FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN
EN ARCHITECTUUR

VAKGROEP ELEKTROMECHANICA, SYSTEEM- EN METAALENGINEERING (EA08)

ONDERZOEKSGROEP DYNAMIC SYSTEMS AND CONTROL (DYSC)

Mechanica - Dynamica

Michael Monte – bureau: A.0.5.1 – Michael.Monte@UGent.be

UNIVERSITEIT
GENT

Studiefiche

Deel II: Dynamica (zowel voor de versie van 6 studiepunten, aanbodsessie A, als voor de versie van 3 studiepunten, aanbodsessie B):

- Kinematica van een puntmassa
- Kinematica van een star lichaam
- Kinetica van een puntmassa (wetten van Newton, energiemethode en impulsmethode)
- Kinetica van een star lichaam (wetten van Newton en energiemethode)

3 Toepassen van basisprincipes uit de kinematica om relaties te bepalen tussen tijd, plaats, snelheid en versnelling en inzicht te krijgen in de beweging van voorwerpen.

4 Toepassen van basisprincipes uit de kinetica om inzicht te krijgen in het effect van krachten en/of krachtenkoppels op de beweging van voorwerpen.

Kinematica van een puntmassa

UNIVERSITEIT GENT

Hoofdstukdoelen

- De concepten plaats, verplaatsing, snelheid en versnelling introduceren
- Beweging van een puntmassa langs een rechte lijn bestuderen
- Beweging van een puntmassa langs een kromlijnige baan bestuderen
- Principes bestuderen van de relatieve beweging van twee puntmassa’s met behulp van translerende assen

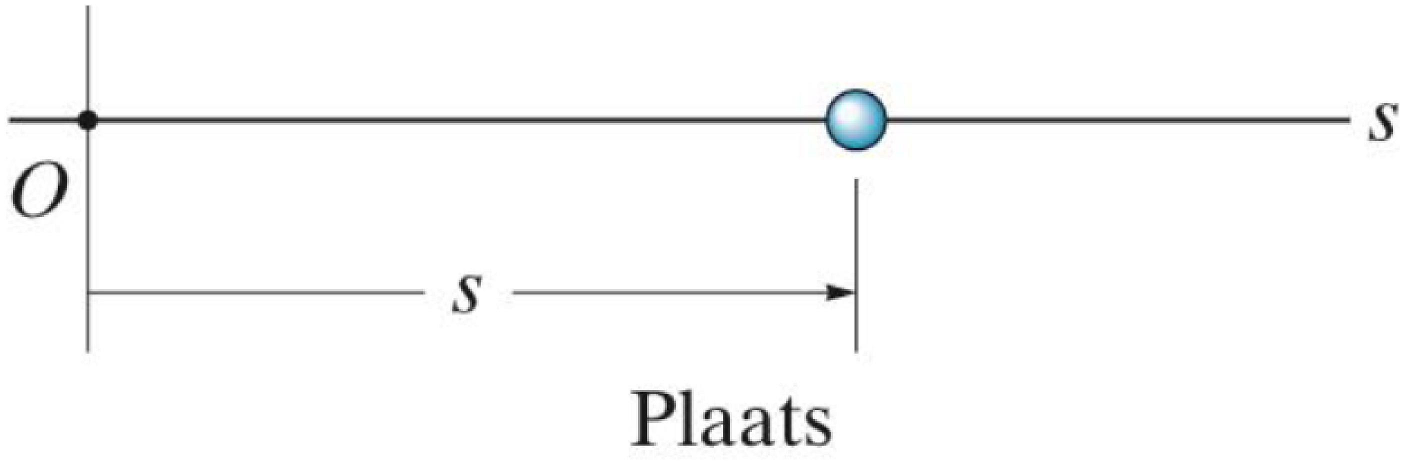
Inleiding

- *Mechanica* – gaat over de rusttoestand of beweging van lichamen waarop krachten werken
- *Statica* – gaat over het evenwicht van een lichaam dat ofwel in rust is ofwel beweegt met een constante snelheid
- *Dynamica* – gaat over de versnelde beweging van een lichaam:
  - *Kinematica* – geometrische aspecten van een beweging
  - *Kinetica* – analyse van de krachten die de beweging veroorzaken

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Bij de *kinematica van de rechtlijnige beweging* moeten *plaats*, *snelheid* en *versnelling* van de puntmassa op een willekeurig moment worden gespecificeerd.

Plaats



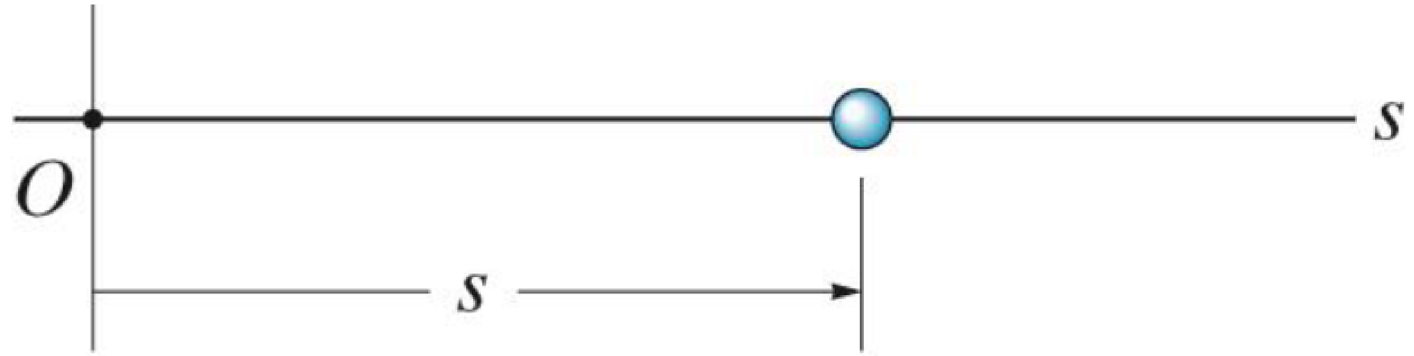
Om de plaats te bepalen zijn nodig:

- Een coördinaatas *s*
- Een oorsprong *O*
- Een plaatsvector **r** – de specifieke plaats van de puntmassa op een willekeurig moment
- Een algebraïsche scalaire grootheid *s* (in meter)

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Plaats (vervolg)

- grootte van *s* = afstand van *O* tot de puntmassa
- de richting wordt bepaald door het algebraïsche teken van *s*:
  - Is *s* positief, dan bevindt de puntmassa zich rechts van de oorsprong
  - Is *s* negatief, dan bevindt de puntmassa zich links van de oorsprong



Plaats

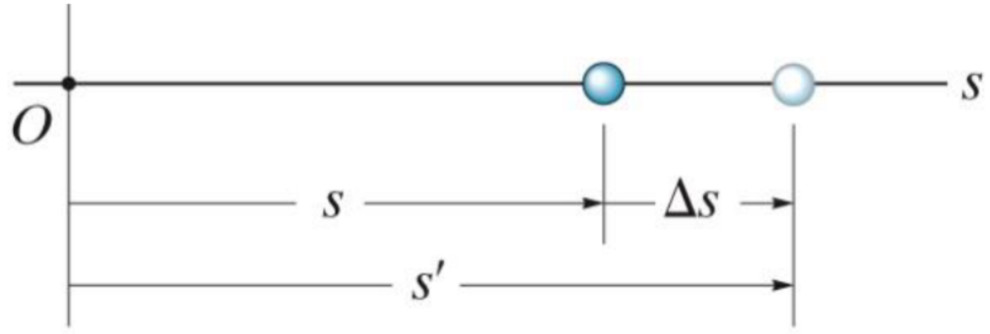
Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Verplaatsing

- Verplaatsing is de verandering van de plaats, een vectoriële grootheid
- Als de puntmassa van *P* naar *P’* beweegt, geldt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r'} - \vec{r}$$

$$\Delta s = s' - s$$



Verplaatsing

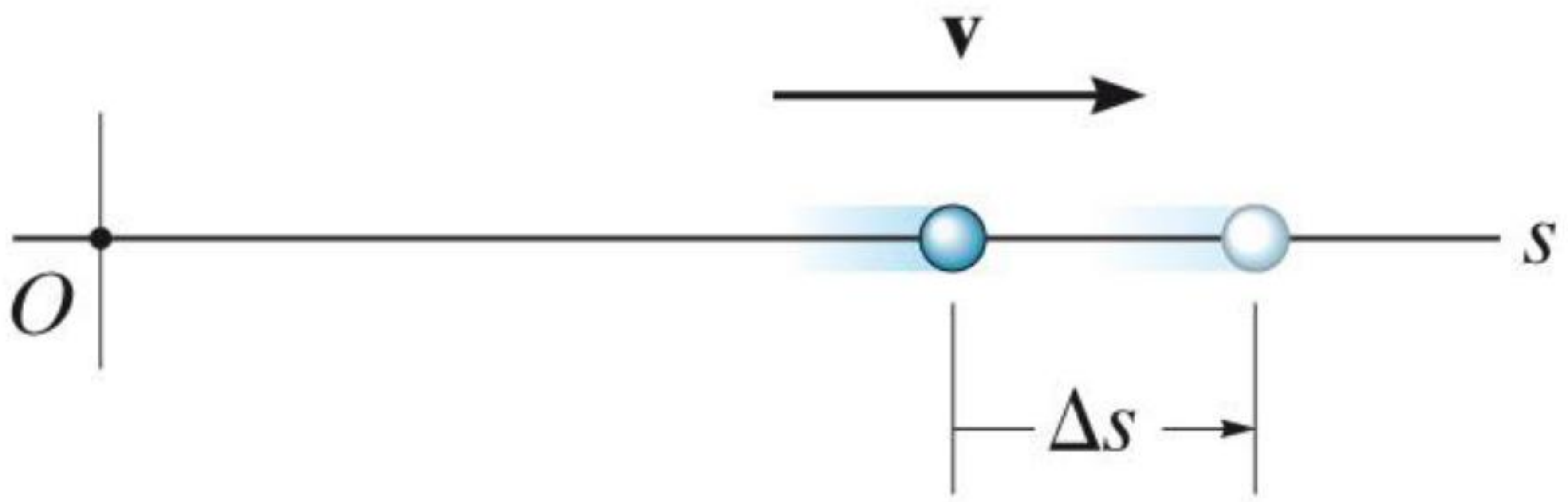
- Als Δs positief is, dan bevindt de puntmassa zich rechts van de uitgangspositie en als Δs negatief is, dan bevindt de puntmassa zich links van de uitgangspositie

UNIVERSITEIT GENT

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Snelheid

- Gemiddelde snelheid: $$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
- Ogenblikkelijke snelheid: $$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\Delta s / \Delta t \right) \Rightarrow v = \frac{ds}{dt}$$



Snelheid

UNIVERSITEIT GENT

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Snelheid (vervolg)

- Als we *v* voorstellen als een algebraïsche scalaire grootheid, dan betekent een positieve waarde dat de puntmassa naar rechts beweegt en een negatieve waarde dat de puntmassa naar links beweegt

- De grootte van een snelheid is de *snelheidsgrootte* (m/s)

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Snelheid (vervolg)

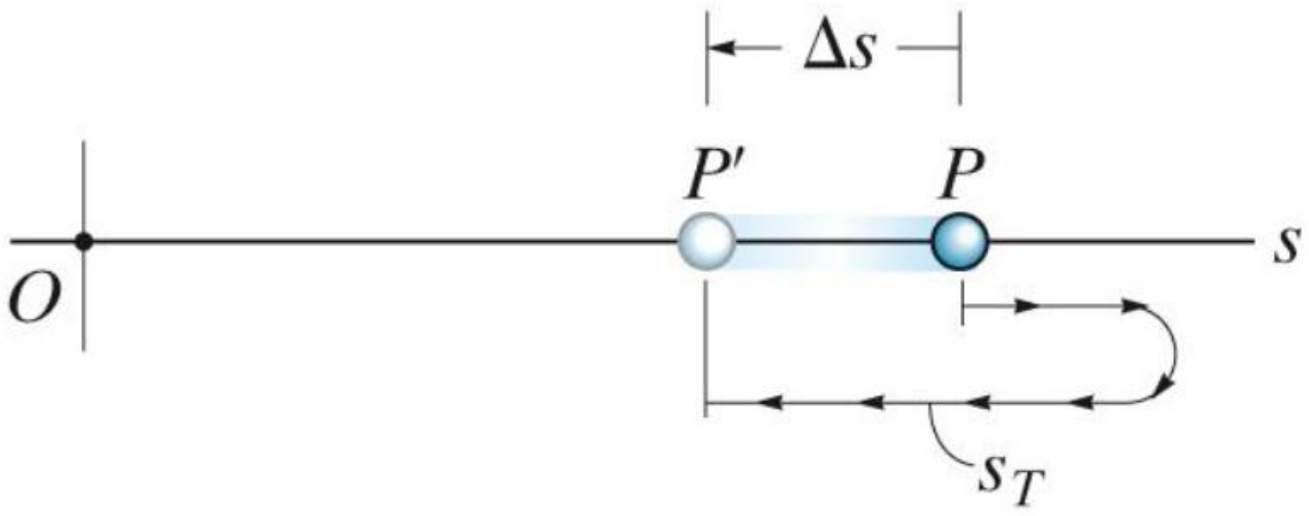
- De *gemiddelde snelheidsgrootte* is de totaal door een puntmassa afgelegde afstand, s_T, gedeeld door de daarvoor benodigde tijd Δt:

$$\left(v_{\mathrm{sg}}\right)_{\mathrm{gem}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

- De puntmassa in de figuur legt de baan met lengte s_T af in een tijd Δt. Dus:

$$\left(v_{\mathrm{sg}}\right)_{\mathrm{gem}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

$$v_{\mathrm{gem}} = -\frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Gemiddelde snelheid en
gemiddelde snelheidsgrootte

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

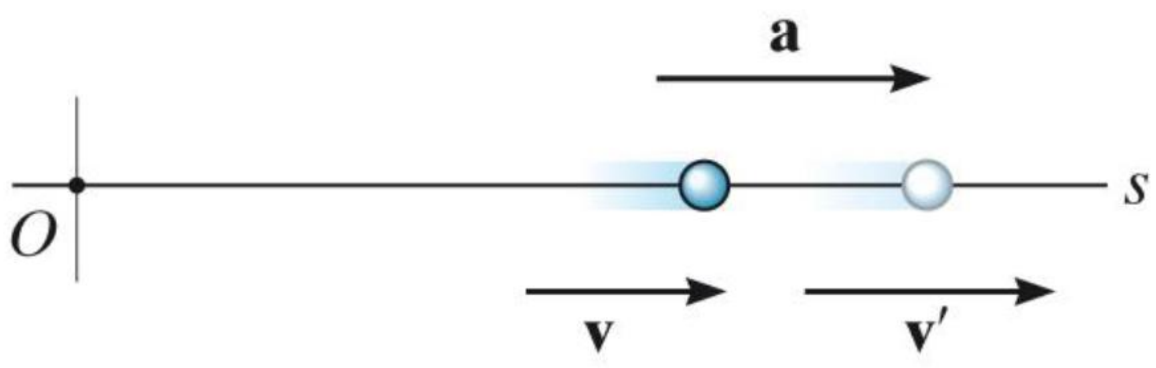
Versnelling

– De gemiddelde versnelling is: $a_{\text{gem}} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

– Δv stelt de verandering van de snelheid voor gedurende het tijdsinterval Δt, dat wil zeggen: $\Delta v = v' - v$

– De ogenblikkelijke versnelling is: $a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\Delta v / \Delta t \right)$

– Dus $a = \dfrac{dv}{dt}$ en $a = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$

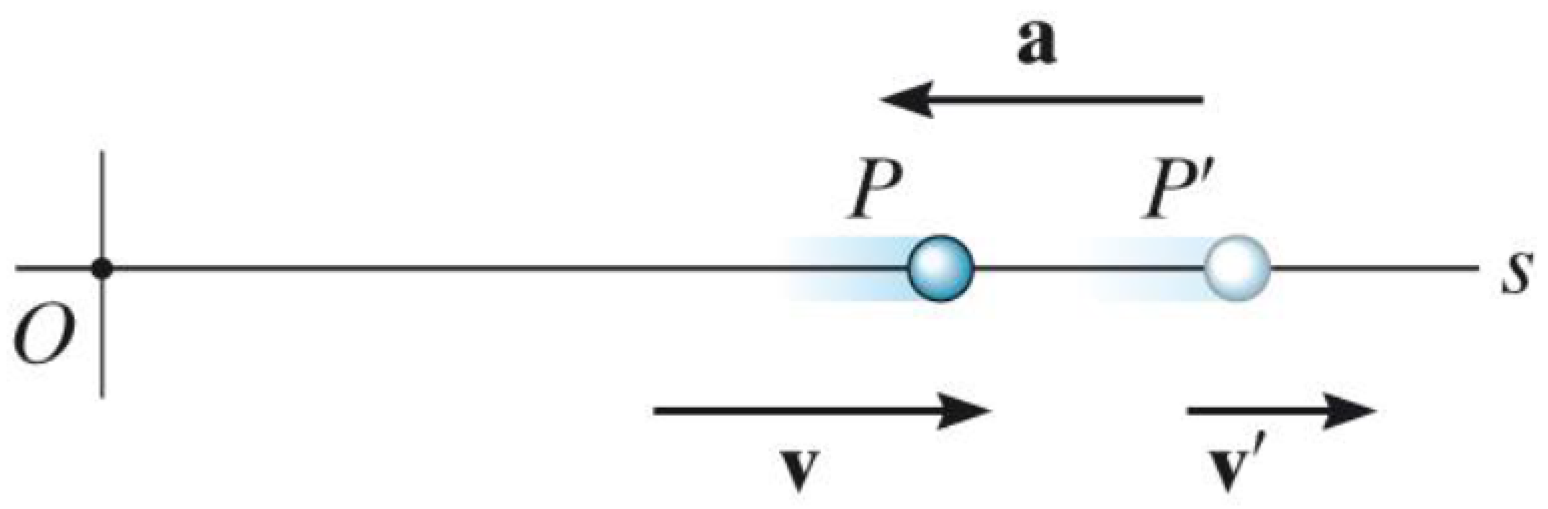


Versnelling

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Versnelling (vervolg)

- Wanneer een puntmassa *afremt*, neemt de snelheidsgrootte ervan *af*, dat wil zeggen de puntmassa vertraagt, ofwel $\Delta v = v' - v$ is negatief.
- Deze vertraging zal naar *links* gericht zijn, tegengesteld aan de *richting* van *v*.
- Als de *snelheid constant* is, is de *versnelling nul.*



Vertraging

UNIVERSITEIT GENT

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Snelheid als functie van de tijd

Integreren van $a_c = dv/dt$, aangenomen dat $v = v_0$ op $t = 0$, levert:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\, dt \;\Rightarrow\; v = v_0 + a_c t \quad \left(\overset{+}{\rightarrow}\right)$$

Constante versnelling

Positie als functie van de tijd bij constante versnelling

Integreren van $v = ds/dt$, aangenomen dat $s = s_0$ op $t = t_0$, levert:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t \left(v_0 + a_c t\right) dt \;\Rightarrow\; s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \quad \left(\overset{+}{\rightarrow}\right)$$

UNIVERSITEIT GENT

Constante versnelling

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Snelheid als functie van de plaats

Integreren van $v\,dv = a_c ds$, aangenomen dat $v = v_0$ als $s = s_0$, levert:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_c\,ds \;\Rightarrow\; v^2 = v_0^2 + 2a_c\left(s - s_0\right) \quad \left(\overset{+}{\rightarrow}\right)$$

Constante versnelling

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Om te onthouden!

- Dynamica gaat over lichamen die versneld worden.
- Kinematica gaat over de geometrie van de beweging.
- Kinetica bestudeert de krachten die de beweging veroorzaken.
- Kinematica van de rechtlijnige beweging heeft betrekking op bewegingen in een rechte lijn.
- Snelheidsgrootte verwijst naar de grootte van snelheid.
- Gemiddelde snelheidsgrootte is de totaal afgelegde afstand gedeeld door de totale tijd. Dit is anders dan de gemiddelde snelheid; dat is de verplaatsing gedeeld door de tijd.
- Een puntmassa die vaart mindert, vertraagt.
- Een puntmassa kan versnellen en toch een snelheid nul hebben.
- De relatie $a\,ds = v\,dv$ is afgeleid van $a = dv/dt$ en $v = ds/dt$, door daaruit dt te elimineren.

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

Analyseprocedure

Coördinatenstelsel

- Bepaal een plaatscoördinaat *s* op de baan
- De positie, snelheid en versnelling van de puntmassa kunnen voorgesteld worden als respectievelijk *s*, *v* en *a* met hun richting
- De positieve richting kan aangeduid worden met een pijl

Kinematica van de rechtlijnige beweging: continue beweging

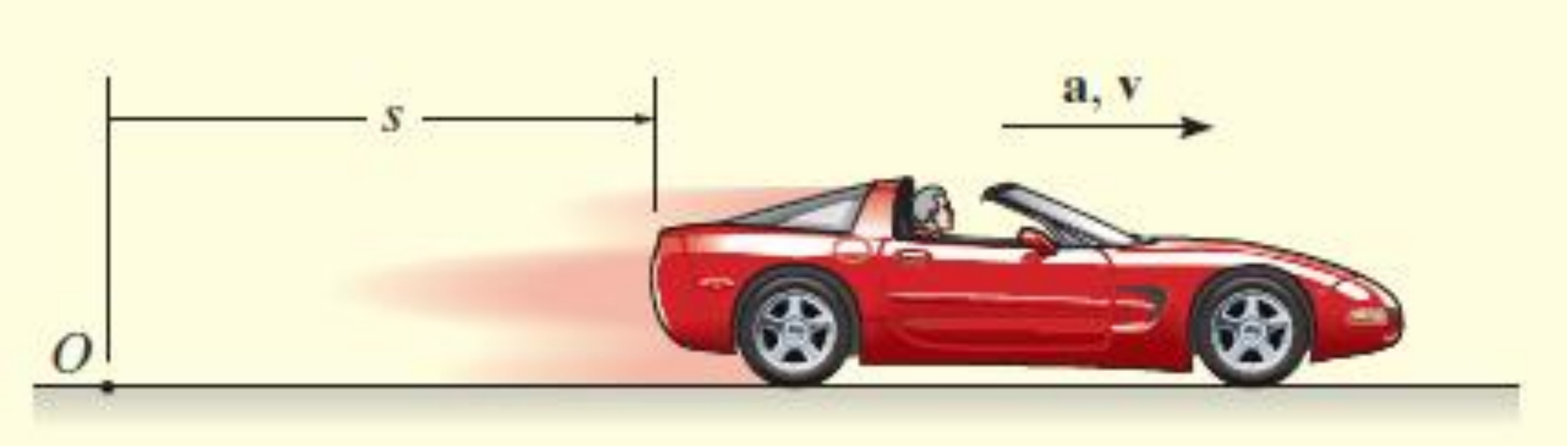
Analyseprocedure (vervolg)

Kinematische vergelijking

- Als de relatie tussen een willekeurig paar van de vier variabelen a, v, s en t bekend is, is het mogelijk om een derde variabele te bepalen
- Bij integreren moet de integratieconstante bekend zijn
- Drie kinematische vergelijkingen kunnen alleen toegepast worden als de versnelling van de puntmassa constant is

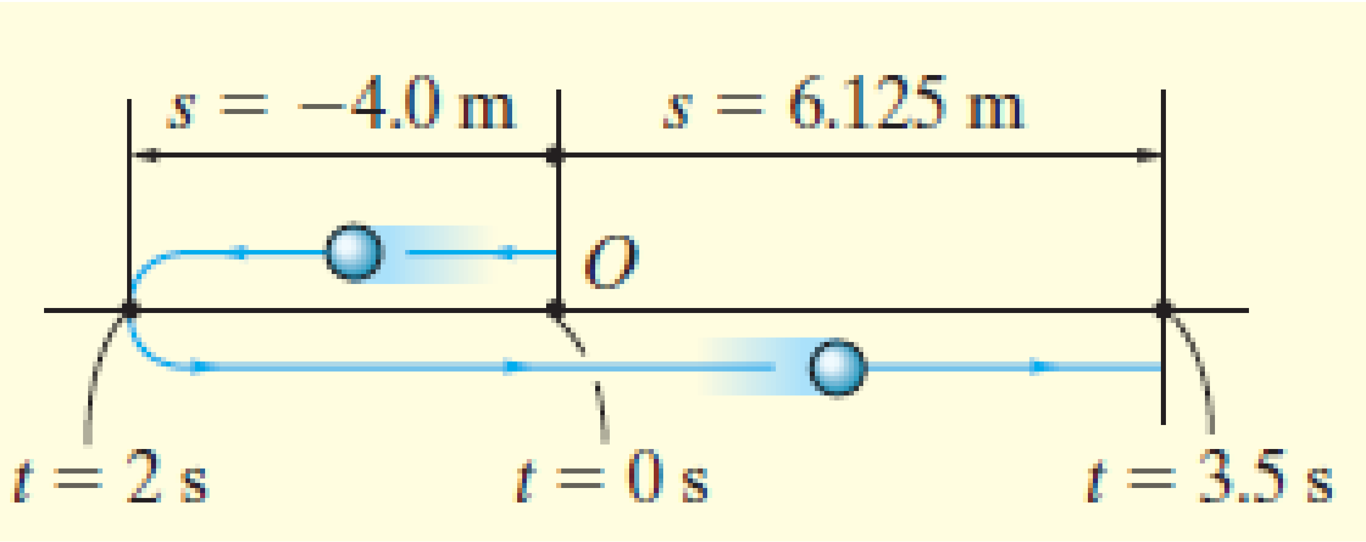
Voorbeeld 1.1

De auto beweegt in een rechte lijn, waarbij de snelheid ervan gedurende een korte tijd gedefinieerd kan worden als $v = (0{,}9t^2 + 0{,}6t)$ m/s, waarbij t de tijd in seconden is. Bepaal de plaats en versnelling van de auto als $t = 3$ s. Wanneer $t = 0$, geldt $s = 0$.



Voorbeeld 1.5

Een puntmassa beweegt langs een horizontale baan, zodanig dat zijn snelheid wordt bepaald door $v = (3t^2 - 6t)$ m/s. De beginpositie van de puntmassa is de oorsprong O. Bepaal de afstand die de puntmassa heeft afgelegd na 3,5 s en de gemiddelde snelheid en gemiddelde snelheidsgrootte tijdens dit tijdsinterval.



UNIVERSITEIT GENT

Oefening

1.21. Wanneer een trein met 2 m/s langs een recht spoor rijdt, begint hij te versnellen met $a = (60v^{-4})$ m/s^2, met v in m/s. Bepaal de snelheid v en de plaats, 3 s na de versnelling.

UNIVERSITEIT
GENT

Kinematica van de rechtlijnige beweging: veranderlijke beweging

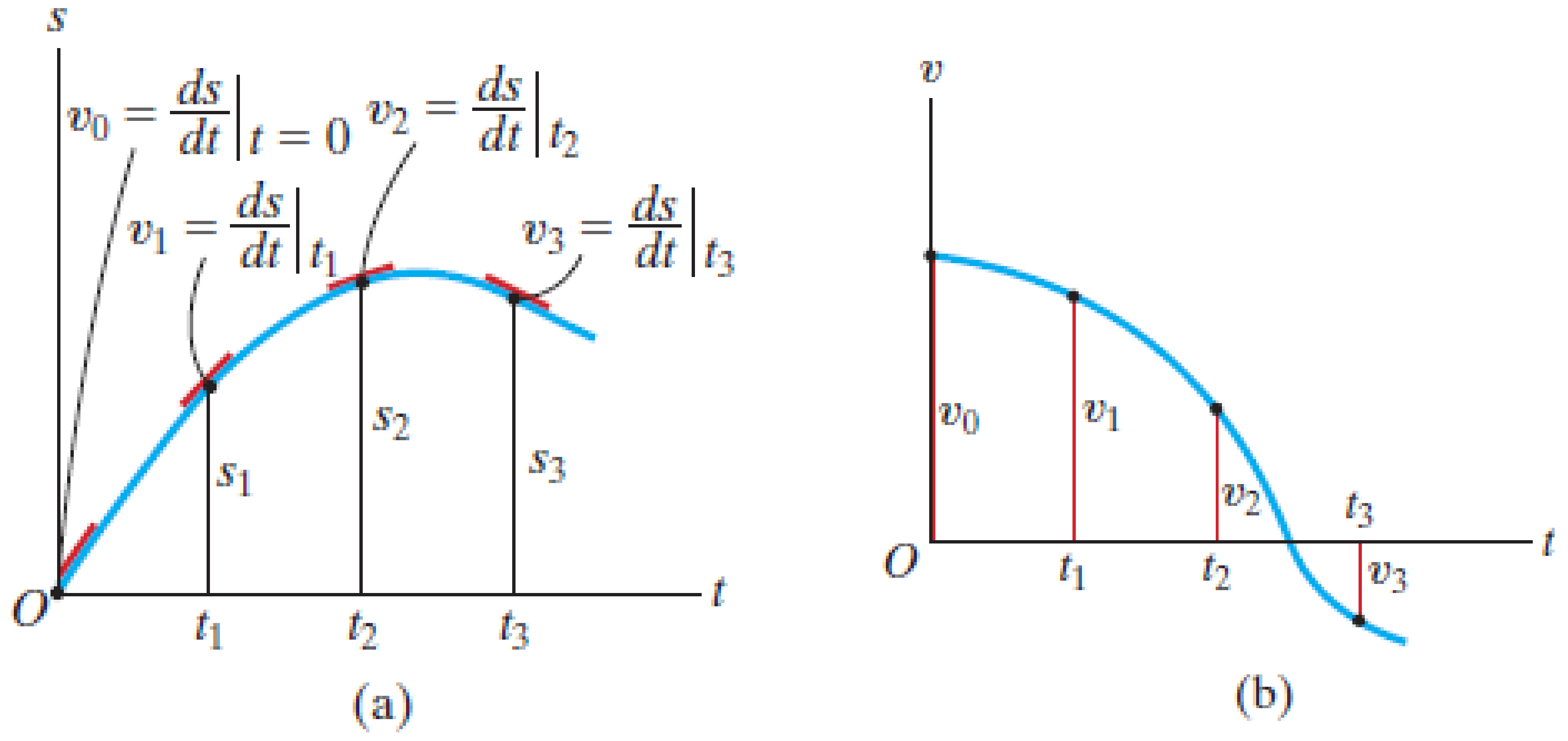
- Een veranderlijke beweging van een puntmassa wordt beschreven met behulp van een reeks krommen
- De relatie tussen een willekeurige combinatie van twee van de variabelen *a*, *v*, *s* en *t* wordt weergegeven in een grafiek
- We gebruiken $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ en $a\ ds = v\ dv$

Kinematica van de rechtlijnige beweging: veranderlijke beweging

De *s-t*-, *v-t*- en *a-t*-grafieken

- De *s*-*t*-grafiek kan geconstrueerd worden wanneer de plaats van de puntmassa *experimenteel bepaald* kan worden tijdens een tijdsduur *t*
- We bepalen de snelheid van de puntmassa met behulp van *v* = *ds/dt*
- De snelheid op een willekeurig moment kan bepaald worden door de hellingshoek van de *s*-*t*-grafiek te meten:

$$\frac{ds}{dt} = v$$



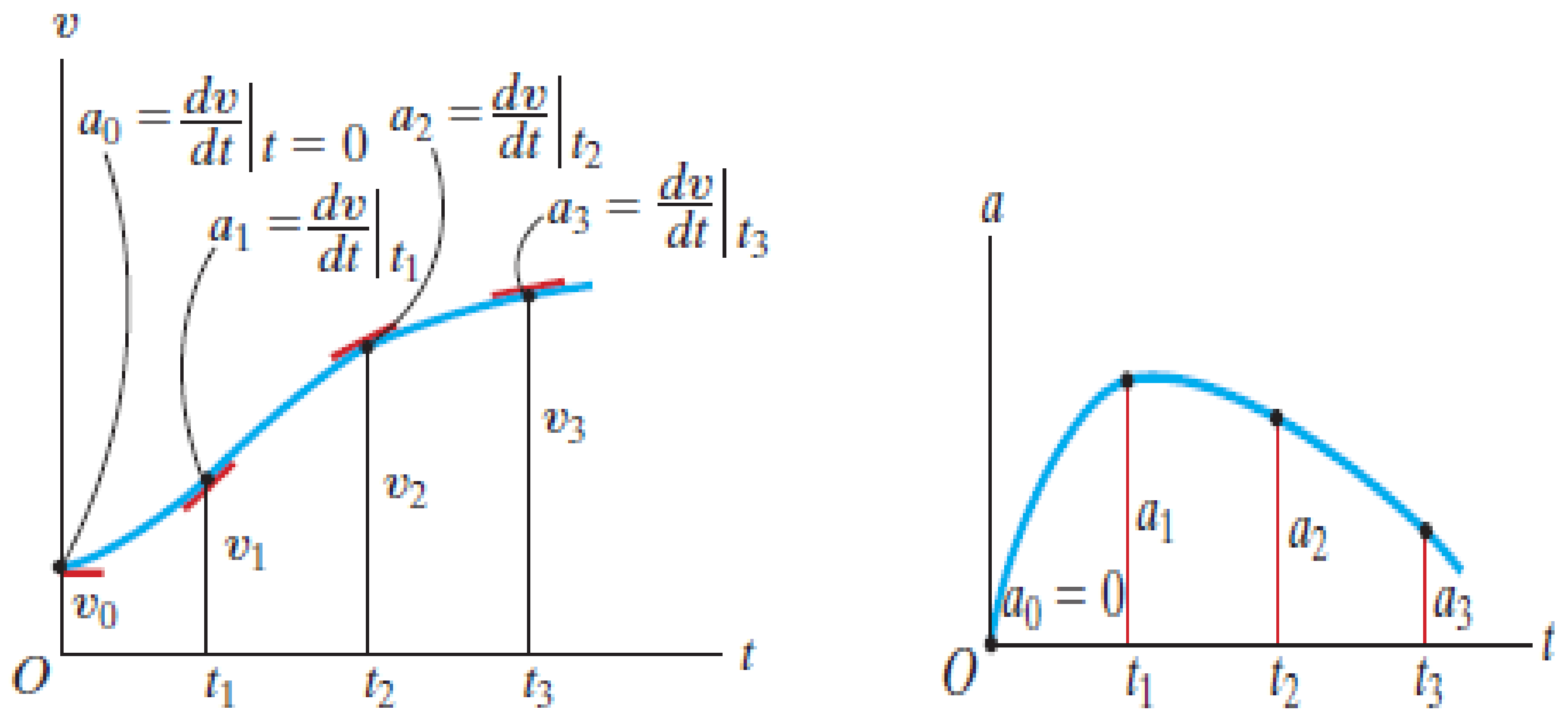
UNIVERSITEIT GENT

Kinematica van de rechtlijnige beweging: veranderlijke beweging

De *s-t*-, *v-t*- en *a-t*-grafieken (vervolg)

- Als de *v*-*t*-grafiek van de puntmassa bekend is, kan de versnelling als functie van de tijd (de *a*-*t*-grafiek) geconstrueerd worden worden met behulp van *a* = *dv/dt*
- De versnelling op een willekeurig moment kan bepaald worden door de hellingshoek van de *v*-*t*-grafiek te meten:

$$\frac{dv}{dt} = a$$



UNIVERSITEIT GENT

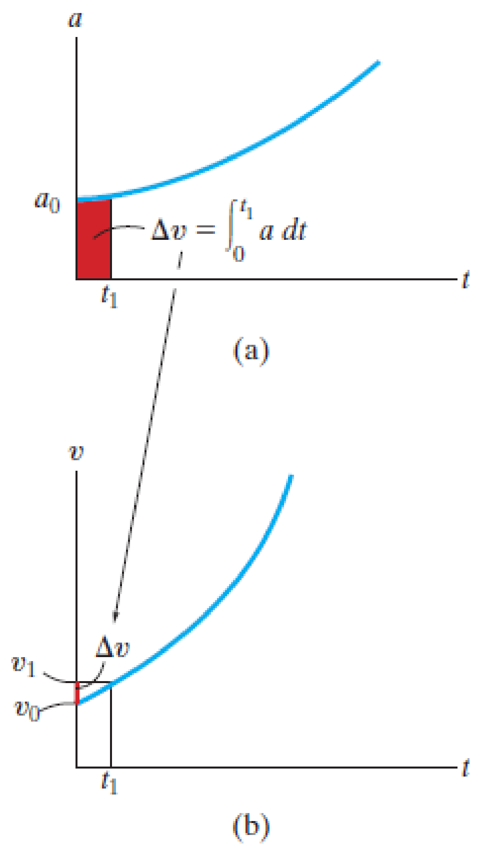
Kinematica van de rechtlijnige beweging: veranderlijke beweging

De *s-t*-, *v-t*- en *a-t*-grafieken (vervolg)

– Als de *a-t*-grafiek bekend is, kan *v* als functie van *t* bepaald worden door middel van:

$$\Delta v = \int a dt$$

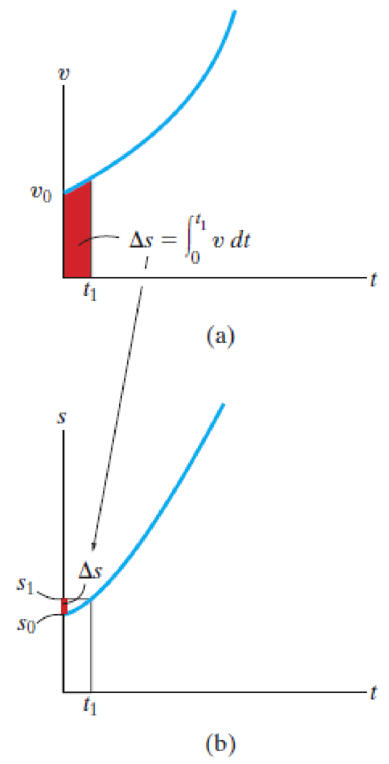
Snelheidsverandering = oppervlakte onder de *a-t*-grafiek



– Als de *v-t*-grafiek bekend is, kan *s-t* geschreven worden als:

$$\Delta s = \int v dt$$

Verplaatsing = oppervlakte onder de *v-t*-grafiek



Kinematica van de rechtlijnige beweging: veranderlijke beweging

De *v*-*s*- en *a*-*s*-grafieken

– Als de *a*-*s*-grafiek bekend is, kan de *v*-*s*-grafiek geconstrueerd worden met behulp van:

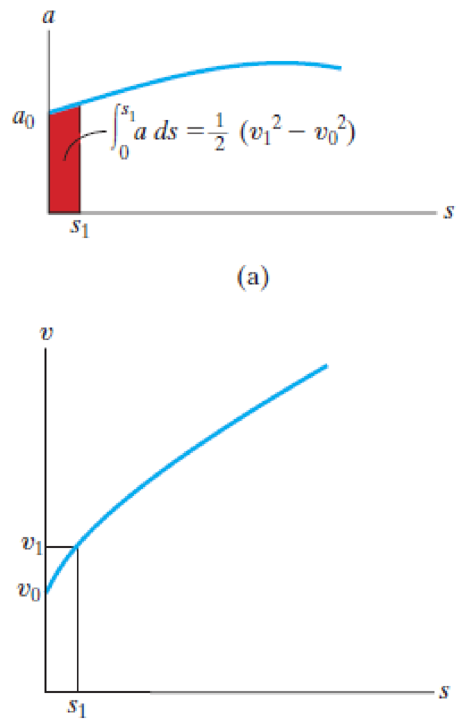
$$\frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

oppervlakte onder de *a*-*s*-grafiek

– Wanneer de *v*-*s*-grafiek bekend is, kan *a* voor elke willekeurige *s* geschreven worden als:

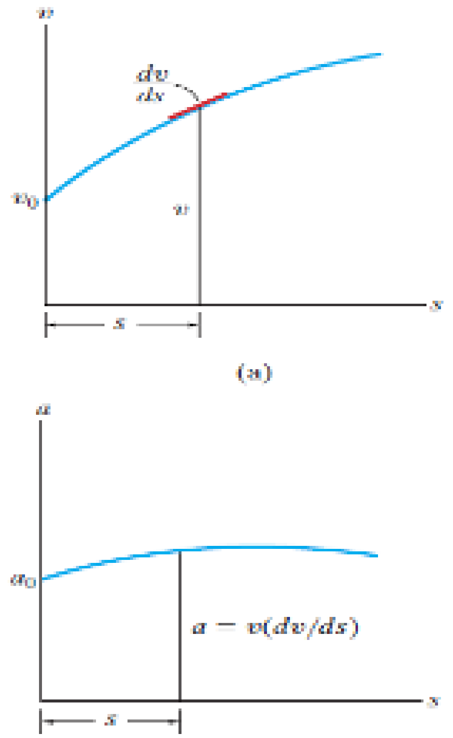
$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

Versnelling = snelheid · hellingshoek van *v*-*s*-grafiek



(a)

(b)



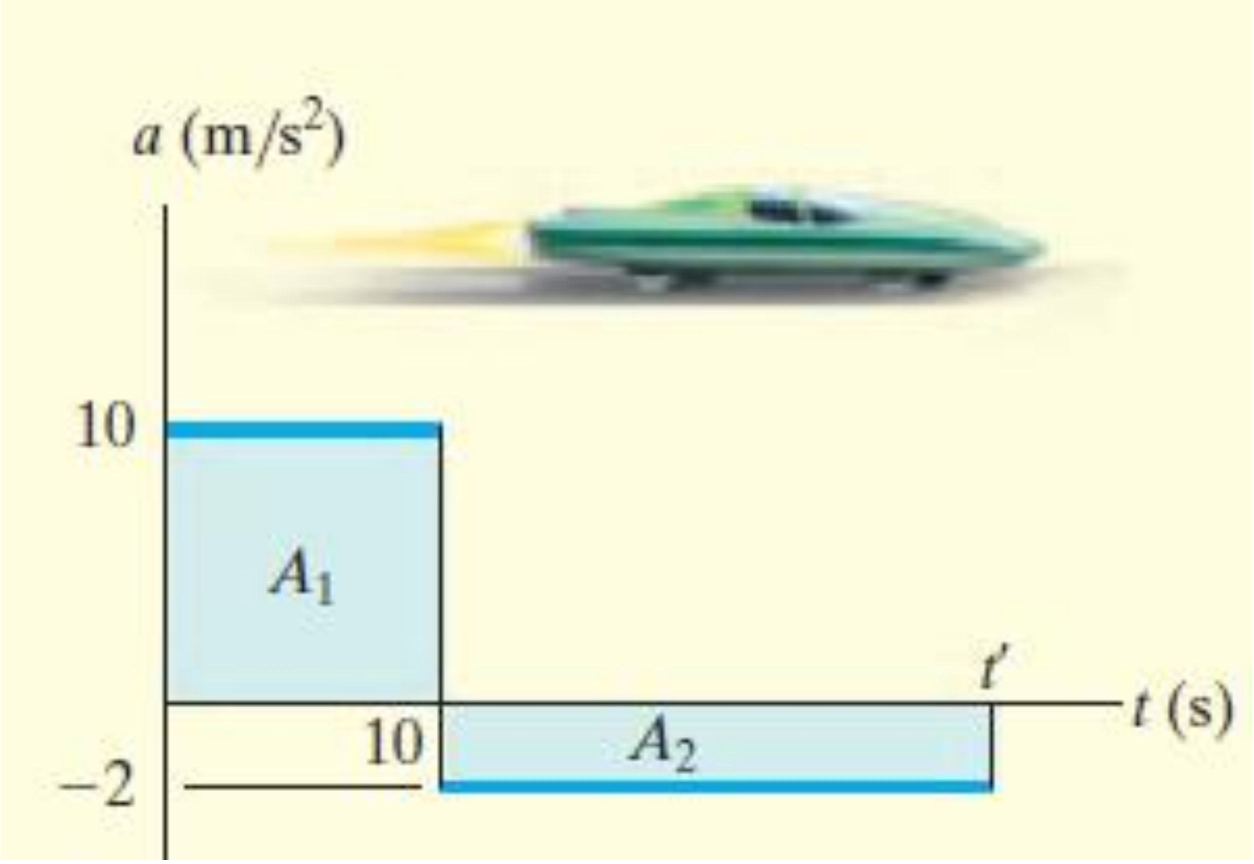
(a)

(b)

UNIVERSITEIT GENT

Voorbeeld 1.7

Een testauto start vanuit rust en rijdt zodanig over een rechte baan dat hij gedurende 10 s versnelt met 10 m/s² en vervolgens vertraagt met 2 m/s². Teken de *v*-*t*- en *s*-*t*-grafieken en bepaal de tijd *t′* die nodig is om de auto te stoppen. Hoe ver heeft de auto dan gereden?



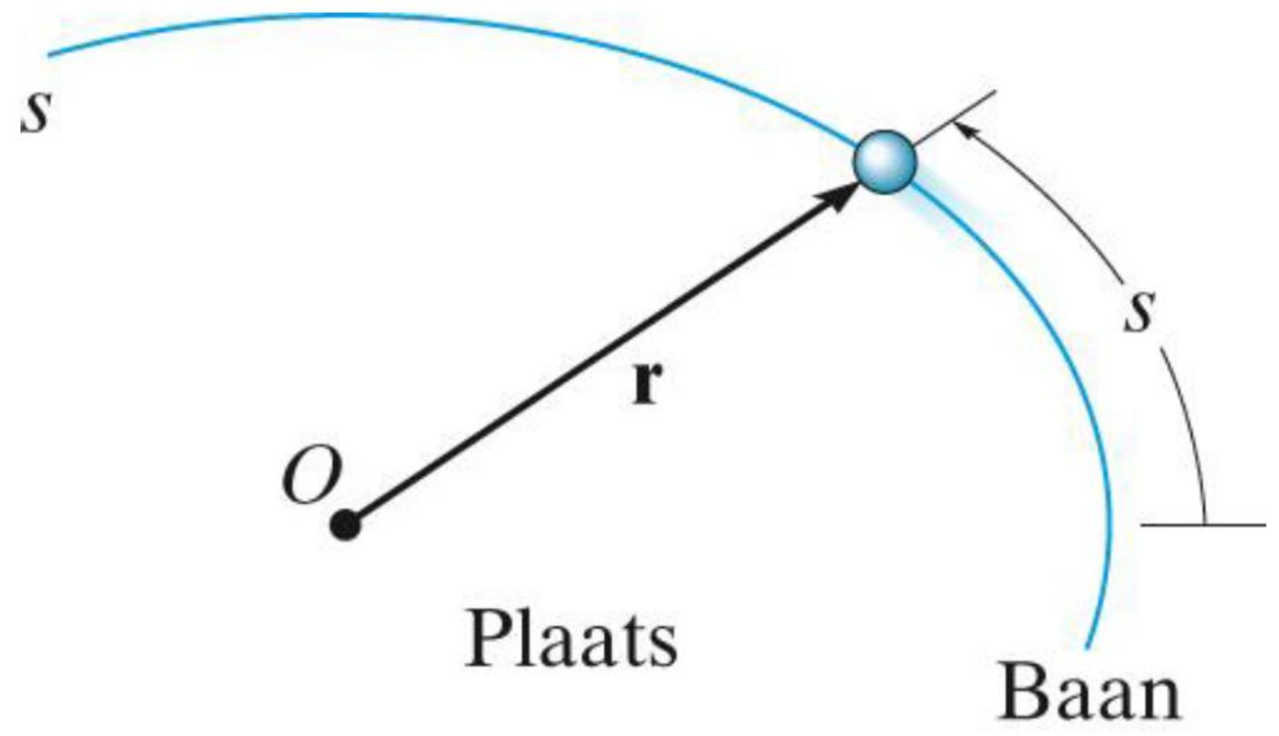
UNIVERSITEIT GENT

Algemene kromlijnige beweging

Een kromlijnige beweging doet zich voor wanneer de puntmassa een gekromde baan beschrijft.

Plaats

– Wordt gemeten ten opzichte van een vast punt *O* met de *plaatsvector* **r** = **r**(*t*)

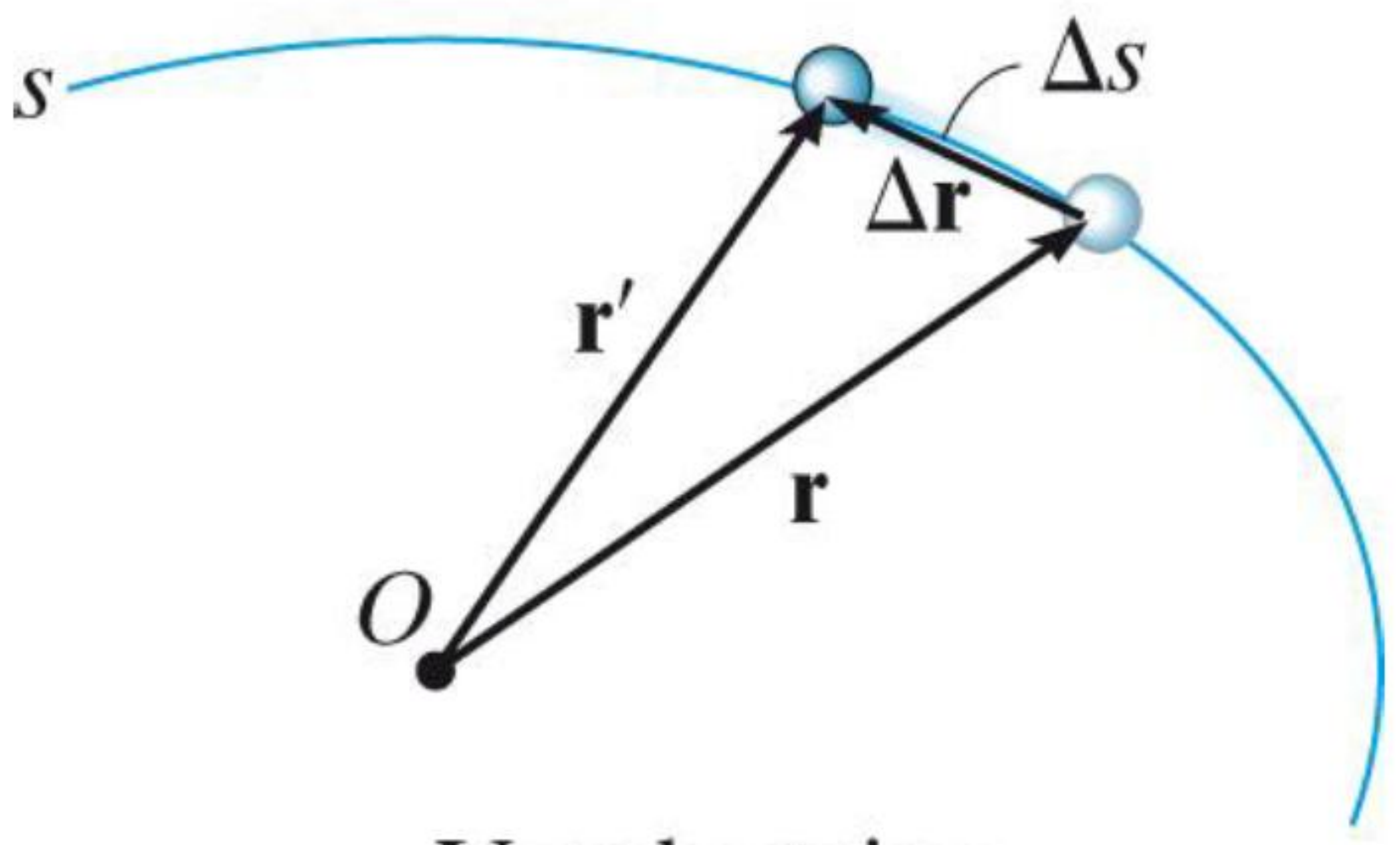


Algemene kromlijnige beweging

Verplaatsing

– Voor een puntmassa die een afstand Δ*s* aflegt langs de kromme naar een nieuwe plaats *P’* in een klein tijdsinterval Δ*t*, is de verplaatsing gedefinieerd door $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$

– De *verplaatsing* $\Delta\mathbf{r}$ is de verandering van de plaats van de puntmassa



Verplaatsing

Algemene kromlijnige beweging

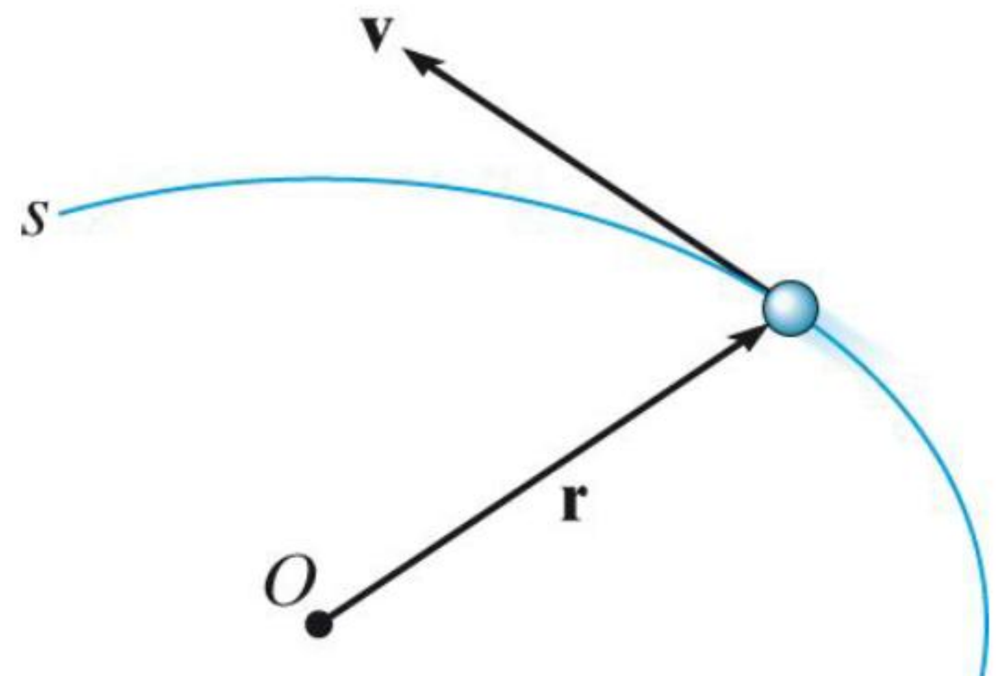
Snelheid

– De *gemiddelde snelheid* van de puntmassa is gedefinieerd als:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

– De ogenblikkelijke snelheid kan bepaald worden door Δt naar 0 te laten gaan:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Snelheid

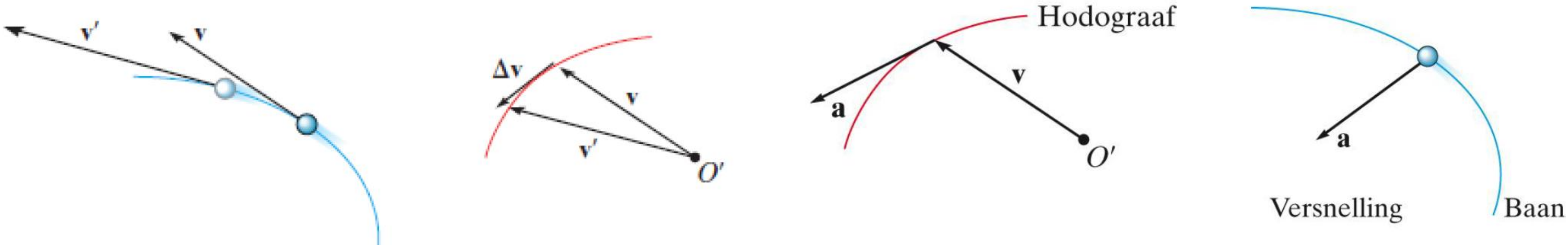
Algemene kromlijnige beweging

Versnelling

- De *gemiddelde versnelling* tijdens het tijdsinterval Δ*t* is:

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- **a** raakt aan de *hodograaf* en valt niet samen met de raaklijn van de baan



UNIVERSITEIT GENT

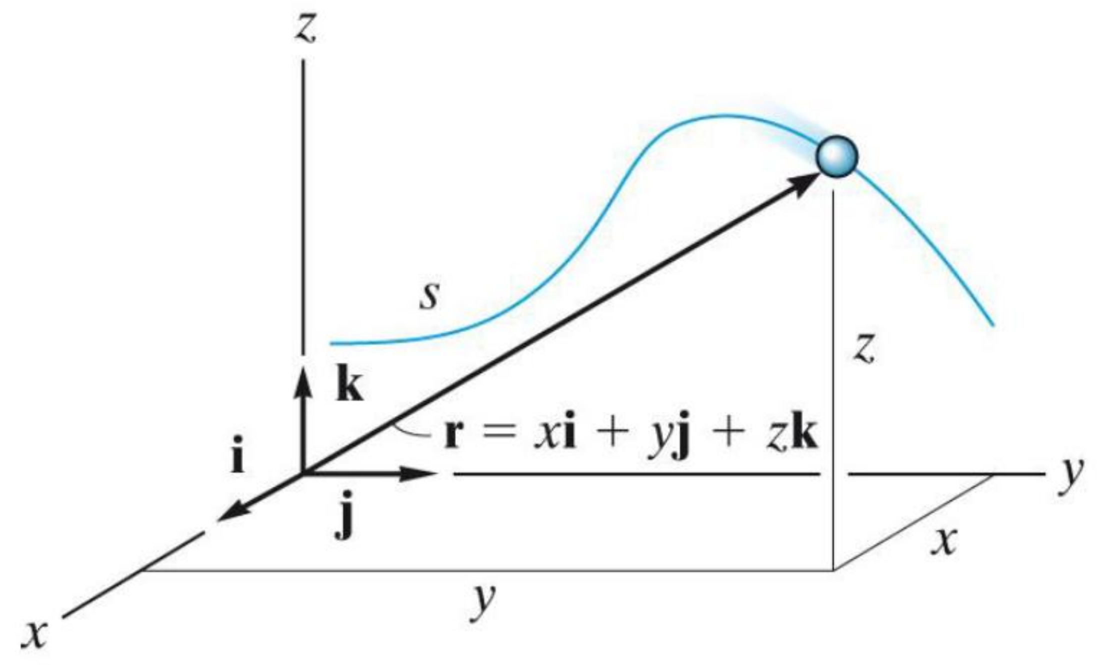
Kromlijnige beweging: componenten in een rechthoekig assenstelsel

Plaats

– De plaatsvector wordt bepaald door **r** =*x***i** + *y***j** + *z***k**
– De grootte van **r** is *altijd positief* en gedefinieerd als:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

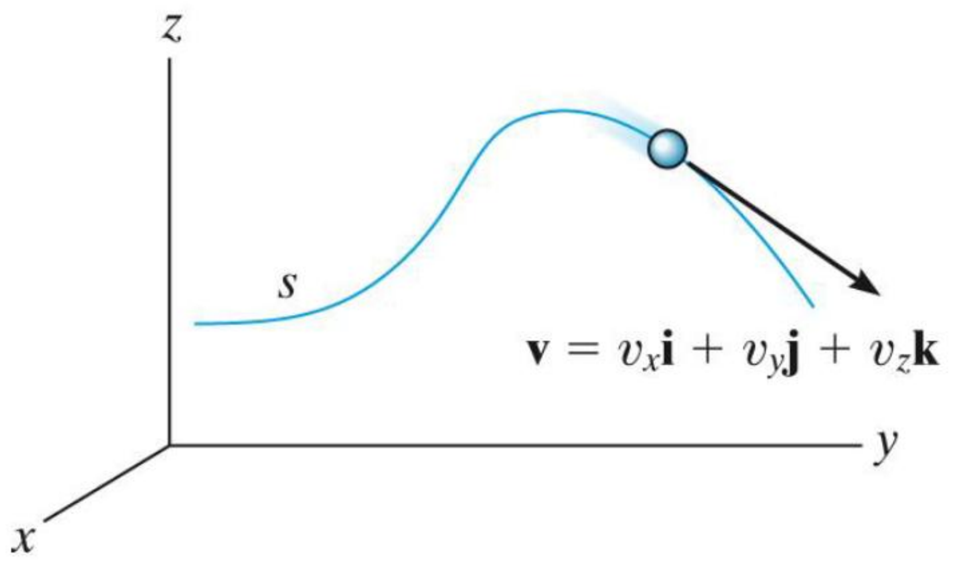
– De *richting* van **r** wordt aangeduid door de componenten van de eenheidsvector $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$



Plaats

UNIVERSITEIT GENT

Kromlijnige beweging: componenten in een rechthoekig assenstelsel



Snelheid

Snelheid

– Differentiëren levert de snelheid:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\text{met } v_x = \dot{x}\,, \quad v_y = \dot{y}\,, \quad v_z = \dot{z}$$

– De snelheid heeft een *grootte* die gedefinieerd wordt als:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

– De eenheidsvector $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$ heeft een richting die *altijd samenvalt met de raaklijn van de baan*

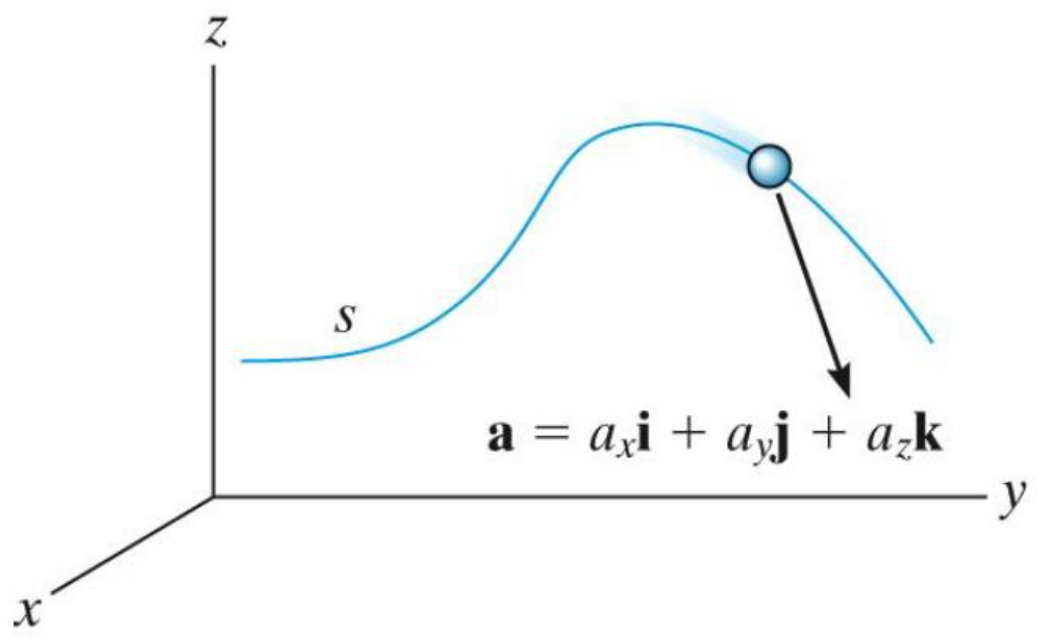
Kromlijnige beweging: componenten in een rechthoekig assenstelsel

Versnelling

– Nogmaals differentiëren geeft:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\text{met } a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}\ , \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}\ , \ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$



versnelling

– De versnelling heeft een *grootte* die gedefinieerd is als:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Kromlijnige beweging: componenten in een rechthoekig assenstelsel

Om te onthouden!

- Bij een kromlijnige beweging kan *zowel* de grootte als de richting van de plaats-, de snelheids- en de versnellingsvector veranderen.
- De snelheidsvector is altijd rakend aan de baan.
- Over het algemeen is de versnellingsvector *niet* rakend aan de baan, maar rakend aan de snelheidshodograaf.
- Als de beweging beschreven wordt met behulp van een rechthoekig coördinatenstelsel, verandert niet de richting van de componenten langs de assen, maar alleen de grootte en het teken (in algebraïsche zin) van de componenten.
- Door te werken met de componenten van de bewegingen, wordt de verandering van de grootte en de richting van de beweging van de puntmassa automatisch correct verwerkt.

Kromlijnige beweging: componenten in een rechthoekig assenstelsel

Analyseprocedure

Coördinatenstelsel

- Een rechthoekig coördinatenstelsel kan beschreven worden met behulp van *x*-, *y*- en *z*-componenten

Kinematische grootheden

- Rechtlijnige beweging kan bepaald worden met behulp van $v = ds/dt$, $a = dv/dt$ of $a\ ds = v\ ds$
- De grootte van de vectoren kan bepaald worden met de stelling van Pythagoras

UNIVERSITEIT GENT

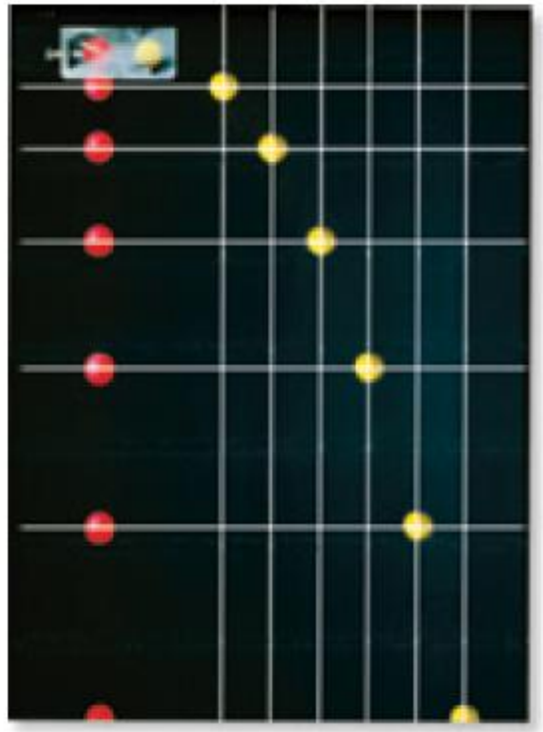
Voorbeeld 1.10

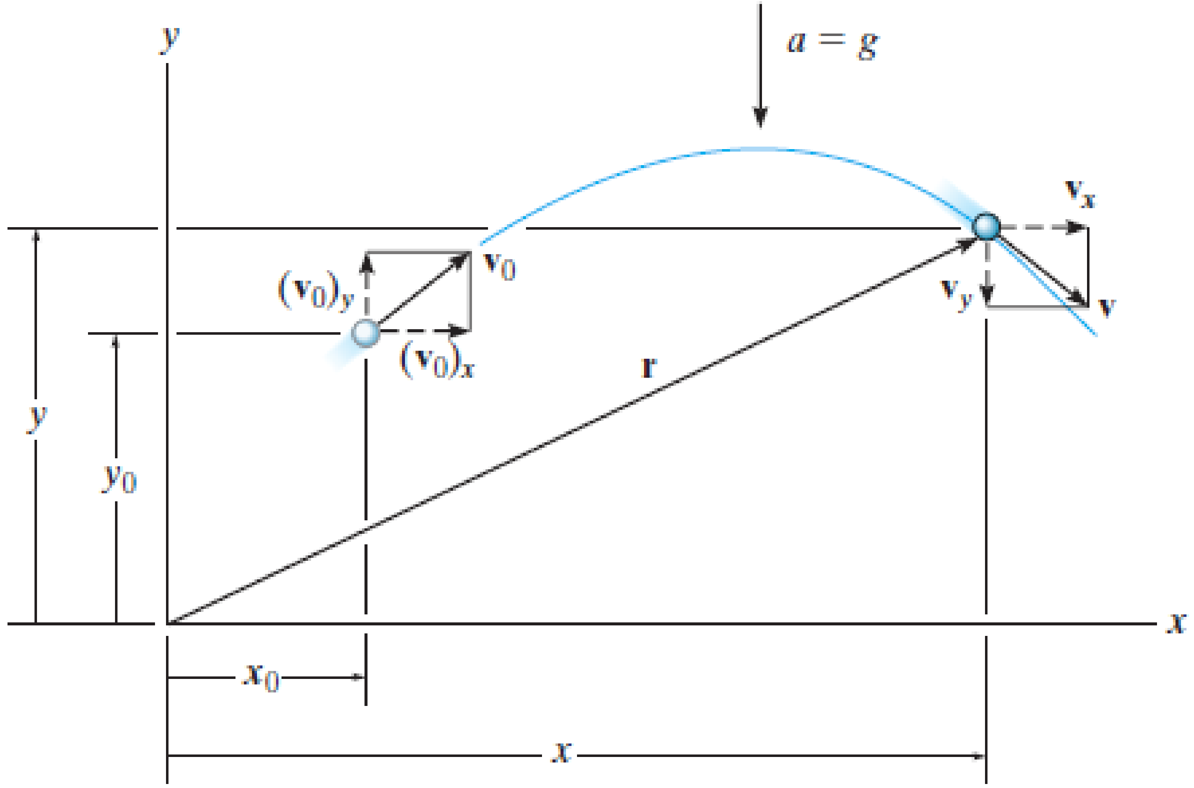
De baan van het vliegtuig op de foto kan gedurende een korte tijd worden beschreven met de formule $y = (0{,}001x^2)$ m. Het vliegtuig stijgt met een constante snelheid van 10 m/s. Bepaal in dat geval de grootte van de snelheid en versnelling van het vliegtuig wanneer het een hoogte heeft van $y = 100$ m.

UNIVERSITEIT
GENT

Beweging van een projectiel

- De versnelling van een projectiel is altijd verticaal gericht
- Het projectiel wordt gelanceerd ter plaatse van (x_0, y_0) en de baan is gedefinieerd in het *x*-*y*-vlak
- De luchtweerstand wordt buiten beschouwing gelaten
- De enige kracht wordt geleverd door het eigen gewicht en is omlaag gericht
- $a_c = g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$





Beweging van een projectiel

Horizontale beweging

– Omdat $a_x = 0$, geldt:

$$\left(\overset{+}{\rightarrow}\right) \quad v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$

$$\left(\overset{+}{\rightarrow}\right) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$\left(\overset{+}{\rightarrow}\right) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

– De horizontale snelheidscomponent blijft constant tijdens de beweging

Beweging van een projectiel

Verticale beweging

– De positieve y-as is omhoog en dus is $a_y = -g$

$$(+\uparrow)\ v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow)\ y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$(+\uparrow)\ v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_x = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Beweging van een projectiel

Analyseprocedure

Coördinatenstelsel

- Bepaal de vaste *x*-, *y*- en *z*-as
- Schets de baan van de puntmassa
- Bepaal 3 onbekenden en gegevens tussen twee willekeurige punten op de baan
- De versnelling van de zwaartekracht werkt altijd omlaag
- Druk de begin- en eindsnelheid van de puntmassa uit in de *x*- en *y*-componenten
- De positieve en negatieve component van een plaats, snelheid en versnelling liggen altijd in de richting van de hierbij behorende coördinaat

Beweging van een projectiel

Analyseprocedure (vervolg)

Kinematische vergelijkingen

Bepaal welke vergelijkingen tussen de twee punten op de baan toegepast moeten worden voor de meest directe oplossing

Horizontale beweging

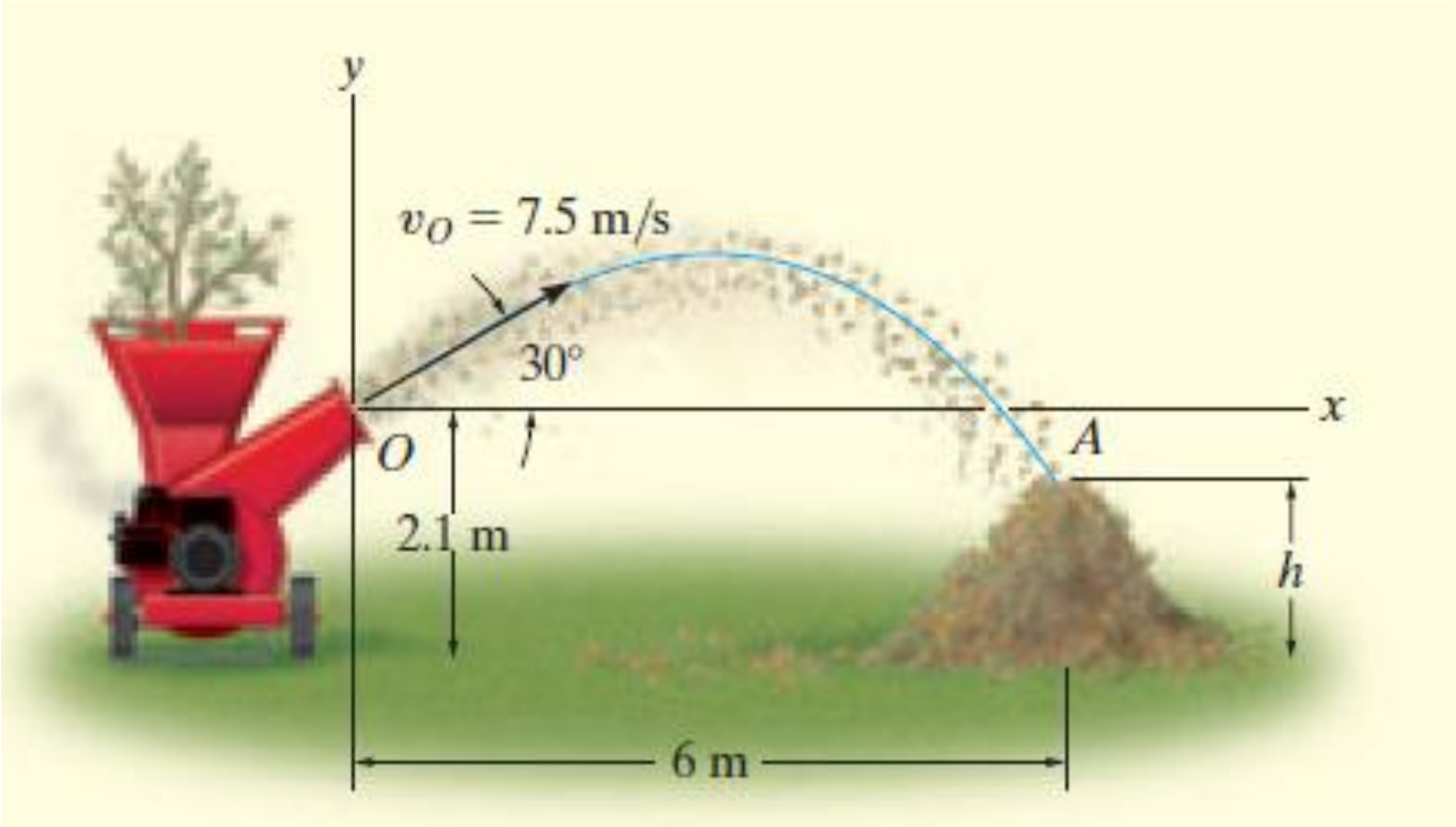
$x = x_0 + (v_0)_x t$

Verticale beweging

$$v_y = (v_0)_y + a_c t, \quad y = y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} a_c t^2, \quad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2a_c (y - y_0)$$

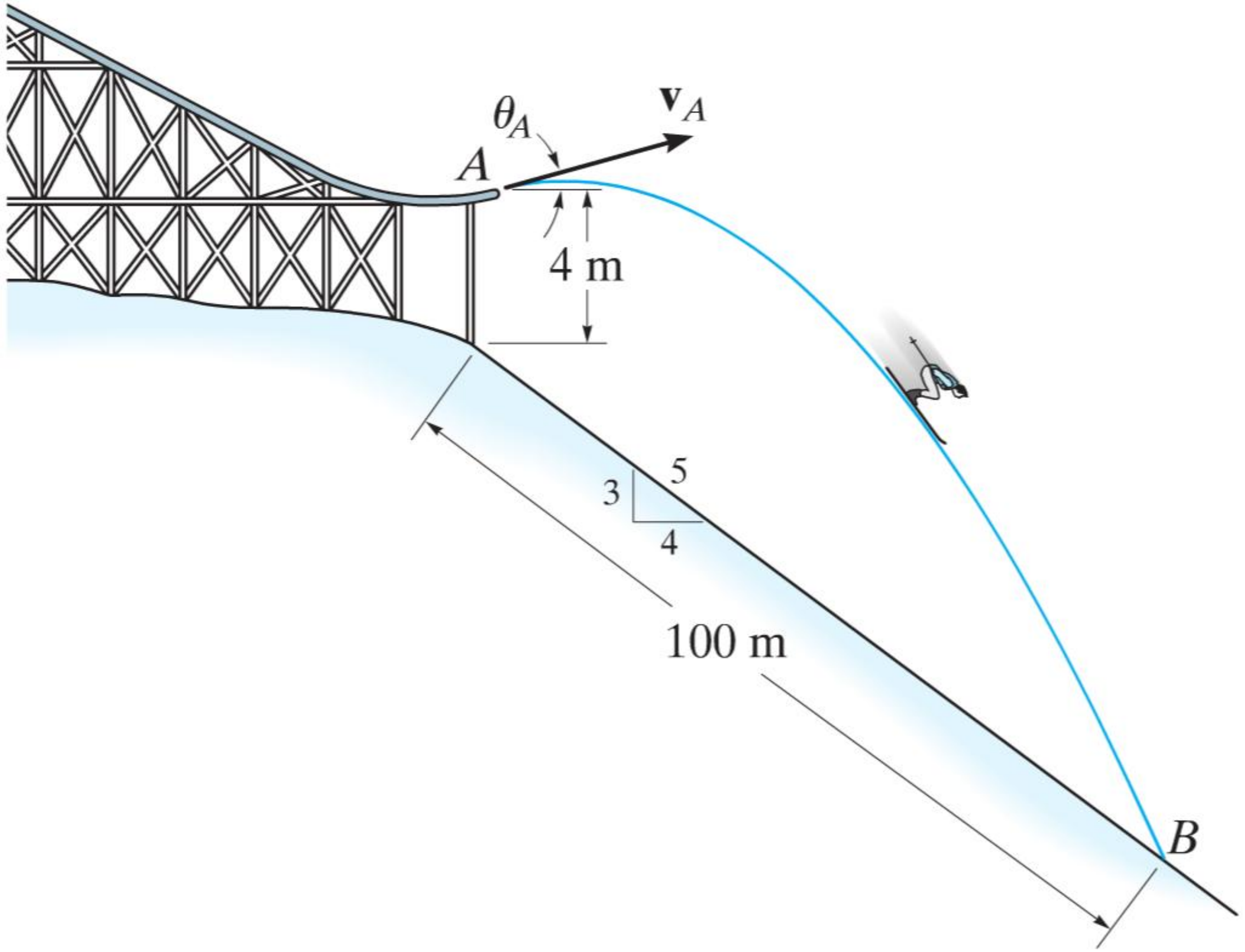
Voorbeeld 1.12

De hakselaar is gemaakt om houtsnippers met v_O = 7,5 m/s uit te werpen. Bepaal de hoogte *h* waarop de snippers op de hoop belanden die op 6 m afstand van de machine ontstaat, als de uitwerpbuis een hoek van 30° met de horizontaal maakt.



Oefening

1.95. De skiër verlaat de helling A onder een hoek $\theta_A = 25°$ met de horizontaal. Als hij de grond raakt in B, bepaal dan zijn beginsnelheid v_A en de snelheid waarmee hij de grond raakt.

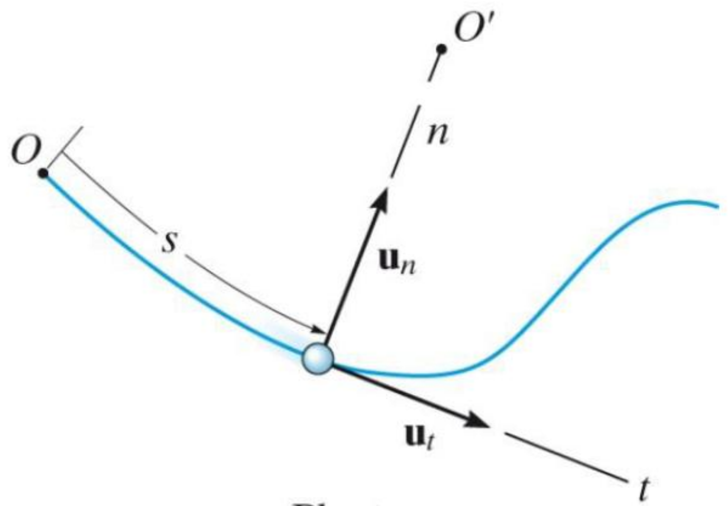


Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

- De baan van de beweging van een puntmassa kan beschreven worden met *n*- en *t*-coördinaten die respectievelijk loodrecht en samenvallend met de raaklijn gericht zijn
- Op het beschouwde moment bevindt hun oorsprong zich *ter plaatse van de puntmassa*

Beweging in een vlak

- De oorsprong *valt toevallig samen* met de plaats van de puntmassa



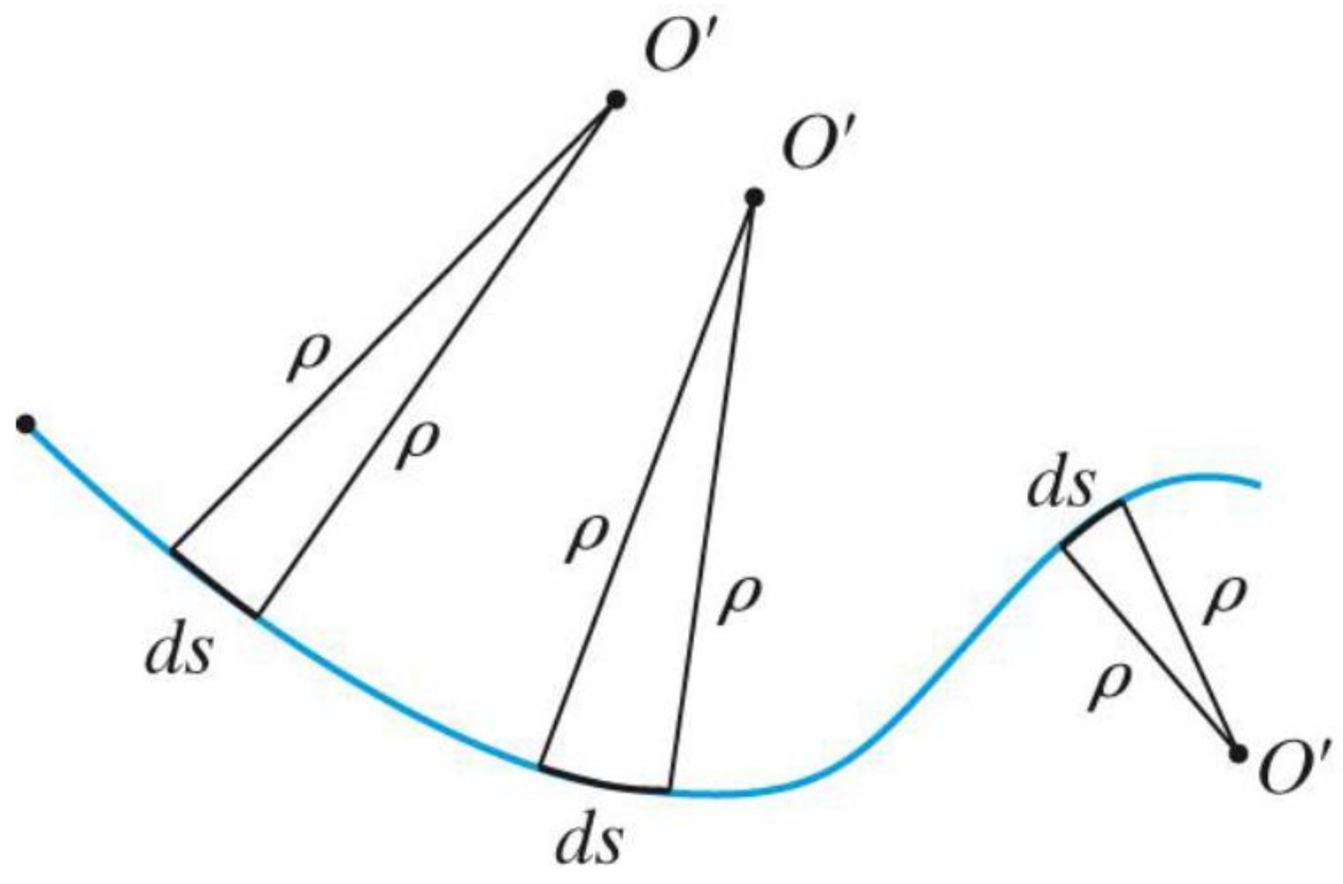
Plaats

UNIVERSITEIT GENT

Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

Beweging in een vlak (vervolg)

- De kromme kan geconstrueerd worden met behulp van een reeks cirkelsegmenten met lengte *ds*
- Het vlak waarin de *n*- en *t*-as liggen, wordt het *osculatievlak* genoemd en ligt in het bewegingsvlak



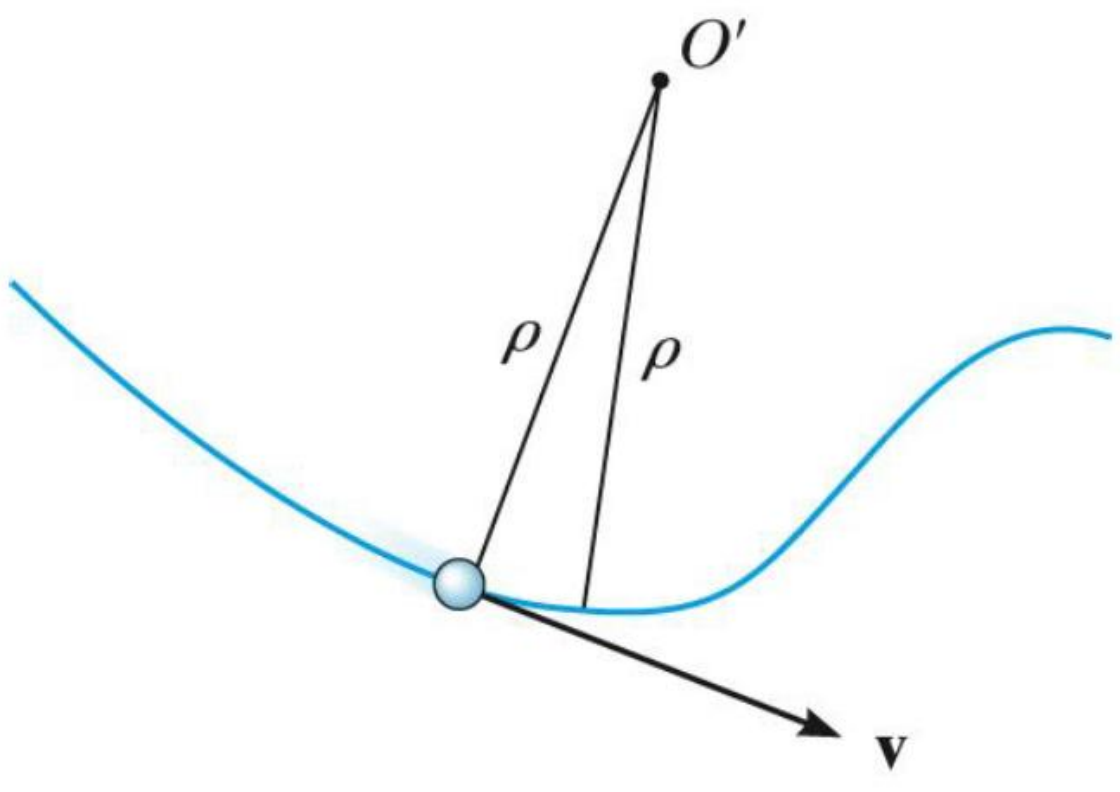
Kromtestraal

Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

Snelheid

- Wanneer een puntmassa beweegt, is *s* een functie van de tijd
- De richting van de snelheid **v** van een puntmassa valt altijd *samen met de raaklijn van de baan*
- De *grootte* van de snelheid kan bepaald worden door de tijdsafgeleide van de baanfunctie *s* = *s(t)* te bepalen:

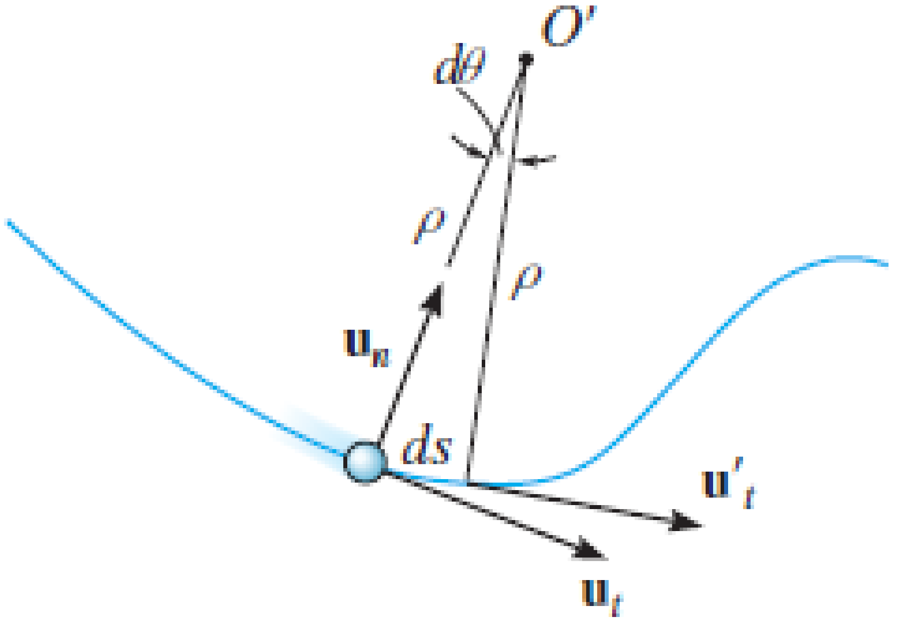
$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \quad \text{met} \quad v = \dot{s}$$



Snelheid

UNIVERSITEIT GENT

Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

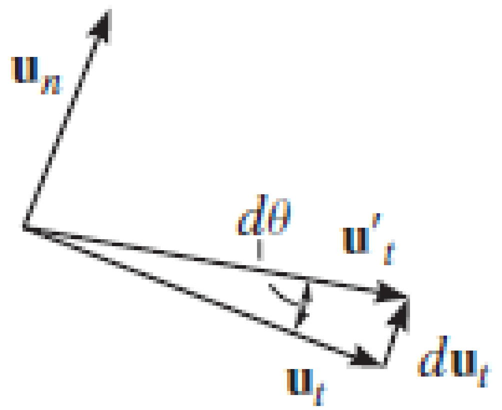


Versnelling

– De versnelling van de puntmassa is de verandering van de snelheid ervan in de tijd:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$

– **a** kan worden geschreven als:

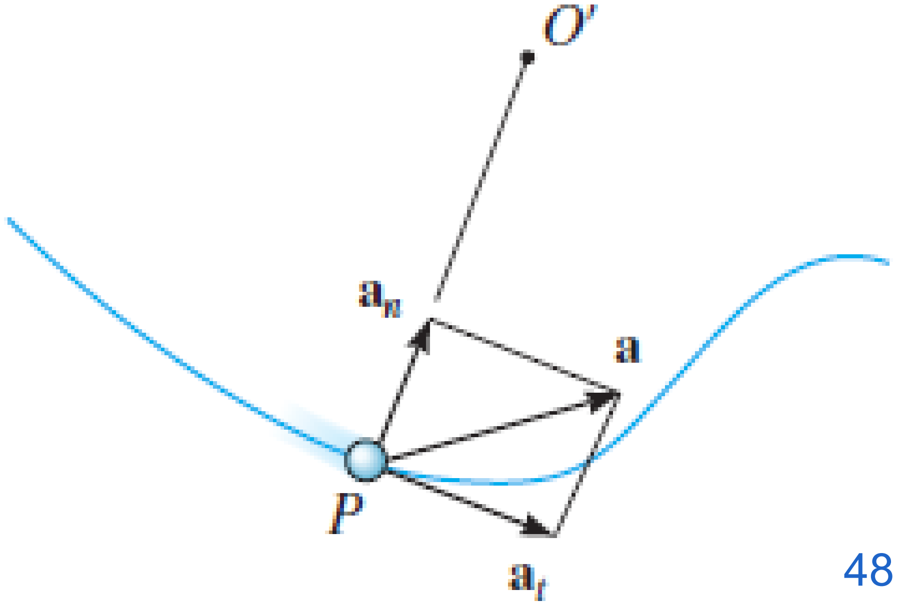


$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n$$

$$\text{met } \; a_t = \dot{v} \; \text{ of } \; a_t ds = v dv \quad \text{en} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

– De grootte van de versnelling is:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

Analyseprocedure

Coördinatenstelsel

- Bepaal, als de baan van de puntmassa *bekend* is, een set *n*- en *t*-coördinaten met een *vaste oorsprong*
- De positieve raaklijn ligt in de richting van de beweging
- De *n*- en *t*-as worden gebruikt om de snelheid en de versnelling van de puntmassa te bestuderen

Kromlijnige beweging: normaalcomponenten en tangentiële componenten

Analyseprocedure (vervolg)

Snelheid

– De richting van de snelheid **v** valt altijd samen met de raaklijn van de baan

– De grootte van de snelheid volgt uit de tijdsafgeleide van de afgelegde weg langs de baan: $v = \dot{s}$

Tangentiële versnelling

– Voor rechtlijnige beweging geldt $a_t = \dot{v}$ en $a_t ds = v dv$

– Als a_t constant is, geldt:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_t)_c t^2$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c (s - s_0)$$

UNIVERSITEIT GENT

Kromlijnige beweging: normaalcompo-nenten en tangentiële componenten

Analyseprocedure (vervolg)

Versnelling in normaalrichting

- De grootte van de normale component is:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

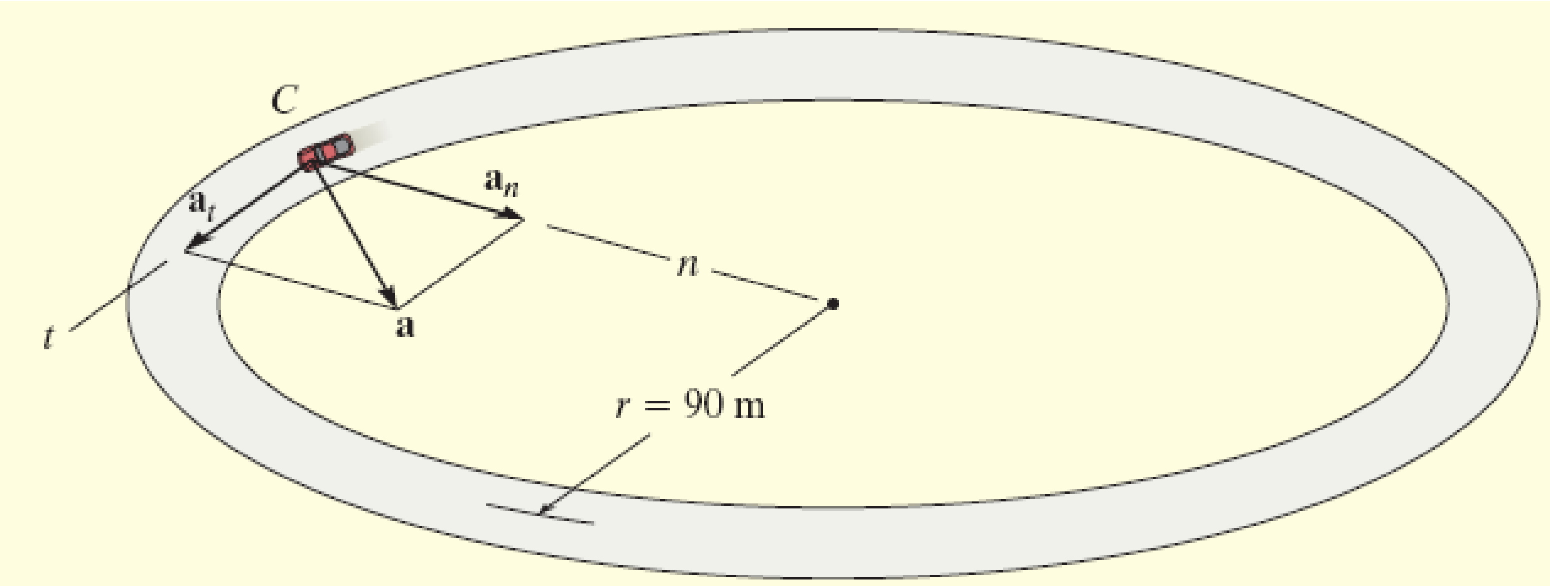
- Wanneer de baan wordt uitgedrukt als $y = f(x)$, kan de kromtestraal ρ op elk punt van de baan berekend worden uit de vergelijking:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\left| d^2y/dx^2 \right|}$$

UNIVERSITEIT GENT

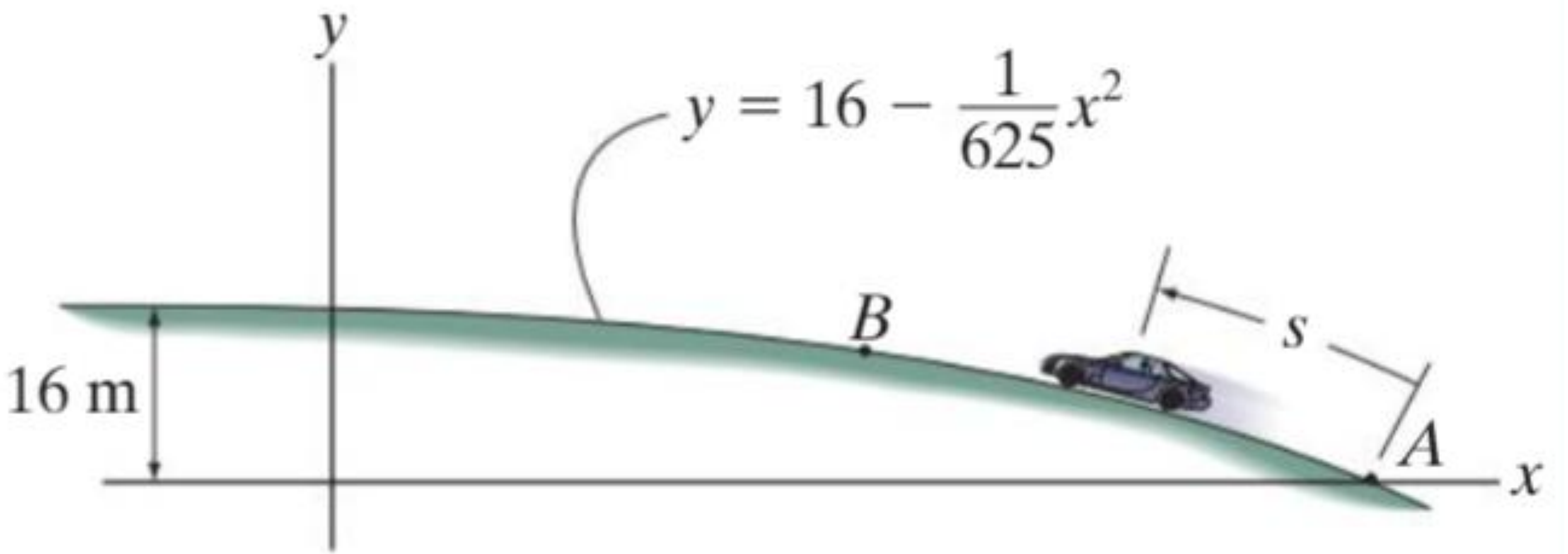
Voorbeeld 1.15

Racewagen C rijdt over de horizontale cirkelvormige weg die een straal van 90 m heeft. De auto accelereert met een constante versnelling van 2,1 m/s^2 en is vanuit stilstand gestart. Bepaal de tijd die de auto nodig heeft om een versnelling van 2,4 m/s^2 te bereiken. Wat is zijn snelheid op dat moment?



Oefening

1.122. De auto passeert punt A met een snelheid van 25 m/s, waarna deze verder rijdt met een snelheid $v = (25 - 0{,}15s)$ m/s, waarbij s in meters is. Bepaal de grootte van de versnelling van de auto wanneer deze punt B bereikt, als $s = 51{,}5$ m en $x = 50$ m.



UNIVERSITEIT GENT

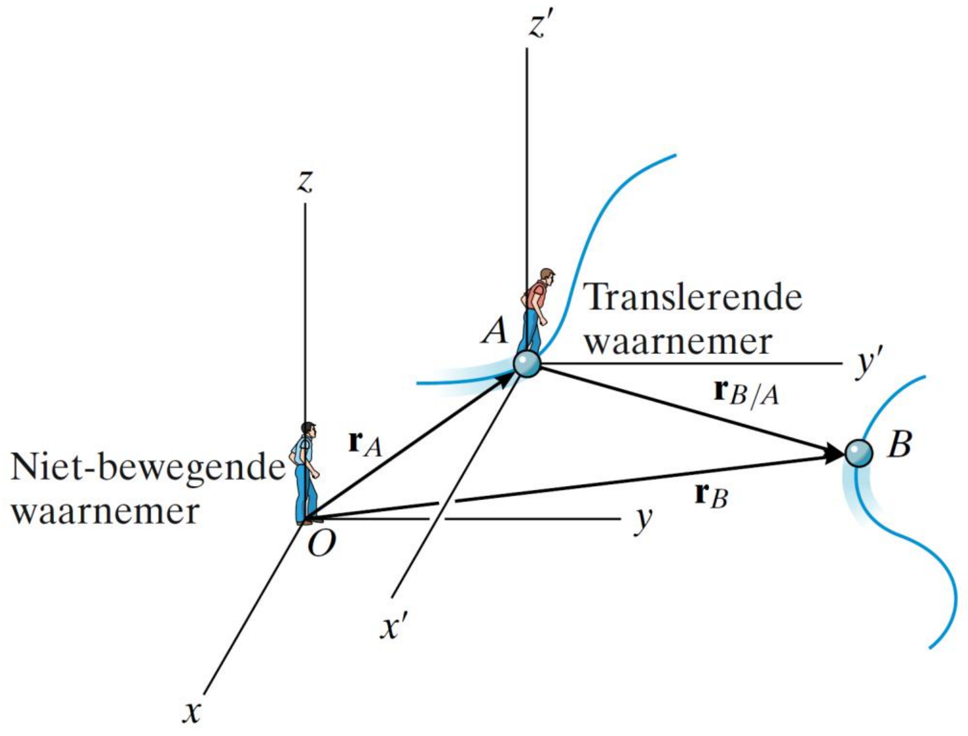
Relatieve beweging van twee puntmassa's via translerende assen

- In sommige gevallen is de baan van de beweging van een puntmassa gecompliceerd
- Het is mogelijk om de bewegingen in delen te analyseren door twee of meer inertiaalstelsels te gebruiken

Plaats

- *De absolute plaatsen* $\mathbf{r}_A$ en $\mathbf{r}_B$ worden gemeten vanuit de oorsprong *O* van een vast *x*-*y*-*z*-referentiestelsel:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$



UNIVERSITEIT GENT

Relatieve beweging van twee puntmassa's via translerende assen

Snelheid

- Met behulp van tijdsafgeleiden: $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$
- $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ en $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ zijn *absolute snelheden*, omdat ze vanuit het vaste referentiestelsel worden waargenomen
- De relatieve snelheid $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ wordt waargenomen vanuit het translerende referentiestelsel

Versnelling

- De tijdsafgeleide levert ook $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

UNIVERSITEIT GENT

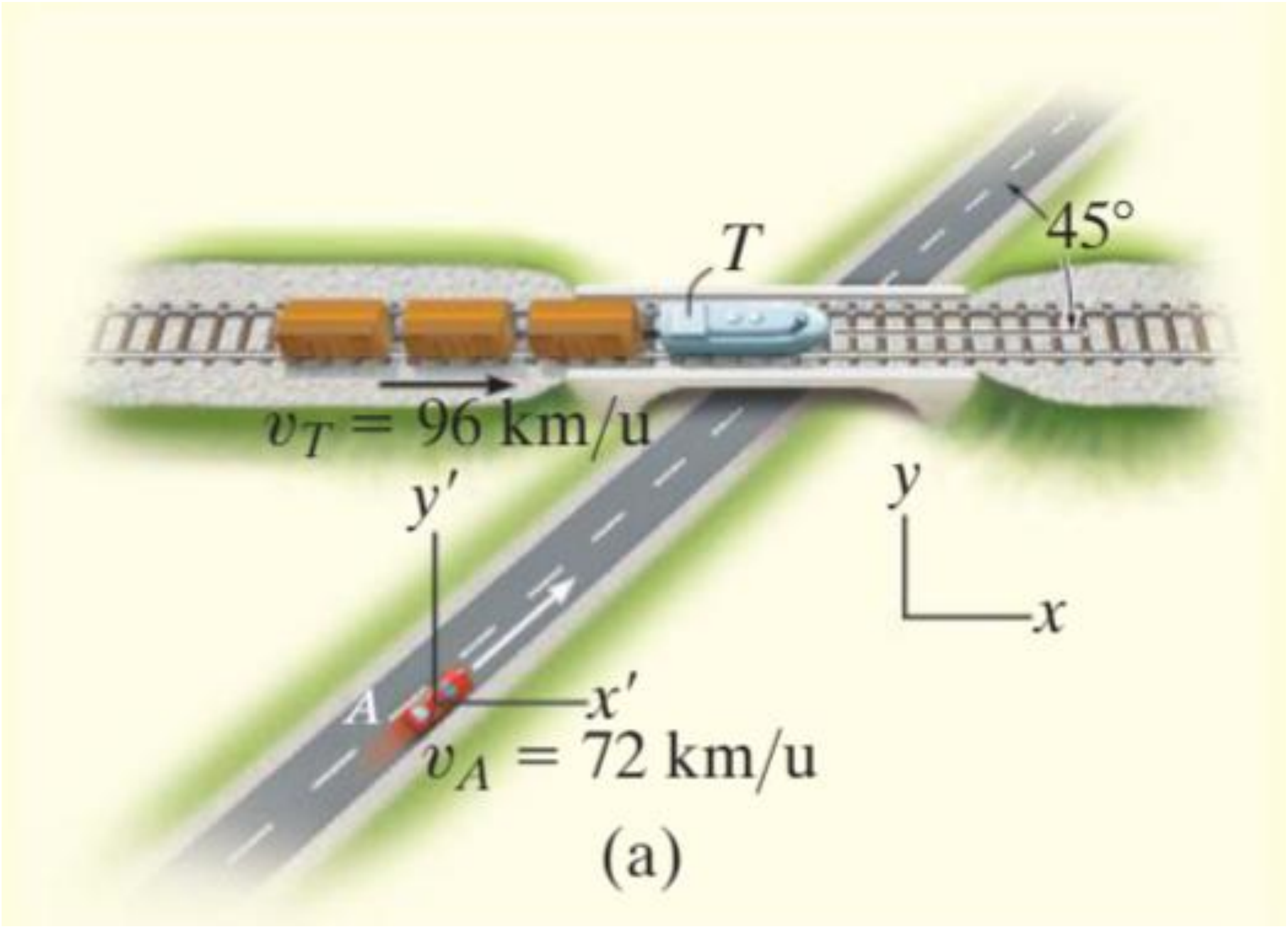
Relatieve beweging van twee puntmassa's via translerende assen

Analyseprocedure

- Bij toepassen van de relatieve plaatsvergelijkingen, is het noodzakelijk om de plaats en de translerende *x'*, *y'*- en *z'-as* te specificeren
- Omdat bij vectoroptelling een driehoek ontstaat, kunnen er hoogstens *twee onbekenden* zijn
- Onbekenden kunnen grafisch opgelost worden, met behulp van driehoeksmeetkunde, of ontbonden worden in rechthoekige of cartesische componenten

Voorbeeld 1.25

Een trein die met een constante snelheid van 96 km/u rijdt, steekt een weg over. Bepaal de grootte en de richting van de relatieve snelheid van de trein ten opzichte van auto *A*, als deze met een snelheid van 72 km/u over de weg rijdt.



UNIVERSITEIT GENT

Oefening

***1.224.** Een man wandelt met 5 km/u met de wind mee die een snelheid heeft van 20 km/u. Regendruppels vallen met een snelheid van 7 km/u als het *windstil* is. Bepaal de richting waarin de druppels lijken te vallen ten opzichte van de man.