

Hoofdstuk 5: Deelruimten van \mathbb{R}^m

1 / 33

Sectie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Voorkennis

- Lineaire combinaties van vectoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots$
- Span van een verzameling
 - Span ($\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$)
 - Span ($\{\}$)
- Lineaire afhankelijkheid
 - van n vectoren
 - van 2 vectoren
- Deelverzamelingen van \mathbb{R}
- \mathbb{R}^m
- Deelverzamelingen van \mathbb{R}^m

2 / 33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Voorbeeld

Stel dat we \mathbb{Z}^m definiëren als de verzameling van alle vectoren met m componenten uit \mathbb{Z} .

Is \mathbb{Z}^m een deelruimte van \mathbb{R}^m ?

3 / 33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Vraag

Gegeven $a, b \in \mathbb{R}$.

- Is $U = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b \\ a + 1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ een deelruimte van \mathbb{R}^3 ?
- Is $V = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b \\ 2a - 3b \end{bmatrix} \right\}$ een deelruimte van \mathbb{R}^2 ?

4 / 33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Voorbeeld

Is $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ een deelruimte van \mathbb{R}^3 ?

5/33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Oefening

Is $V = \{ [0] \}$ een deelruimte van \mathbb{R}^3 ?

6/33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Voorbeeld

Stel $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vectoren uit \mathbb{R}^m ,

Is $\text{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$ een deelruimte van \mathbb{R}^m ?

(Zie Stelling 5.1)

7/33

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha\vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Oefening

Is \mathbb{R}^7 een deelruimte van \mathbb{R}^7 ?

8/33

Sectie 5.2: Basissen

Definitie 5.2: Basis

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ vormt een basis voor een deelruimte H van \mathbb{R}^m als

- $H = \text{Span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$
- \mathcal{B} een lineair onafhankelijke verzameling is

Voorbeeld

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3\}$ vormt de standaardbasis voor \mathbb{R}^3

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9/33

Definitie 5.2: Basis

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ vormt een basis voor een deelruimte H van \mathbb{R}^m als

- $H = \text{Span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$
- \mathcal{B} een lineair onafhankelijke verzameling is

Oefening

Geef een basis voor \mathbb{R}^m .

10/33

Definitie 5.2: Basis

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ vormt een basis voor een deelruimte H van \mathbb{R}^m als

- $H = \text{Span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$
- \mathcal{B} een lineair onafhankelijke verzameling is

Voorbeeld

Is $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ een basis voor \mathbb{R}^3 ?

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11 / 33

Geometrische interpretatie van deelruimte en basis

Definitie 5.1: Deelruimten van \mathbb{R}^m

Een deelruimte H van \mathbb{R}^m is een verzameling met drie eigenschappen:

- $\vec{0} \in H$
- $\vec{x}, \vec{y} \in H \Rightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \in H$
- $\vec{x} \in H \Rightarrow \alpha \vec{x} \in H$ voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$

Definitie 5.2: Basis

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ vormt een basis voor een deelruimte H van \mathbb{R}^m als

- $H = \text{Span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$
- \mathcal{B} een lineair onafhankelijke verzameling is

12 / 33

Oefening

Leg uit waarom elk van de onderstaande verzamelingen geen basis vormt voor \mathbb{R}^3 .

$$(a) \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(b) \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

13/33

Stelling 5.3: Van Span tot Basis

Stel $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ en $H = \text{Span}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\})$.

- Als $\vec{v}_k \in S$ een lineaire combinatie van de andere vectoren in S is, dan spant de verzameling $S \setminus \{\vec{v}_k\}$ nog steeds H op.
- Als $H \neq \{\vec{0}\}$, dan bestaat er een deelverzameling in S die een basis vormt voor H .

Voorbeeld

Construeer een basis voor $H = \text{Span}(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\})$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

14/33

Oefening

Vind een basis voor $\text{Span}(S)$ met

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

15 / 33

Voorbeeld

Vind een basis voor onderstaande deelruimtes:

- $V = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a \\ 2a - 3b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- $W = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b - 4c \\ -a \\ 2a - 3b + 6c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

16 / 33

Oefening

Is

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

een basis voor de deelruimte

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

?

ROOD: Nee

GROEN: Ja

17 / 33

Definitie 5.3: Dimensie

De dimensie van een deelruimte H is het aantal vectoren in een basis voor H .

Oefening

Welke deelruimte van \mathbb{R}^3 heeft de hoogste dimensie?

$$U = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} \text{ (1 beperking)}$$

$$V = \left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0 \right\} \text{ (2 beperkingen)}$$

18 / 33

Stelling 5.5

De kolommen van een $m \times m$ matrix vormen een basis voor \mathbb{R}^m als en slechts als die matrix inverteerbaar is.

Stelling 5.6

Als een basis voor H uit n vectoren bestaat, dan bevat elke andere basis voor H ook n vectoren.

Stelling 5.7

De dimensie van \mathbb{R}^m is m .

19 / 33

Oefening

$$W = \left\{ \left[\begin{array}{c} a + b + 2c \\ 2a + 2b + 4c + d \\ b + c + d \\ 3a + 3c + d \end{array} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Toon aan dat W een deelruimte van \mathbb{R}^4 is.
- Bepaal de dimensie van W .

Tips

- Check de drie voorwaarden in Def 5.1.
(**ROOD: Voldoet niet.** **GROEN: Voldoet.**)
- Zoek een basis voor W en tel het aantal vectoren daarin.

ROOD: 0

GROEN: 1

BLAUW: 2

GEEL: 3

20 / 33

Nulvector

De deelruimte

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

heeft als basis

$$\{ \}$$

en dimensie 0.

21 / 33

Sectie 5.3: De nulruimte van een matrix

Definitie 5.4: Nulruimte

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Stelling 5.9

$\mathcal{N}(A)$ van een $m \times n$ matrix A is een deelruimte van \mathbb{R}^n .

Bewijs

22 / 33

Definitie 5.4: Nulruimte

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Voorbeeld

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bepaal $\mathcal{N}(A)$.

23 / 33

Definitie 5.4: Nulruimte

De nulruimte $\mathcal{N}(A)$ van een $m \times n$ matrix A is de verzameling van oplossingen van het homogene stelsel $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0} \right\}$$

Oefening

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 & 3 & 9 \\ 6 & 12 & 13 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Hoeveel componenten hebben vectoren in $\mathcal{N}(A)$?
ROOD: 0 GROEN: 1 BLAUW: 2 GEEL: 5
- Bepaal $\mathcal{N}(A)$.
- Wat is de dimensie van $\mathcal{N}(A)$?

24 / 33

Doordenkertje

Stel dat A een matrix is met minder rijen dan kolommen. Hoeveel vectoren zitten er dan in de nulruimte van A ?

ROOD: 0

GROEN: 1

BLAUW: ∞

25 / 33

Sectie 5.4: Coördinatensystemen

Cartesische en andere assentelsels



René Descartes, 1596 -1650



26 / 33

Stelling 5.10: Unieke representatiestelling

Als $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ een basis is voor een deelruimte H van \mathbb{R}^m , dan bestaan er voor elke $\vec{x} \in H$ unieke getallen c_1, \dots, c_n zodat:

$$\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n.$$

Definitie 5.5

We noemen c_1, \dots, c_n de coördinaten van \vec{x} t.o.v. de basis \mathcal{B} .

$$\text{Notatie: } [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

27 / 33

Voorbeeld

Gegeven:

- Deelruimte is \mathbb{R}^2 .
- $[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ t.o.v. de standaardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Gevraagd: de coördinaten t.o.v. de alternatieve basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Oplossing: $[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Verband tussen $[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$ en $[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = [\vec{x}]_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ y_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Zie Def. 5.6: Matrix voor Basisverandering

Stelling 5.11: Verandering van Basis

28 / 33

Doordenkertje

Wat is het verband met lineaire combinaties en lineaire transformaties?