Hoofdstuk 4: Lineaire transformaties

Sectie 4.1: Lineaire transformaties

Functies

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$$

Transformaties

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

Lineaire transformaties

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 + \dots \\ cx_1 + dx_2 + \dots \\ \dots \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Begrippen

Domein, codomein, beeld, bereik

Voorbeeld

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \\ ex_1 + fx_2 \end{bmatrix}$$

Met de transformatiematrix A:

$$T(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\vec{\boldsymbol{x}}$$

Als lineaire combinatie van de kolommen van A:

$$T(\vec{\boldsymbol{x}}) = x_1 \begin{bmatrix} a \\ c \\ e \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} b \\ d \\ f \end{bmatrix}$$

Vraagjes

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 2x_1 - 7x_2 \end{bmatrix}\right)$$

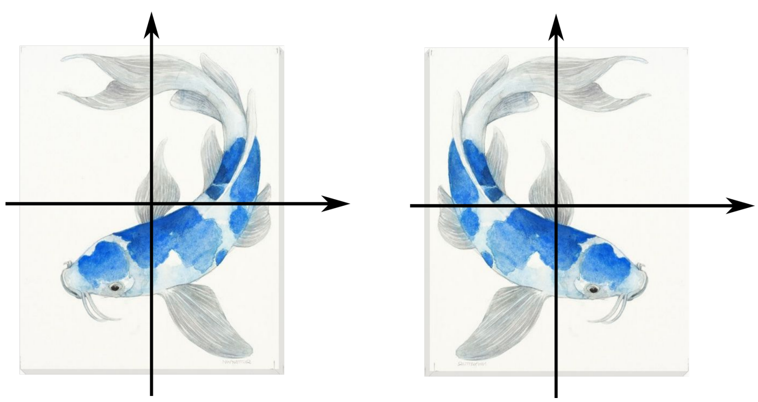
- Wat zijn het domein en codomein van T?
- Wat is het beeld van $\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$?
- Wat is de transformatiematrix van T?

Definitie 4.1: Lineaire transformatie

Voorwaarden:

$$\begin{aligned} T(\vec{\boldsymbol{u}}_1 + \vec{\boldsymbol{u}}_2) &= T(\vec{\boldsymbol{u}}_1) + T(\vec{\boldsymbol{u}}_2) \\ T(\alpha \vec{\boldsymbol{u}}_1) &= \alpha T(\vec{\boldsymbol{u}}_1) \end{aligned}$$

Spiegelen om de y-as



$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{\boldsymbol{x}}$$

Oefening

Hoe ziet de transformatiematrix voor spiegelen om de x-as eruit?

Naar een lagerdimensionele ruimte: loodrechte projectie op de x-as
(Schets)

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1, \quad T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$$

Naar een hogerdimensionele ruimte

$$T : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$$

Verschuiving van het ganse vlak over $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\left(\vec{x}\right) = \vec{x} + \vec{v} = \begin{bmatrix} x + 1 \\ y + 2 \end{bmatrix}$$

Dit is geen lineaire transformatie! (Zie ook vb. 4.2)

Doordenkertje

Gegeven

$$T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3, \quad T\left(\vec{x}\right) = A\vec{x}$$

Hoeveel rijen en kolommen heeft A?
ROOD: 5 rijen, 5 kolommen
GROEN: 3 rijen, 3 kolommen
BLAUW: 5 rijen, 3 kolommen
GEEL: 3 rijen, 5 kolommen

Voorbeeld: arbitraire transformaties

Zoek de transformatiematrix van de lineaire transformatie

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}$$

waarvoor het volgende geldt:

$$T(\vec{\boldsymbol{e}}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T(\vec{\boldsymbol{e}}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Stelling 4.1

Als T een lineaire transformatie is, dan geldt:

$$T(\vec{\mathbf{0}}) = \vec{\mathbf{0}} \qquad \text{en} \qquad T\left(c\vec{\boldsymbol{u}}_1 + d\vec{\boldsymbol{u}}_2\right) = cT\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1\right) + dT\left(\vec{\boldsymbol{u}}_2\right).$$

Toepassing

Gegeven: $T(\vec{\boldsymbol{u}}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad T(\vec{\boldsymbol{u}}_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Bereken: $T(2\vec{\boldsymbol{u}}_1 - \vec{\boldsymbol{u}}_2)$

Combineren van lineaire transformaties
Stel

$$T_1(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}, \qquad T_2(\vec{\boldsymbol{x}}) = B\vec{\boldsymbol{x}}$$

Dan

$$\begin{aligned} T_2(T_1(\vec{\boldsymbol{x}})) &= T_2(A\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &= B(A\vec{\boldsymbol{x}}) \\ &= (BA)(\vec{\boldsymbol{x}}) \end{aligned}$$

2.2 Surjectieve lineaire transformaties

Definitie 4.2: Surjectieve lineaire transformatie

Een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is **surjectief** als er voor elke $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^m$ een $\vec{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{R}^n$ bestaat zodat $T(\vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{v}}$.

(Schets)

Vraag

Zijn onderstaande transformaties surjectief?

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T_1(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_2(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Alternatieve formuleringen:

- Heeft het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ een oplossing voor alle $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$?
- Kan je elke $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^m$ schrijven als een lineaire combinatie van de kolommen van A?
- Is $\mathrm{Span}\left(\{\vec{\boldsymbol{a}}_1, \vec{\boldsymbol{a}}_2, \cdots\}\right) = \mathbb{R}^m$?

Vb. 4.7 Is $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ een surjectieve lineaire transformatie?

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 \\ -16x_1 + 9x_2 + 12x_3 - 28x_4 + 28x_5 \\ -19x_1 + 7x_2 + 14x_3 - 32x_4 + 37x_5 \\ -21x_1 + 9x_2 + 15x_3 - 35x_4 + 39x_5 \\ -9x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 16x_4 + 16x_5 \end{bmatrix}$$

Oplossing:

Is elke $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^5$ een element van het codomein van T?

$$\vec{\boldsymbol{v}} = T\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -6 & 3 \\ -16 & 9 & 12 & -28 & 28 \\ -19 & 7 & 14 & -32 & 37 \\ -21 & 9 & 15 & -35 & 39 \\ -9 & 5 & 7 & -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{v}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 3 & 3 & -6 & 3 & v_1 \\ -16 & 9 & 12 & -28 & 28 & v_2 \\ -19 & 7 & 14 & -32 & 37 & v_3 \\ -21 & 9 & 15 & -35 & 39 & v_4 \\ -9 & 5 & 7 & -16 & 16 & v_5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & * \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & * \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{3} & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

Conclusie:

- Er is een nulrij in de gereduceerde coëfficiëntenmatrix.
- Stelsel is niet oplosbaar voor elke $\vec{\boldsymbol{v}}$ (Stelling 2.4).
- T is niet surjectief.

Stelling 4.4

De lineaire transformatie $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}$ is surjectief als en slechts als A een pivot in elke rij heeft.

2.3 Injectieve lineaire transformaties

Definitie: Injectieve lineaire transformatie

Een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is **injectief** als in het geval $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = T(\vec{\boldsymbol{y}})$ eveneens geldt dat $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}$.

(schets)

Vraag

Zijn onderstaande transformaties injectief?

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T_1(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T_2(\vec{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Alternatieve formuleringen:

- Heeft het stelsel $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ maximum 1 oplossing voor alle $\vec{\boldsymbol{b}} \in \mathbb{R}^n$?
- Zijn er lineaire combinaties van de kolommen van A met verschillende gewichten, die toch dezelfde vector tot resultaat hebben? (dan niet injectief)

Vb. Is de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injectief?

$$T(\vec{\boldsymbol{x}}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

Zijn oplossingen uniek?

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ja, injectief.

Stelling 4.5

Een lineaire transformatie $T(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}$ is injectief als en slechts als A een pivot in elke kolom heeft.

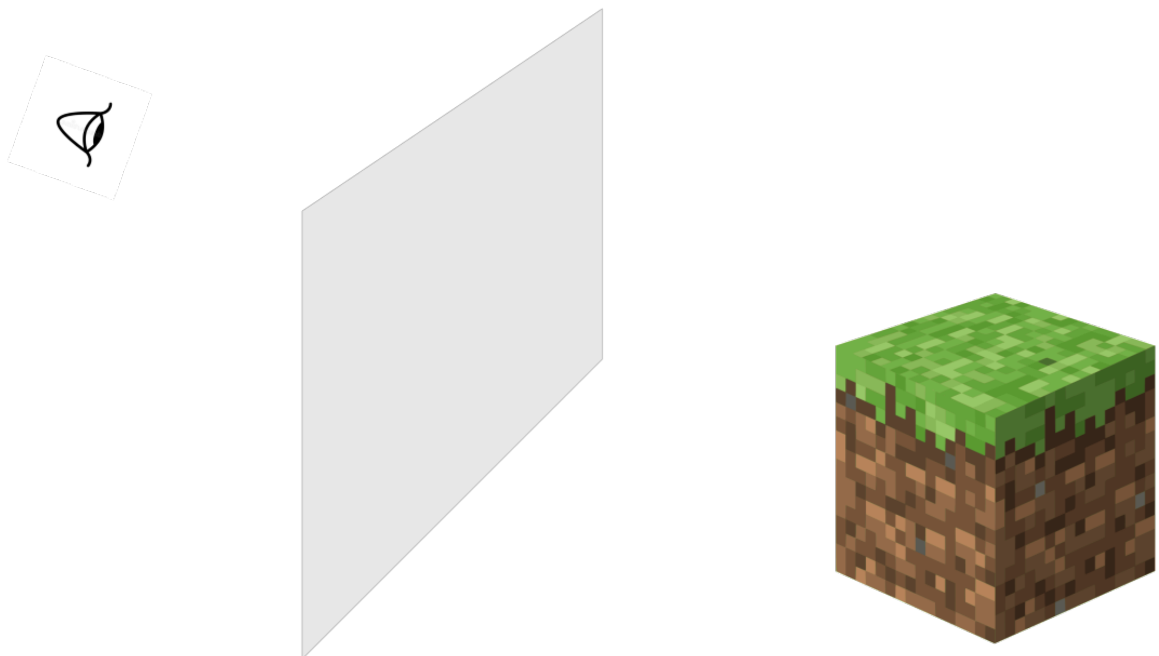
Doordenkertje

Gegeven: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ met $n < m$.
Is deze transformatie surjectief?
Is deze transformatie injectief?

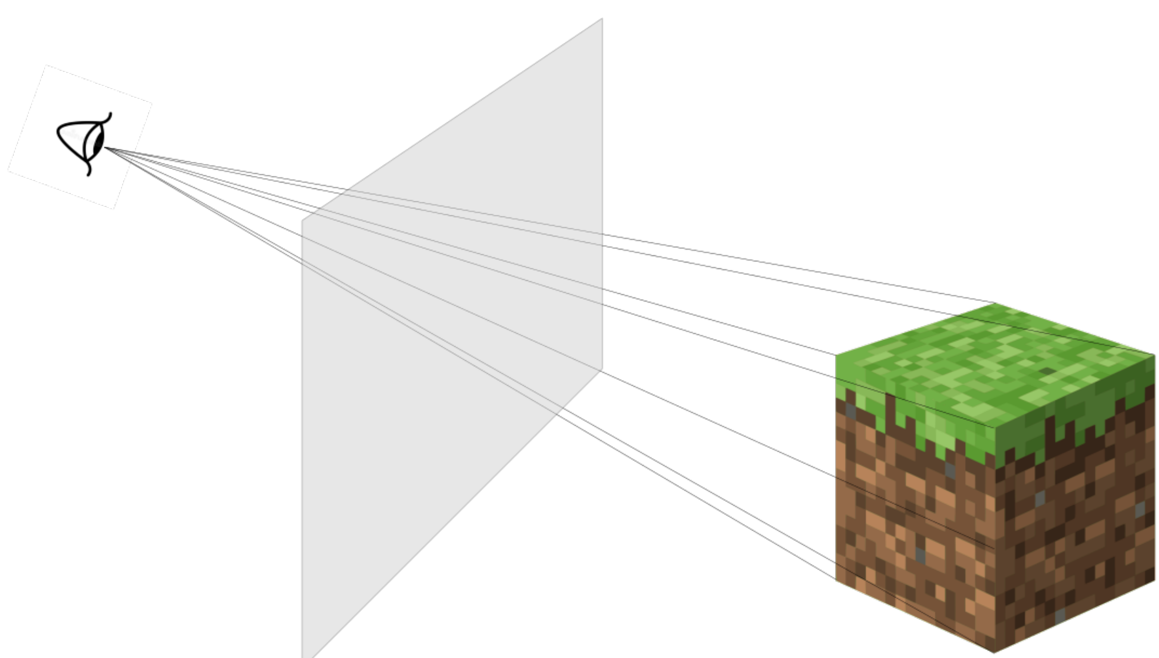
Voor thuis:
Wat als $n > m$?

Toepassing

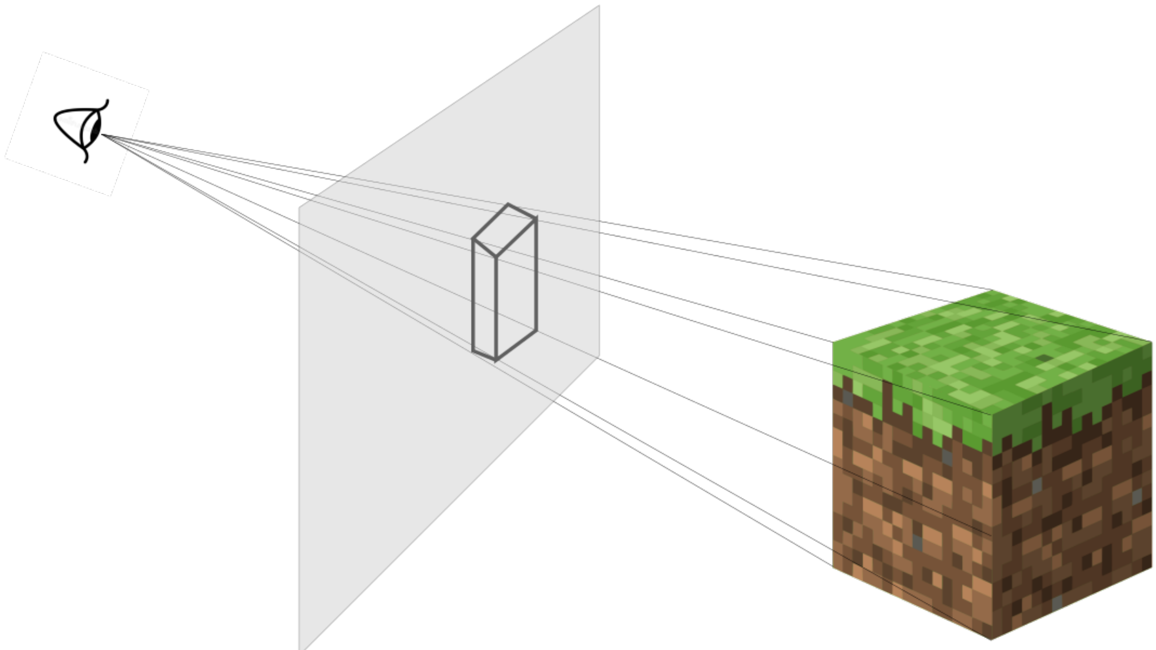
Toepassing



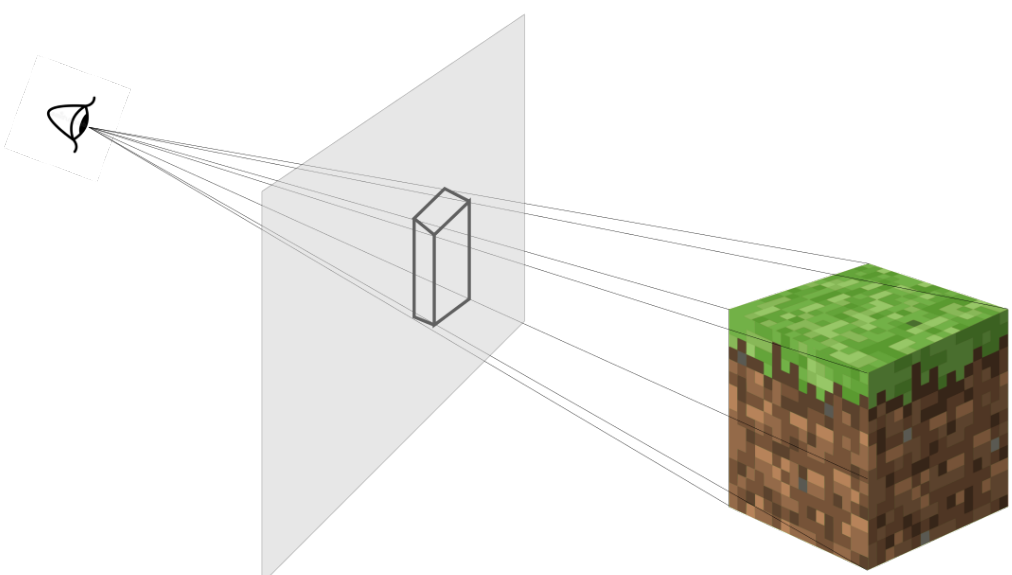
Toepassing



Toepassing



Toepassing



Surjectief/injectief?

Doordenkertje

Gegeven
$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(\vec{\boldsymbol{x}}) = A\vec{\boldsymbol{x}}$$
met A een inverteerbare matrix.

Wat doet
$$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad S(\vec{\boldsymbol{x}}) = A^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}$$
?

Voor thuis

Welke drie elementaire matrices kennen we? (Herbekijk § 3.5 als je dit niet meteen weet.)

- Met welke transformaties komen deze matrices overeen? Wat doen ze met de componenten tijdens de transformatie?
- Kan je op basis hiervan de omgekeerde transformaties beschrijven, en de inverses van de elementaire matrices vinden (zonder de procedure van § 3.3 toe te passen)?
- Interpreteer de transformaties en hun omgekeerden grafisch.