling : Eigenschappen van matrices

Commutativiteit, associativiteit, neutraal element,...

$\rightarrow$ Zelfstudie

Definitie 3.4: Getransponeerde

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sectie 3.2: Matrixvermenigvuldiging

Prijzen (Supermarkt)

- pasta: 1.5 €/ pak
- ui: 2.5 €/ kg
- tomaat: 3.5 €/ blik
- knoflook: 14 €/ kg
- vlees: 25 €/ kg

Boodschappenlijst (Familie A)

- 1 pak pasta
- 0.5 kg ui
- 2 blikken tomaat
- 0.05 kg knoflook
- 0.6 kg vlees

Rekening

$$1.5 \cdot 1 + 2.5 \cdot 0.5 + 3.5 \cdot 2 + 14 \cdot 0.05 + 25 \cdot 0.6 = 25.45$$

Als een scalair product

$$\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}, \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 14 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0.05 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Prijzen in meerdere winkels

	pasta	ui	tomaat	knoflook	vlees
Supermarkt	1.5	2.5	3.5	14.0	25.0
Bij Jef	2.7	1.0	2.5	15.0	32.0
Da Antonio	2.5	3.0	4.5	5.0	12.0
Webshop	2.0	4.0	4.0	16.0	30.0

Rekeningen voor familie A

$$P\vec{b} = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 & 3.5 & 14.0 & 25.0 \\ 2.7 & 1.0 & 2.5 & 15.0 & 32.0 \\ 2.5 & 3.0 & 4.5 & 5.0 & 12.0 \\ 2.0 & 4.0 & 4.0 & 16.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0.05 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.45 \\ 28.15 \\ 20.45 \\ 30.8 \end{bmatrix}$$

Boodschappenlijstjes van meerdere families

	Fam. A	Fam. B	Fam. C
pasta	1	2	2.5
ui	0.5	1.0	2.0
tomaat	2	3	5
knoflook	0.05	0.1	0.2
vlees	0.6	1.2	0

Alle rekeningen

$$PB = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 & 3.5 & 14.0 & 25.0 \\ 2.7 & 1.0 & 2.5 & 15.0 & 32.0 \\ 2.5 & 3.0 & 4.5 & 5.0 & 12.0 \\ 2.0 & 4.0 & 4.0 & 16.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0.5 & 1.0 & 2.0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0.05 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25.45 & 47.4 & 29.05 \\ 28.15 & 53.8 & 24.25 \\ 20.45 & 36.4 & 35.75 \\ 30.8 & 57.6 & 36.2 \end{bmatrix}$$

Alle rekeningen

$$PB = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.5 & 3.5 & 14.0 & 25.0 \\ 2.7 & 1.0 & 2.5 & 15.0 & 32.0 \\ 2.5 & 3.0 & 4.5 & 5.0 & 12.0 \\ 2.0 & 4.0 & 4.0 & 16.0 & 30.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2.5 \\ 0.5 & 1.0 & 2.0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0.05 & 0.1 & 0.2 \\ 0.6 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25.45 & 47.4 & 29.05 \\ 28.15 & 53.8 & 24.25 \\ 20.45 & 36.4 & 35.75 \\ 30.8 & 57.6 & 36.2 \end{bmatrix}$$

Zie **Stelling 3.6**

Vraag

Beschouw onderstaande matrix en vector.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zijn de onderstaande bewerkingen zijn gedefinieerd?

a. $(A\vec{\boldsymbol{x}})^T$
b. $\vec{\boldsymbol{x}}^T A^T$
c. $\vec{\boldsymbol{x}}\vec{\boldsymbol{x}}^T$
d. $A^T \vec{\boldsymbol{x}}^T$

Definitie 3.5: Kolommenperspectief

Stel

- A is een $m \times n$ matrix
- B is een $n \times p$ matrix met kolommen $\vec{\boldsymbol{b}}_1$ tot $\vec{\boldsymbol{b}}_p$

Dan:

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{\boldsymbol{b}}_1 & A\vec{\boldsymbol{b}}_2 & \dots & A\vec{\boldsymbol{b}}_p \end{bmatrix}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Schrijf AB uit.

Stelling 3.7 Eigenschappen van Matrixvermenigvuldiging

Associativiteiten, distributiviteiten,...

$\rightarrow$ **Zelfstudie**

- Nulmatrix $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \end{bmatrix}$
- Eenheidsmatrix $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & & 1 \end{bmatrix}$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Vraag

Is de matrixvermenigvuldiging commutatief ($AB = BA$)?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Links: AB

Rechts: BA

Sectie 3.3: De inverse van een matrix

Definitie 3.7

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$$

Voorbeeld

Bepaal de inverse van $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ als die bestaat.

Andere formulering:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los volgende twee stelsels op:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stelling 3.8: Snellere methode

$$\left[\ A \mid I_n\ \right] \rightarrow \left[\ I_n \mid A^{-1}\ \right]$$

Oefening

Bepaal de inverse van $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Stelling 3.16

De volgende beweringen zijn allemaal equivalent voor de $n \times n$ matrix A:

1. A is inverteerbaar.
2. $A \rightarrow I_n$
3. Het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ heeft een unieke oplossing voor elke $\vec{\boldsymbol{b}}$.
4. De kolommen van A spannen $\mathbb{R}^n$ op.
5. Het homogeen stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ heeft enkel de triviale oplossing $(\vec{\mathbf{0}})$.
6. De kolommen van A zijn lineair onafhankelijk.

Stelling 3.17

Stel dat A inverteerbaar is. Dan

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\vec{\boldsymbol{b}}$$

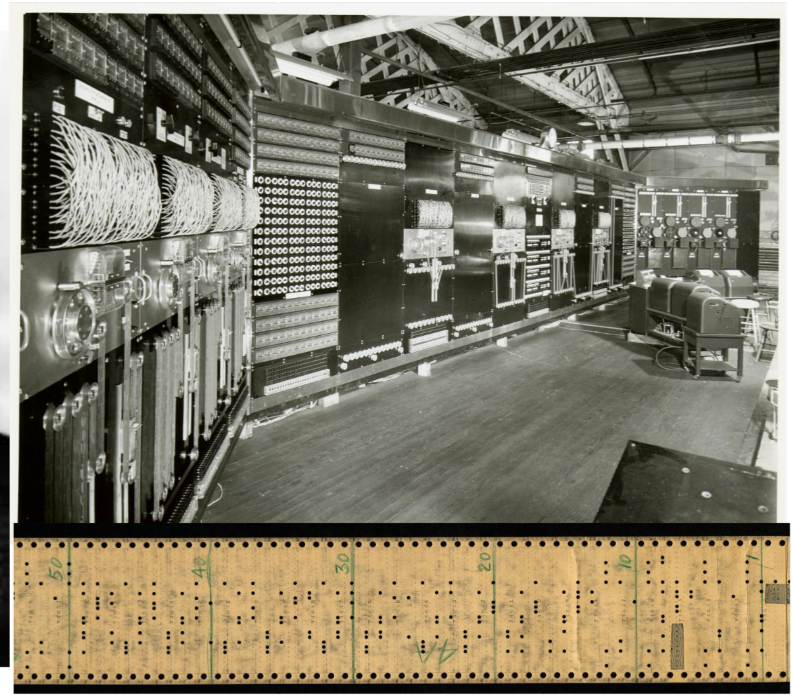
Stelling 3.8 (Matrices inverteren)

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Doordenkertje

Stel dat A niet inverteerbaar is, en we proberen Stelling 3.8 toe te passen.
Wat zal er gebeuren?

Sectie 3.4: Input-output analyse

→ **Zelfstudie**

Sectie 3.5: Elementaire matrices

Definitie

Een elementaire matrix is een matrix bekomen door één rij-operatie toe te passen op de eenheidsmatrix.

Quiz

- Welke rij-operaties kennen we?
- Met welke elementaire matrices komen deze overeen?

Toepassen: rij-operatie als matrixproduct, reductie, inverteerbaarheid