Hoofdstuk 2:

Kinetica van een punt-massa: kracht en versnelling

UNIVERSITEIT GENT

Hoofdstukdoelen

- Kennismaken met de bewegings- en zwaartekrachtwetten van Newton en massa en gewicht van elkaar leren onderscheiden
- Versnelde beweging van een puntmassa analyseren met behulp van de bewegingsvergelijking

2.1 De tweede bewegingswet van Newton

Tweede wet van Newton

Een puntmassa waarop een resulterende kracht **F** werkt, ondervindt een versnelling **a** die dezelfde richting heeft als de kracht en een grootte die rechtevenredig is met de kracht.

Gravitatiewet van Newton

– Een wet die de wederzijdse aantrekkingskracht ten gevolge van de zwaartekracht beschrijft:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

UNIVERSITEIT GENT

G de gravitatieconstante = (6,67428 ± 0,00067) × 10^{-11} $\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}}$.

2.1 De tweede bewegingswet van Newton

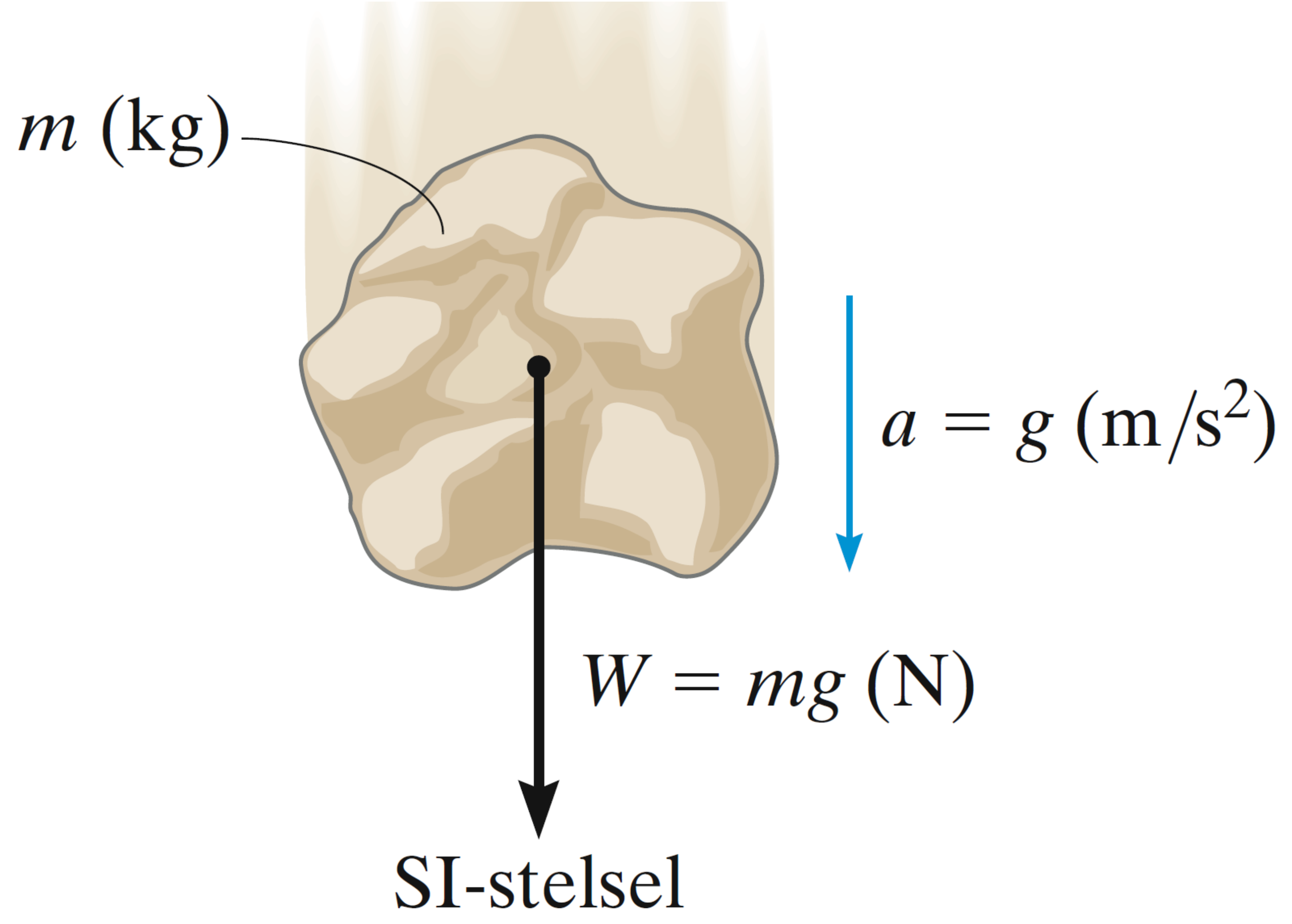
Gravitatiewet van Newton (vervolg)

- De *massa m* is een eigenschap van materie met de eenheid kilogram
- Het *gewicht W* van die materie (op aarde) wordt berekend met de formule $W = mg$, waarbij g de zwaartekrachts-coëfficiënt (op aarde) is. De eenheid van W is Newton.

m = massa (kg)

W = gewicht (N)

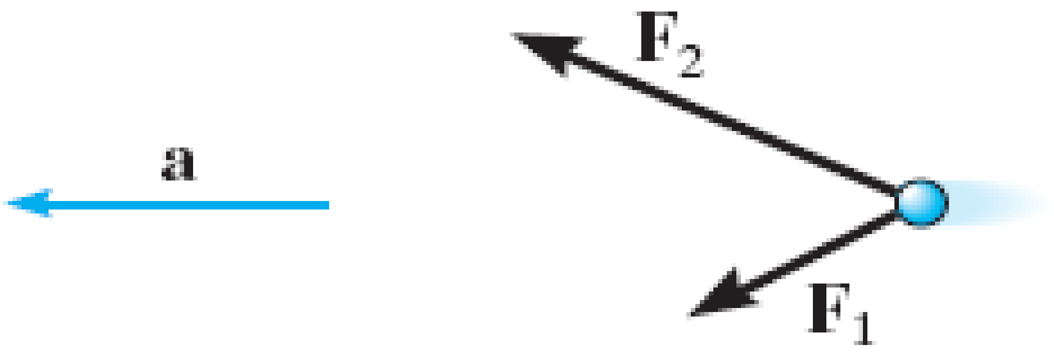
(g = 9,81 m/s^2)

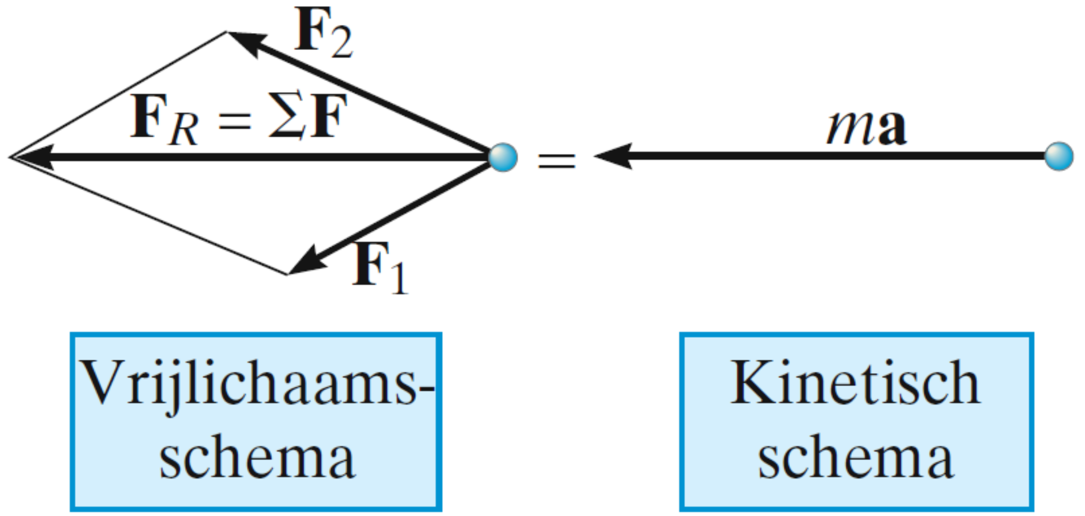


2.2 De bewegingsvergelijking

- De bewegingsvergelijking wordt geschreven als: $\boxed{\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}}$

- Beschouw *P* met massa *m* waarop twee krachten, F_1 en F_2 werken
- Uit het *vrijlichaamsschema* volgt dat de *resultante* van deze krachten de vector $m\mathbf{a}$ oplevert
- Grafisch weergegeven in het *kinetisch schema*
- $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$; versnelling is nul
- Deze toestand wordt een *statisch evenwicht* genoemd; de eerste bewegingswet van Newton

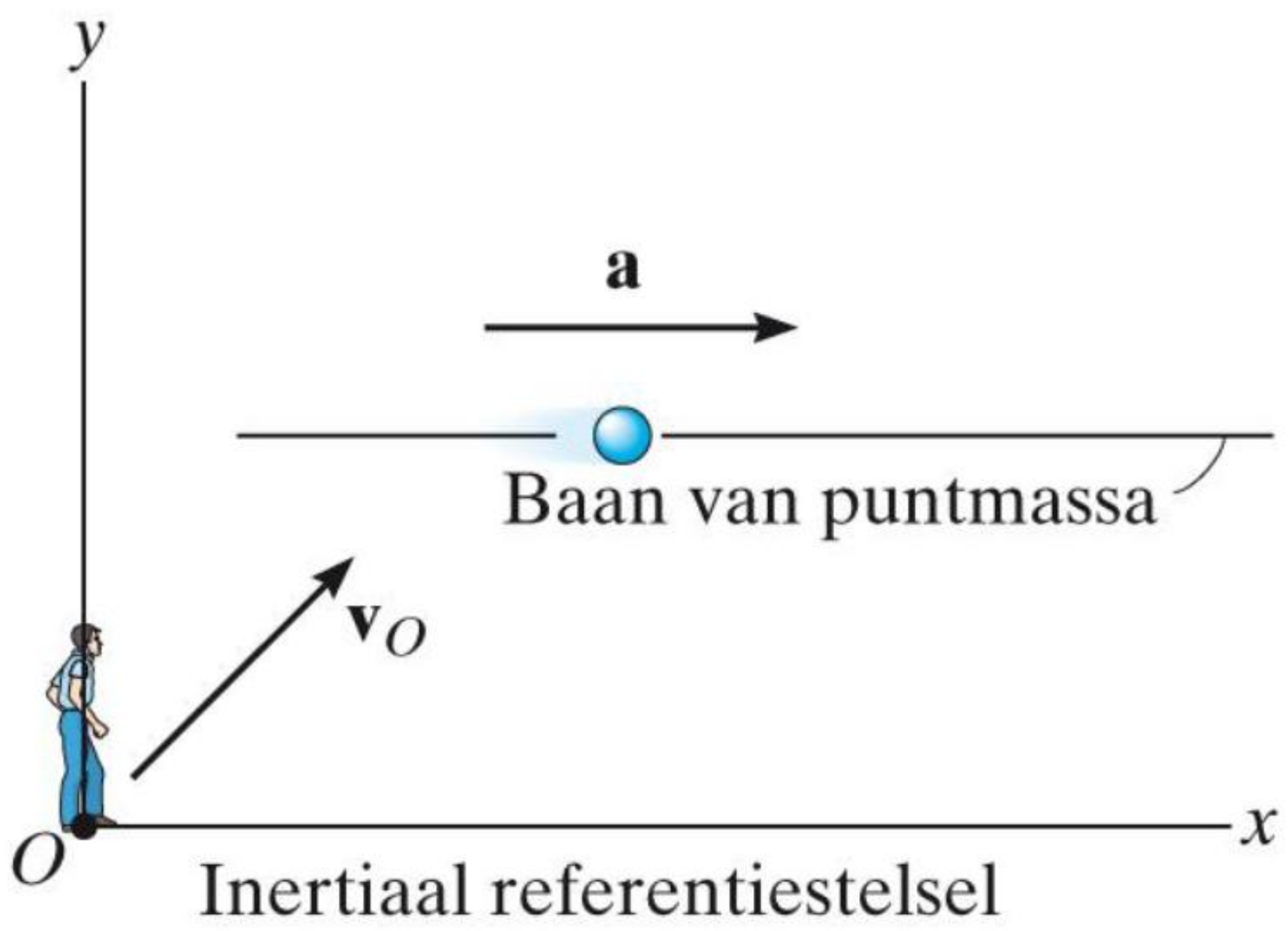




2.2 De bewegingsvergelijking

Inertiaal referentiestelsel

- De versnelling van de puntmassa wordt gemeten ten opzichte van een referentiestelsel dat ofwel *onbeweeglijk* is ofwel *verschuift met een constante snelheid*
- Een dergelijk referentiestelsel wordt meestal een *Newtoniaans* of *inertiaal referentiestelsel* genoemd

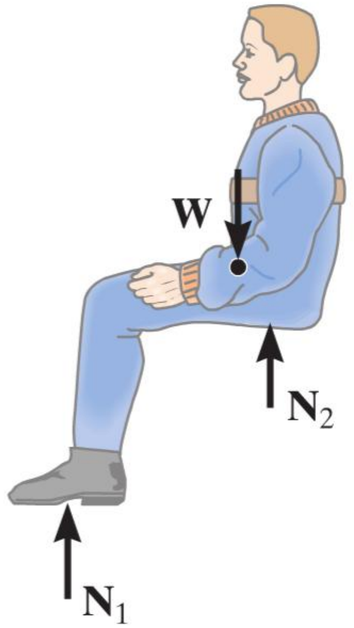


UNIVERSITEIT GENT

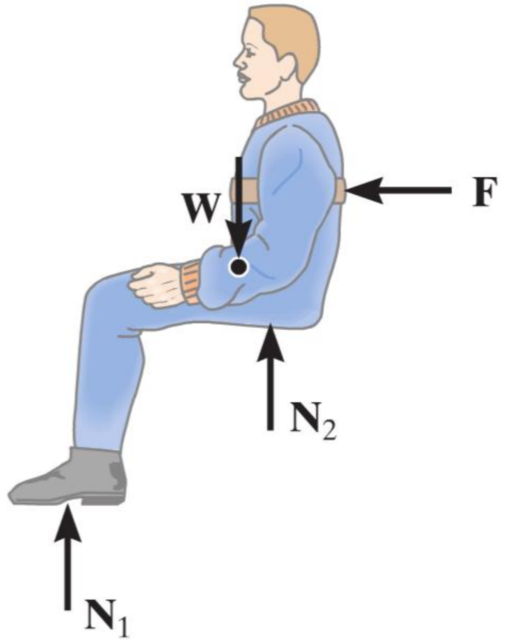
2.2 De bewegingsvergelijking

Inertiaal referentiestelsel (vervolg)

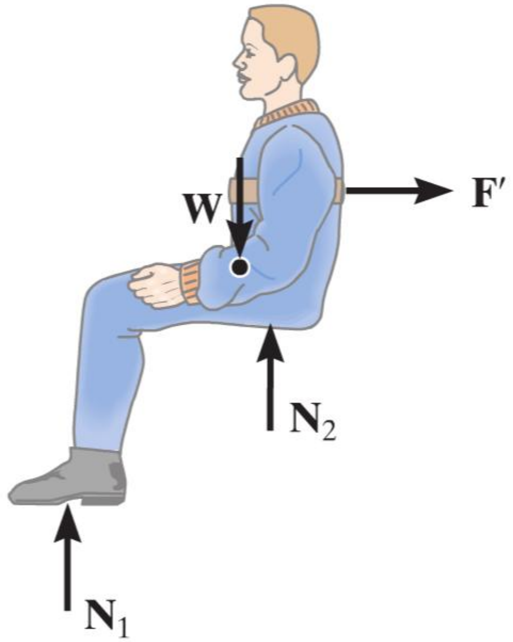
– Bekijk de passagier die vastgegespt zit in een door een raket aangedreven slede



In rust of bij constante snelheid



Versnelling



Vertraging

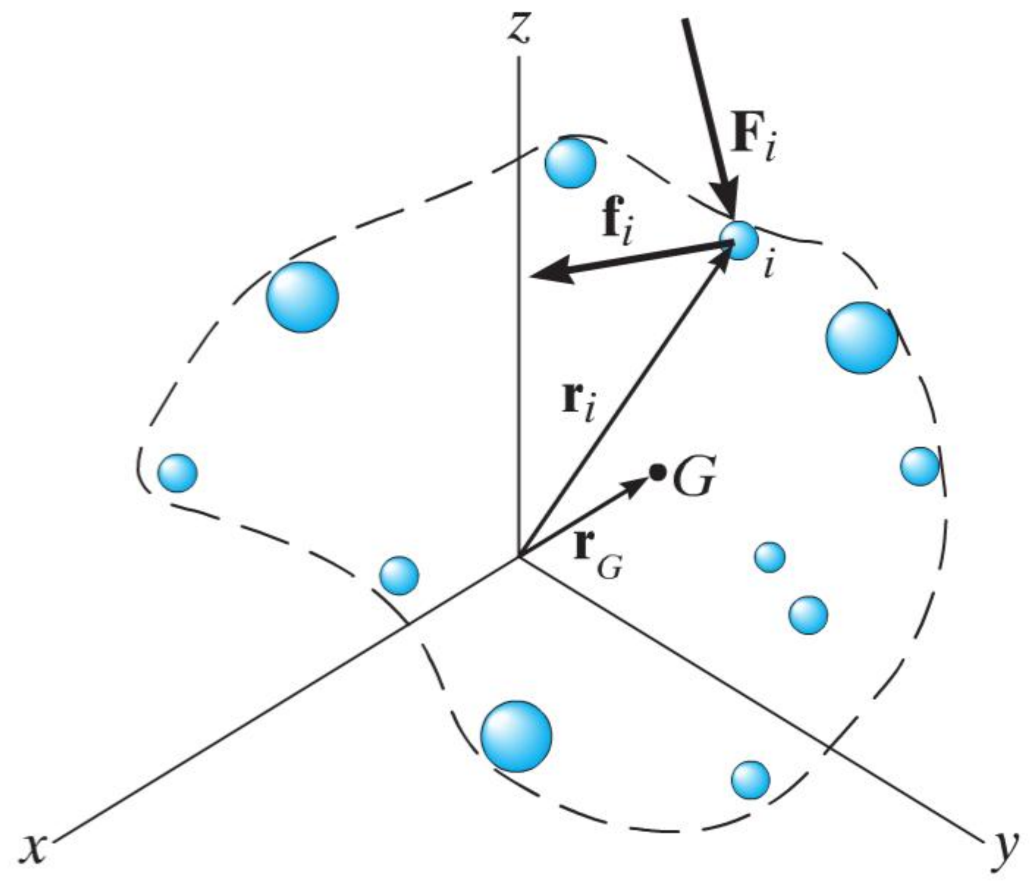
2.3 Bewegingsvergelijking voor een stelsel van puntmassa's

– Het vrijlichaamsschema voor de *i*-de puntmassa is weergegeven. Toepassen van de bewegingsvergelijking levert:

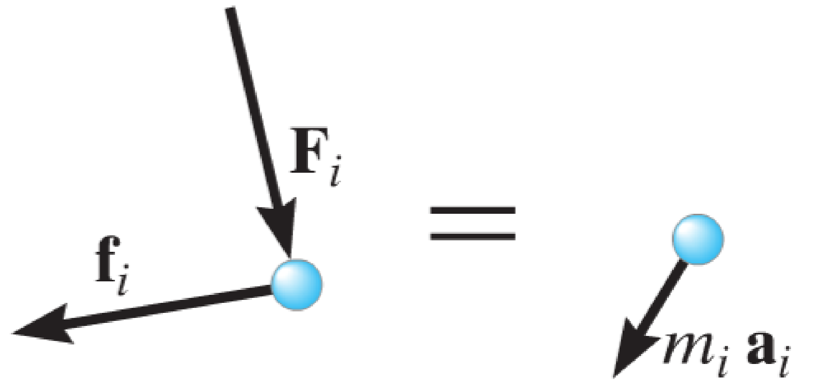
$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i\mathbf{a}_i$$

– Als de bewegingsvergelijking wordt toegepast op alle andere puntmassa's, kunnen deze vergelijkingen vectorieel opgeteld worden:

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma\, \mathbf{f}_i = \Sigma m_i\mathbf{a}_i$$



Inertiaal coördinatenstelsel



Vrijlichaams-schema

Kinetisch schema

UNIVERSITEIT GENT

2.3 Bewegingsvergelijking voor een stelsel van puntmassa's

– De som van de inwendige krachten zal nul zijn, waarbij geldt dat:

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

– Als $\mathbf{r_G}$ een plaatsvector is met zijn aangrijpingspunt in het *massamiddelpunt* *G* van de puntmassa's, levert dit:

$$m\boldsymbol{r}_G = \Sigma m_i \boldsymbol{r}_i$$

– Tweemaal differentiëren naar de tijd levert:

$$m a_G = \Sigma m_i \boldsymbol{a}_i$$

2.3 Bewegingsvergelijking voor een stelsel van puntmassa's

- Daarom geldt $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$
- De som van de uitwendige krachten die op het stelsel van puntmassa's worden uitgeoefend, is gelijk aan de totale massa van de puntmassa's maal de versnelling van het massamiddelpunt *G*

2.4 Bewegingsvergelijkingen: coördinaten in een rechthoekig assenstelsel

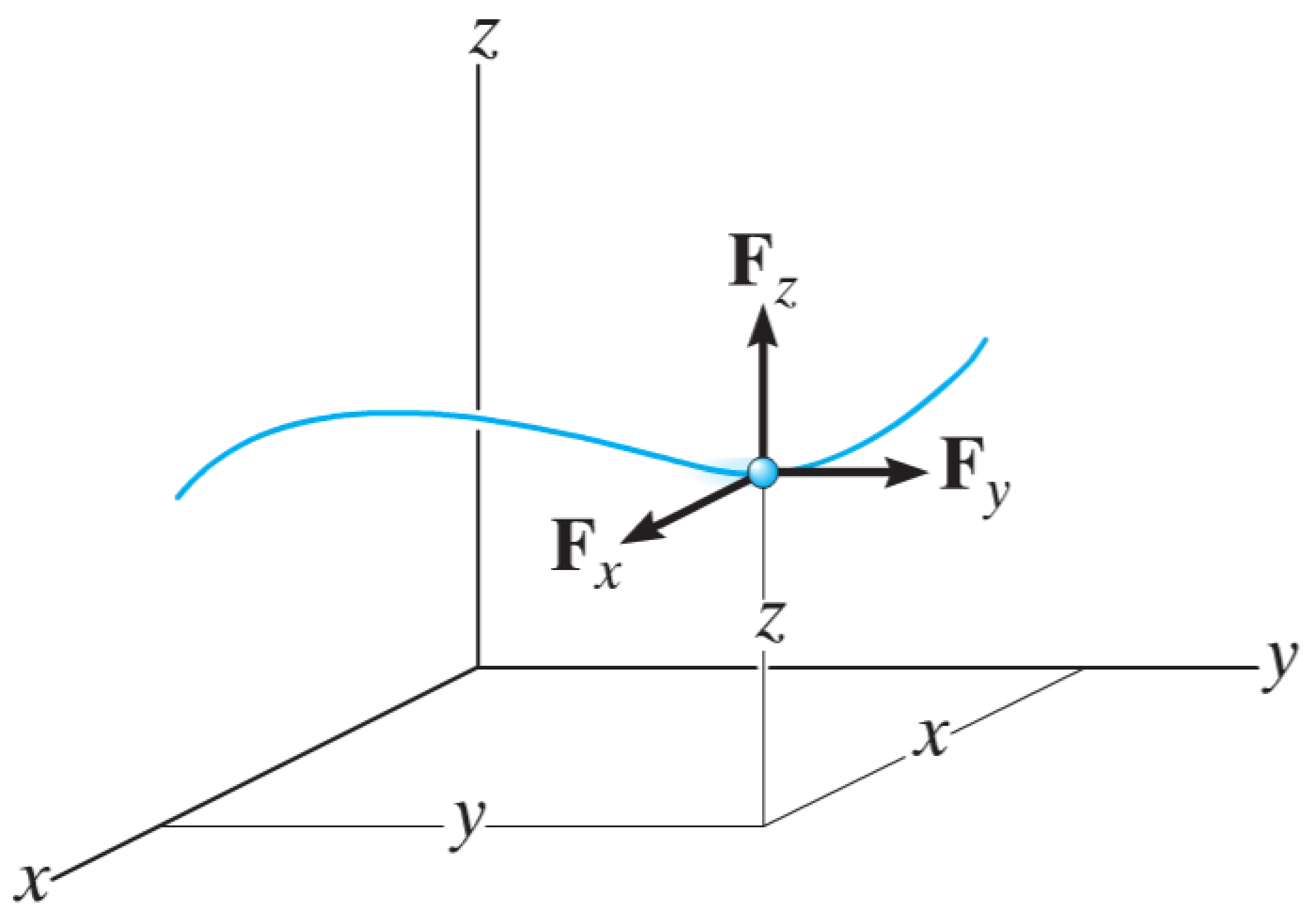
– Wanneer een puntmassa beweegt ten opzichte van een inertiaal *xyz*-referentiestelsel, geldt:

$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$\Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$

– De drie scalaire vergelijkingen zijn:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$



2.4 Bewegingsvergelijkingen: coördinaten in een rechthoekig assenstelsel

Analyseprocedure

Vrijlichaamsschema

- Kies het inertiale coördinatenstelsel
- Teken het vrijlichaamsschema voor de puntmassa en alle krachten die erop werken ($\Sigma \mathbf{F}$)
- Kies ook de richting en zin van de versnelling **a** die de puntmassa ondergaat
- Teken de versnelling als de $m\mathbf{a}$-vector in het kinetisch schema
- Bepaal de onbekenden van het vraagstuk

UNIVERSITEIT GENT

2.4 Bewegingsvergelijkingen: coördinaten in een rechthoekig assenstelsel

Analyseprocedure (vervolg)

Bewegingsvergelijkingen

- Pas de bewegingsvergelijkingen in hun scalaire componentvorm toe op het vrijlichaamsschema
- Bepaal de oplossing met behulp van cartesiaanse vectoranalyse

Kinematica

- Pas kinematische vergelijkingen toe zodra de versnelling van de puntmassa bepaald is met behulp van $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$
- Als de versnelling een functie is van de tijd, kunnen $a = dv/dt$ en $v = ds/dt$ worden gebruikt

2.4 Bewegingsvergelijkingen: coördinaten in een rechthoekig assenstelsel

Analyseprocedure (vervolg)

Kinematica

- Wanneer de versnelling een functie van de verplaatsing is, integreer dan *a ds* = *v dv* om de snelheid te verkrijgen als functie van de plaats
- Als de versnelling constant is, kunnen de volgende vergelijkingen gebruikt worden:

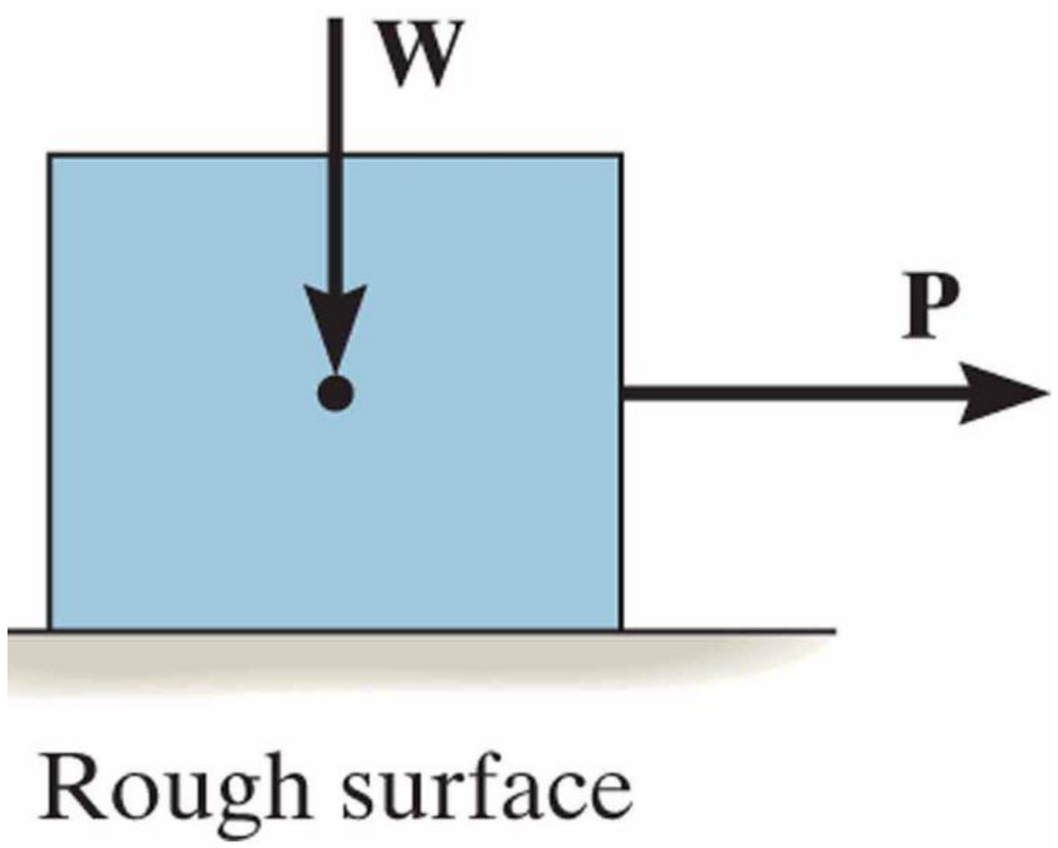
$$v = v_0 + a_c t$$

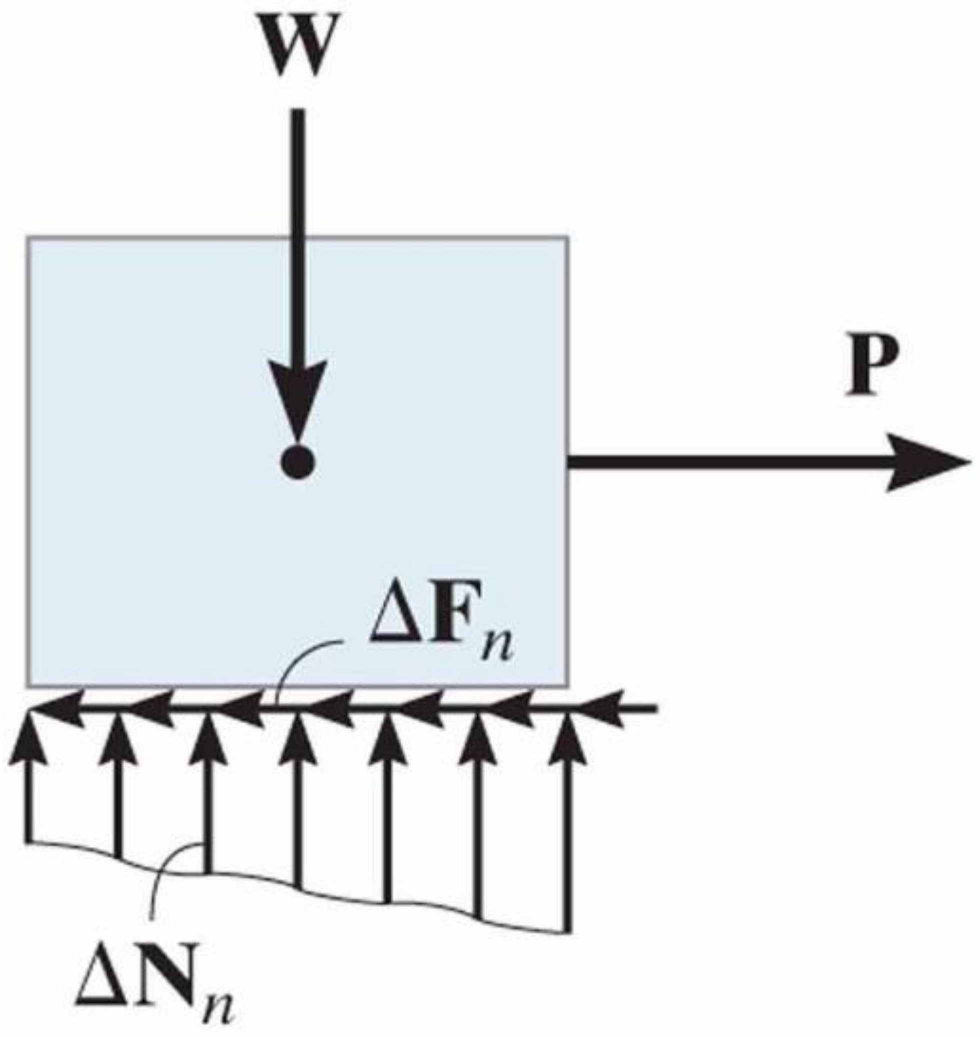
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$$

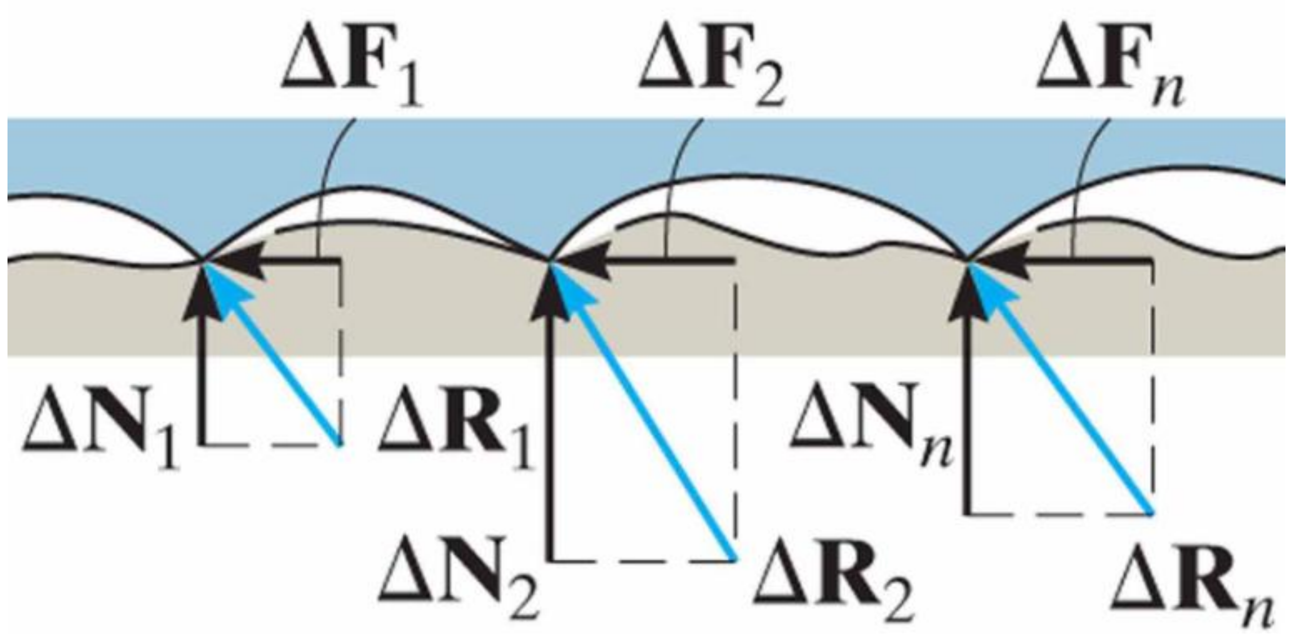
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

Eigenschappen van droge wrijving (*)

- Wrijving is het gevolg van de ruwheid van het contactoppervlak
  - Viskeuze wrijving
  - Droge wrijving

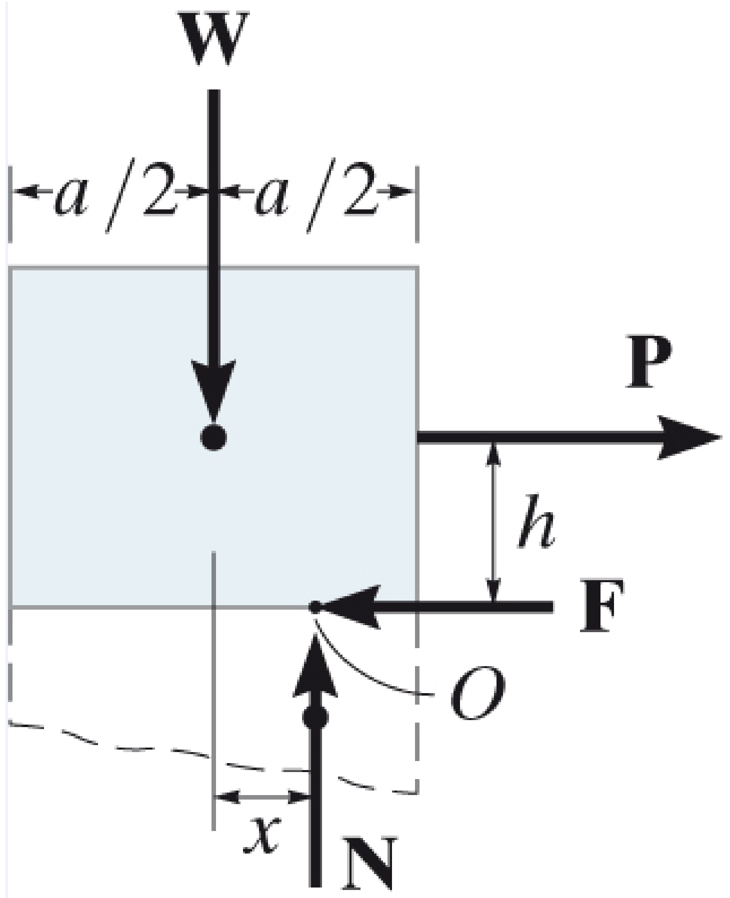




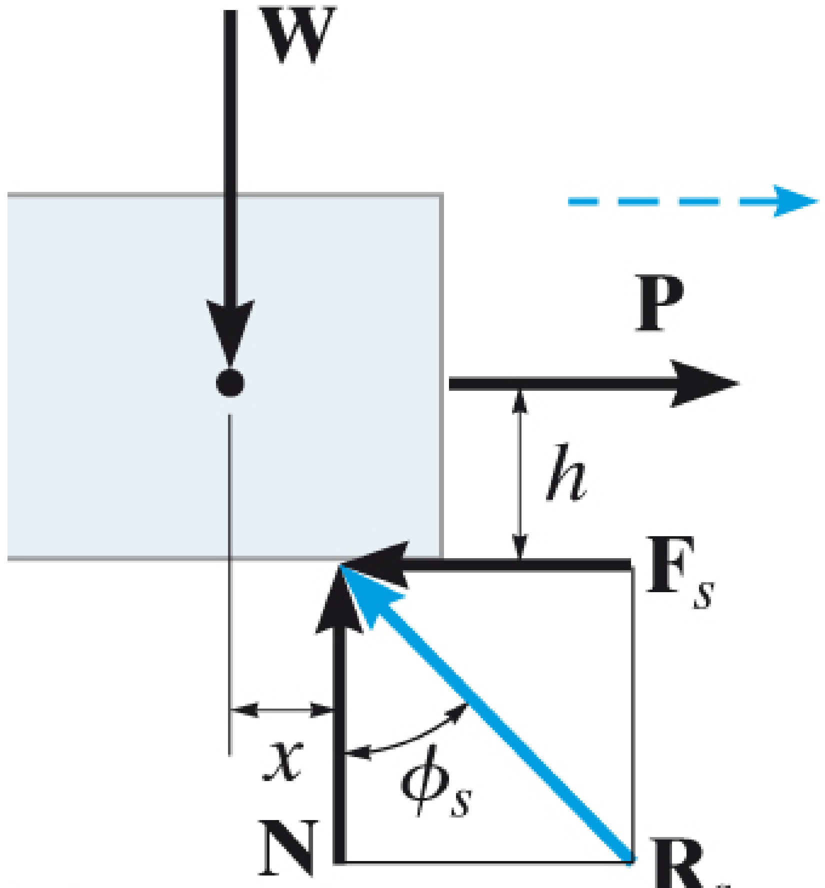


UNIVERSITEIT GENT

Eigenschappen van droge wrijving (*)



Resulterende normaal- en wrijvingskrachten



Evenwicht

$$x = \frac{Ph}{W}$$ momentenevenwicht

$$F_s = \mu_s N$$

x > *a*/2 kantelen

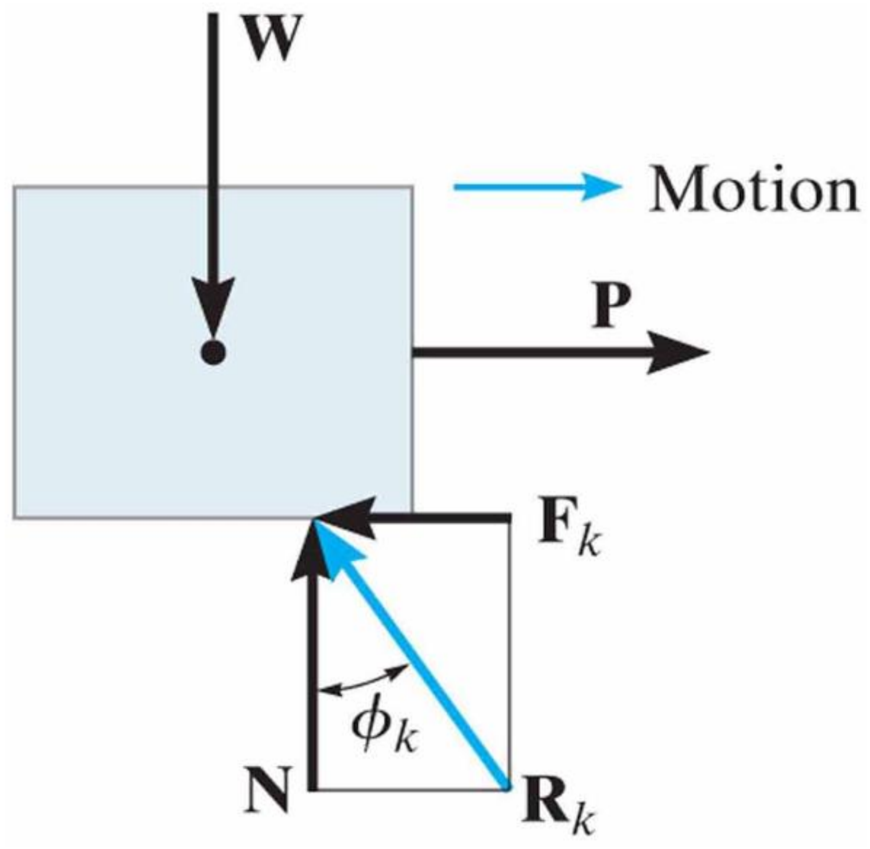
$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{F_s}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1}\mu_s$$

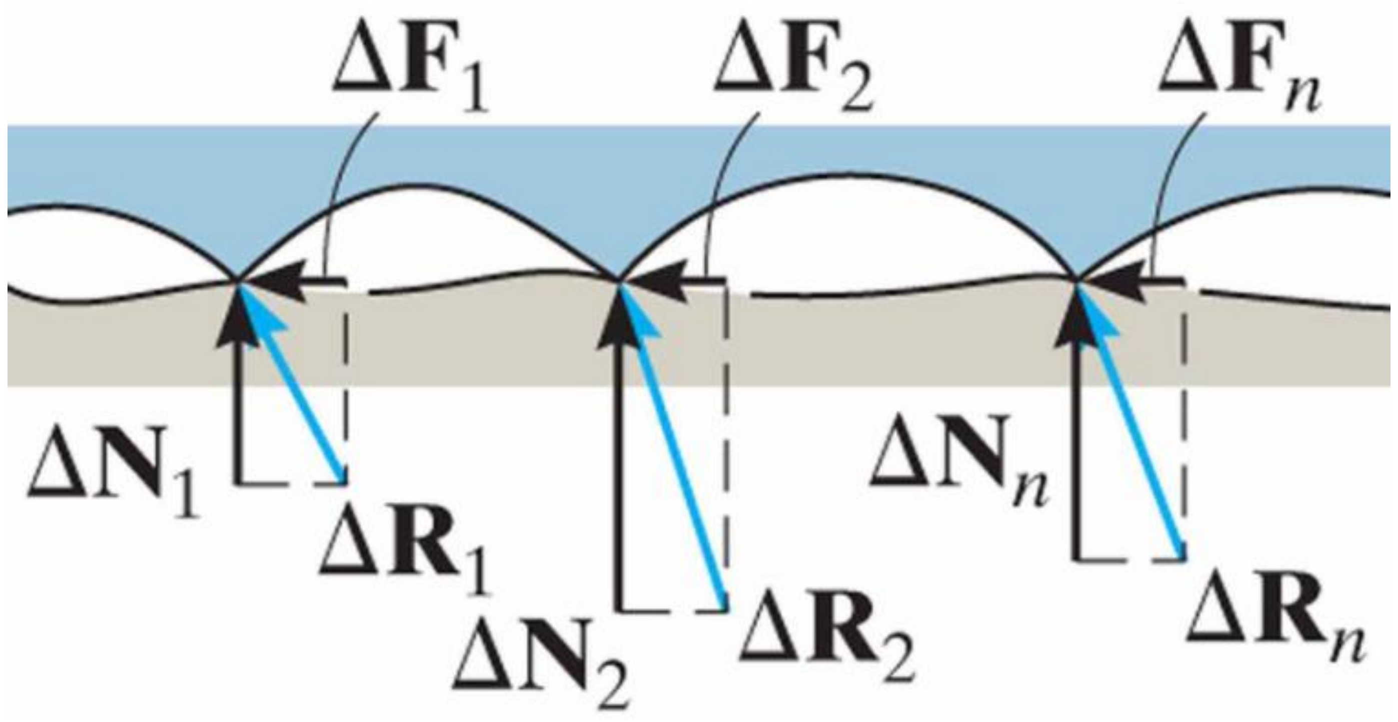
Eigenschappen van droge wrijving (*)

TABEL 8–1
Gemiddelde waarden van μ_s

Contactmaterialen	Statische wrijvingscoëfficiënt (μ_s)
Metaal op ijs	0,03–0,05
Hout op hout	0,30–0,70
Leer op hout	0,20–0,50
Leer op metaal	0,30–0,60
Aluminum op aluminum	1,10–1,70

Eigenschappen van droge wrijving (*)

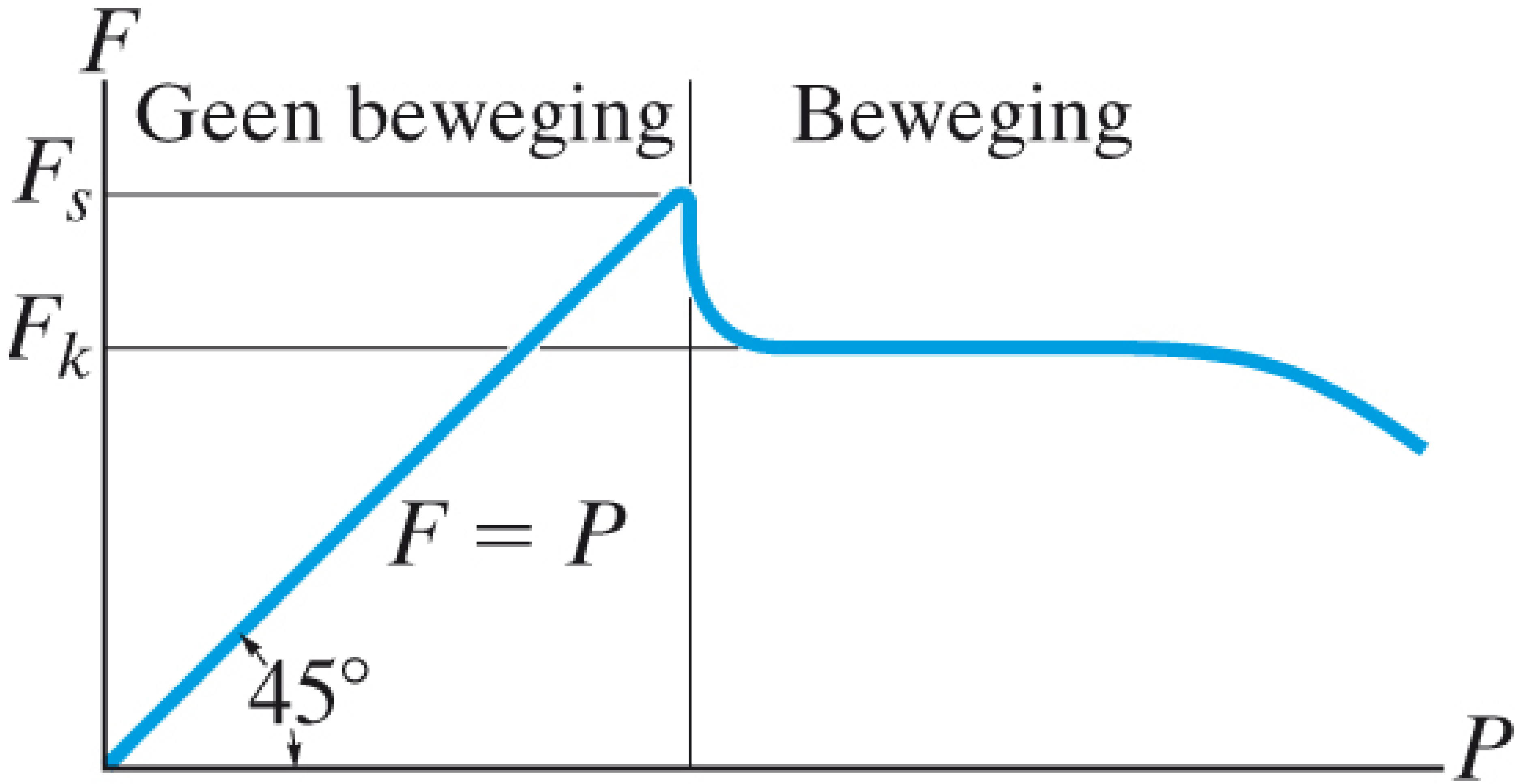




$$\phi_k = \tan^{-1}\left(\frac{F_k}{N}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\mu_k N}{N}\right)$$

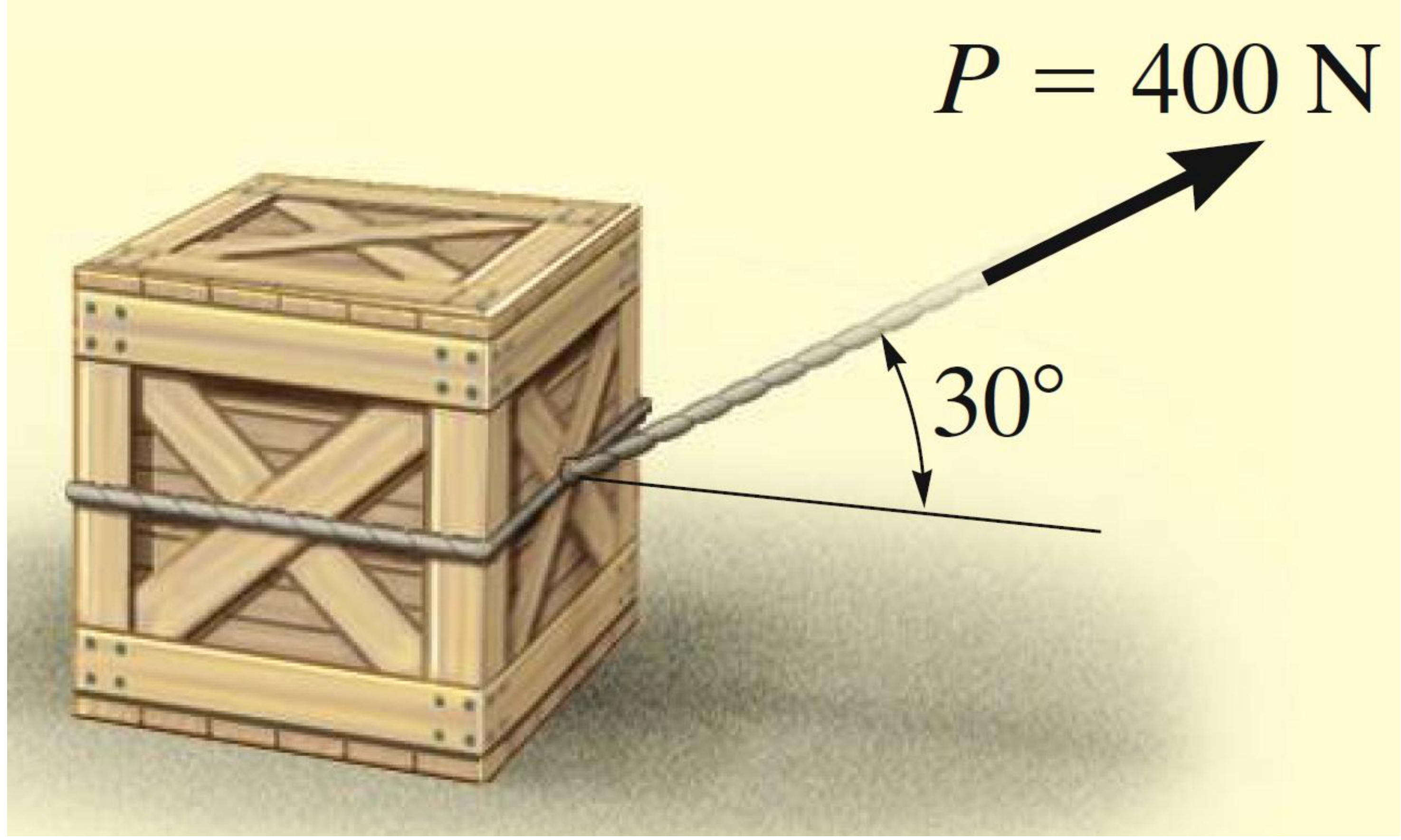
$$= \tan^{-1}\mu_k$$



UNIVERSITEIT GENT

Voorbeeld 2.1

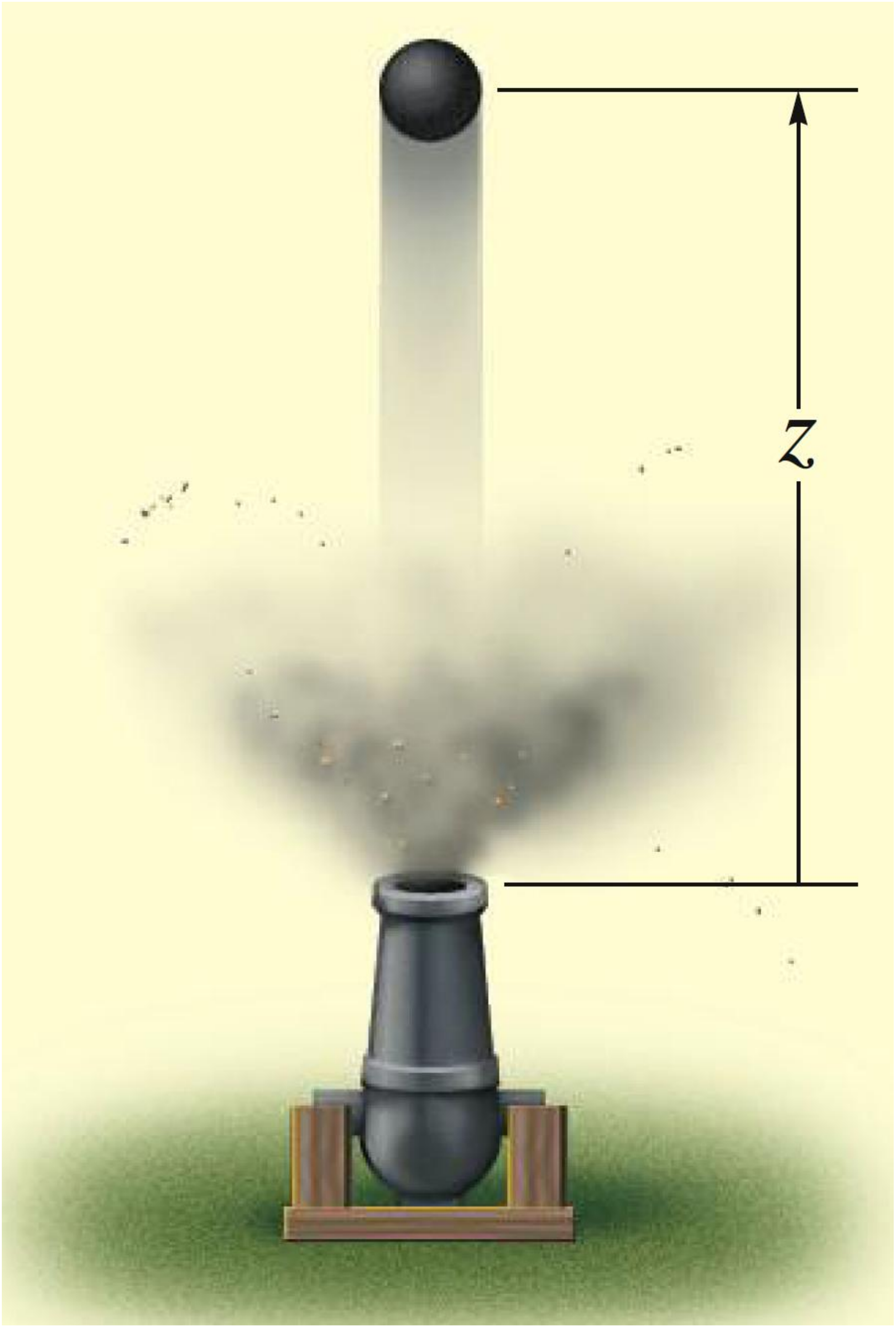
De kist van 50 kg staat op een horizontaal vlak waarvan de kinetische wrijvingscoëfficiënt $\mu_k = 0{,}3$ is. Bepaal de snelheid van de kist 3 s nadat deze vanuit stilstand is gaan bewegen, als de kist niet kantelt wanneer deze een trekkracht van 400 N ondergaat.



UNIVERSITEIT GENT

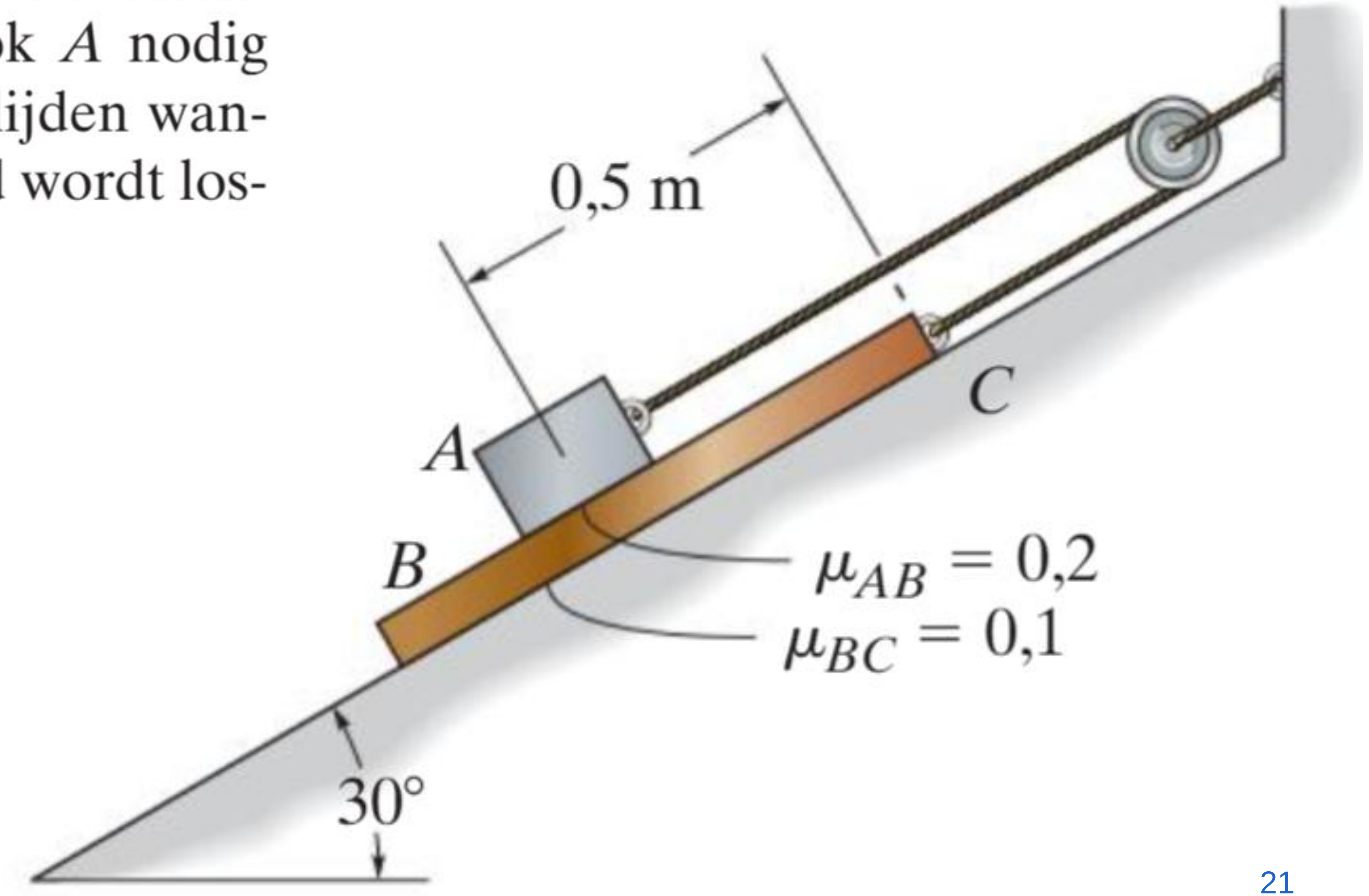
Voorbeeld 2.2

Een kogel van 10 kg wordt met een beginsnelheid van 50 m/s vanaf de grond verticaal naar boven afgevuurd. Bepaal de maximale hoogte die de kogel zal bereiken als (*a*) de luchtweerstand wordt verwaarloosd; en (*b*) als de luchtweerstand in rekening wordt gebracht door F_D = $(0{,}01\ v^2)$ N, waarbij v de snelheid is op elk willekeurig ogenblik, uitgedrukt in m/s.



Oefening

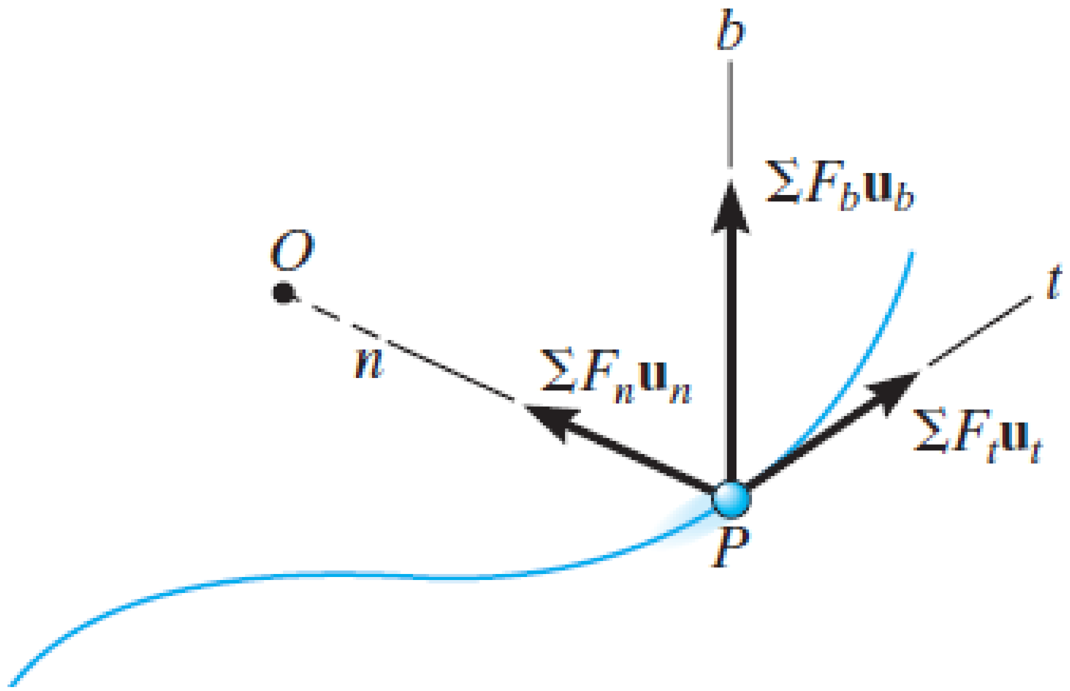
2.26. Blok *A* van 20 kg rust op plaat *B* van 60 kg in de weergegeven positie. Verwaarloos de massa van het touw en de katrol, en gebruik de aangegeven coëfficiënten van kinetische wrijving. Bepaal de tijd die blok *A* nodig heeft om 0,5 m *op de plaat* te glijden wanneer het systeem vanuit stilstand wordt losgelaten.



2.5 Bewegingsvergelijkingen: normale en tangentiële coördinaten

- De bewegingsvergelijking voor de puntmassa kan geschreven worden in:
  - een tangentiële component (in de richting van de beweging, dus in de richting van de raaklijn aan de blauwe lijn)
  - een normale component (loodrecht op de bewegingsrichting, maar wel in het vlak van de beweging; de blauwe lijn ligt in een vlak)
  - een binormale component (loodrecht op het vlak van de beweging)
- Aangezien de puntmassa in het vlak van de baan blijft, is de versnelling in de binormale richting nul, dus is ook de component van de kracht in die richting nul

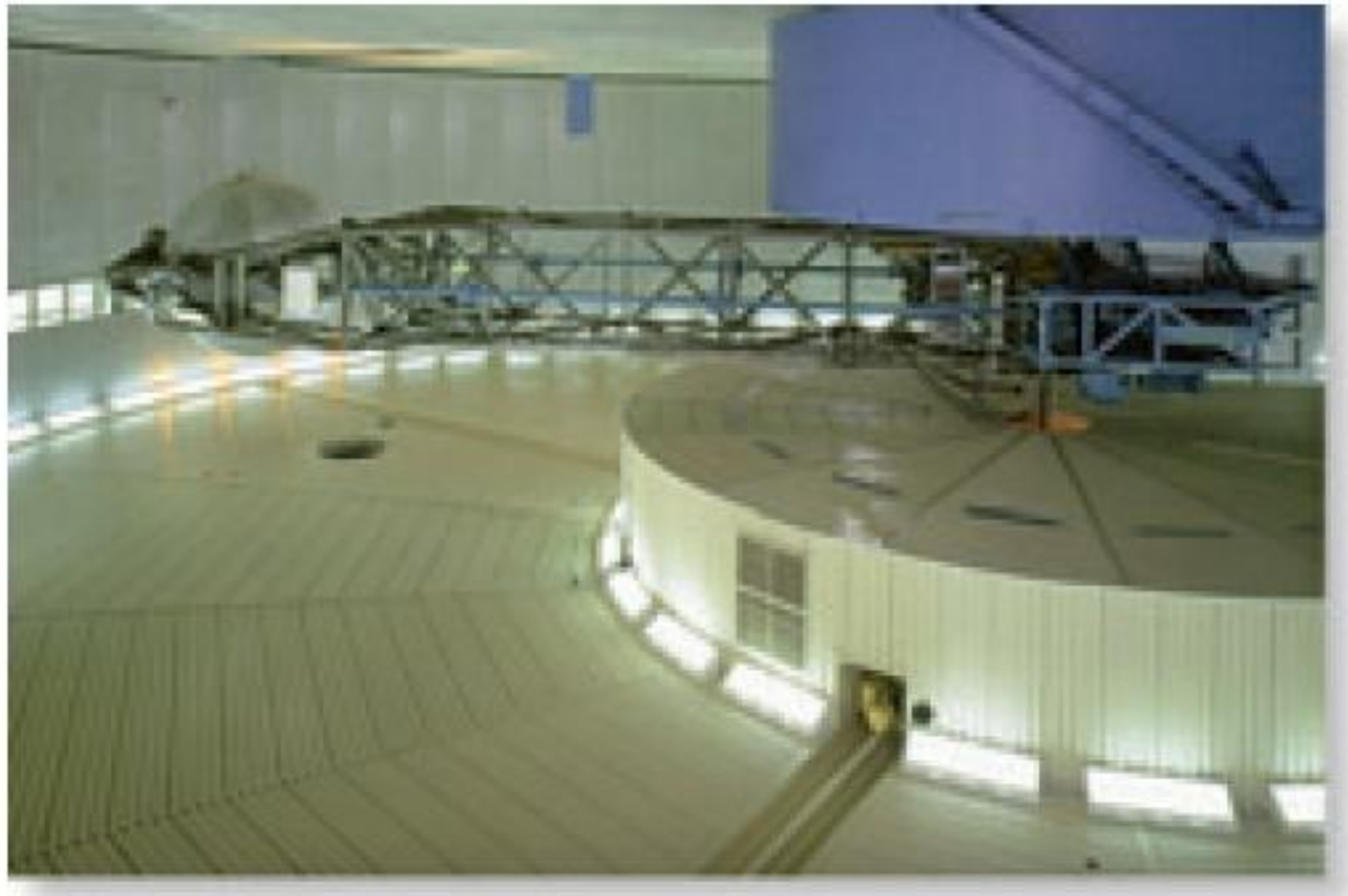
$$\sum F_t = ma_t$$
$$\sum F_n = ma_n$$
$$\sum F_b = 0$$



UNIVERSITEIT GENT

2.5 Bewegingsvergelijkingen: normale en tangentiële coördinaten

- a_t (= dv/dt) stelt de afgeleide naar de tijd voor van de grootte van de snelheid
- a_n (= v^2/ρ) stelt de afgeleide naar de tijd voor van de richting van de snelheid



UNIVERSITEIT GENT

2.5 Bewegingsvergelijkingen: normale en tangentiële coördinaten

Analyseprocedure

Vrijlichaamsschema

- Neem het vaste *t*-*n*-*b*-coördinatenstelsel in de puntmassa en teken het vrijlichaamsschema van de puntmassa
- De normaalversnelling $\mathbf{a}_n$ van de puntmassa werkt *altijd* in de positieve *n*-richting
- Veronderstel dat de tangentiële versnelling $\mathbf{a}_t$ in de positieve *t*-richting optreedt
- Bepaal de onbekenden van het vraagstuk

2.5 Bewegingsvergelijkingen: normale en tangentiële coördinaten

Analyseprocedure

Bewegingsvergelijking

– Toepassen van de bewegingsvergelijkingen levert:

$$\sum F_t = ma_t \quad , \quad \sum F_n = ma_n \quad , \quad \sum F_b = 0$$

Kinematica

– Formuleer $a_t = dv/dt$ of $a_t = v\,dv/ds$ en $a_n = v^2/\rho$

– Bereken, als de baan wordt gedefinieerd als $y = f(x)$,

$$\rho = \frac{\left[1+\left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}$$

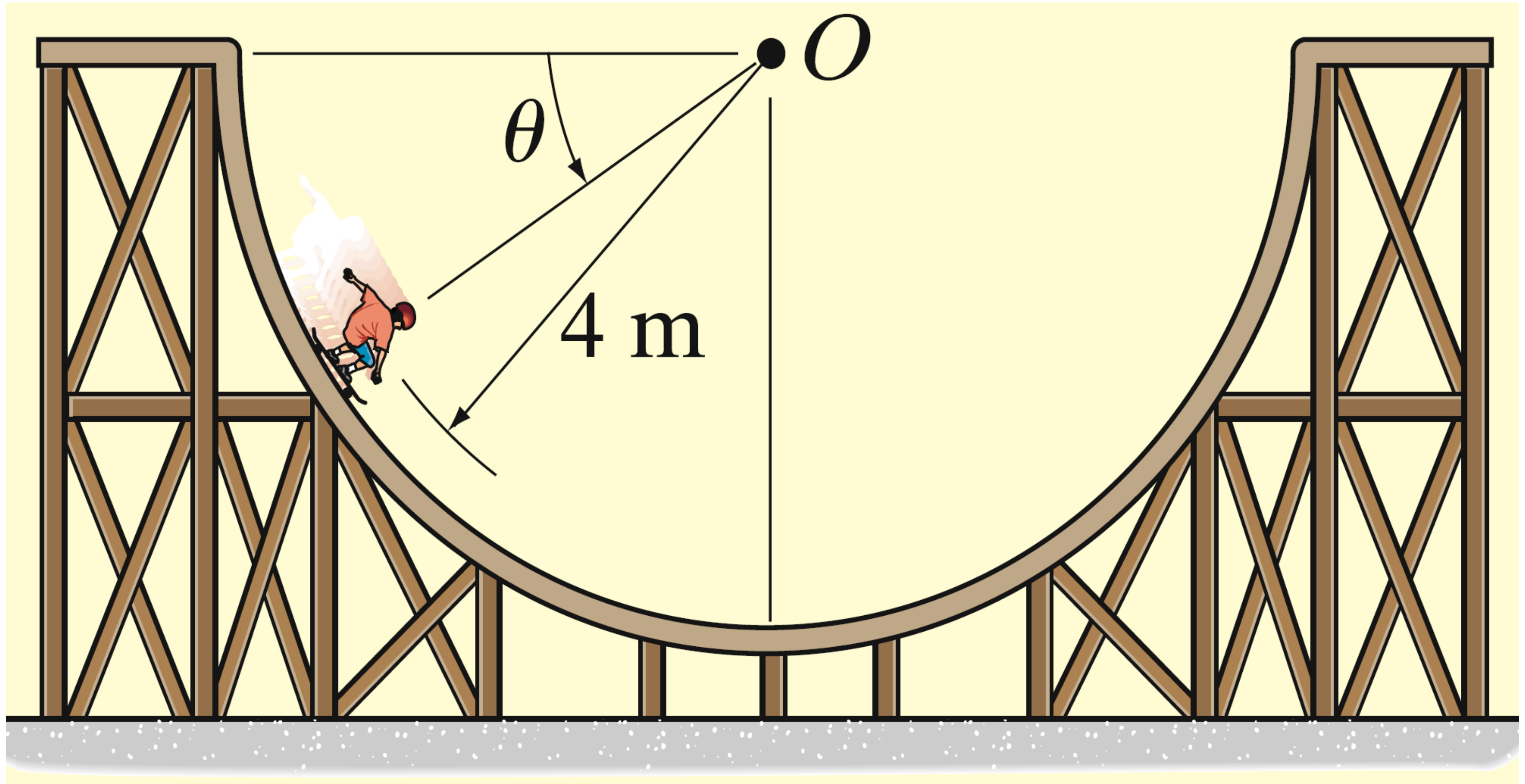
Voorbeeld 2.6

Bepaal de hellingshoek θ van de cirkelvormige baan, zodanig dat de banden van de sportwagens zonder afhankelijk te zijn van wrijving in deze baan niet naar boven of naar beneden glijden. Veronderstel dat de auto's een verwaarloosbare massa m hebben en met een snelheid v over de baan met een straal ρ rijden.

UNIVERSITEIT GENT

Voorbeeld 2.9

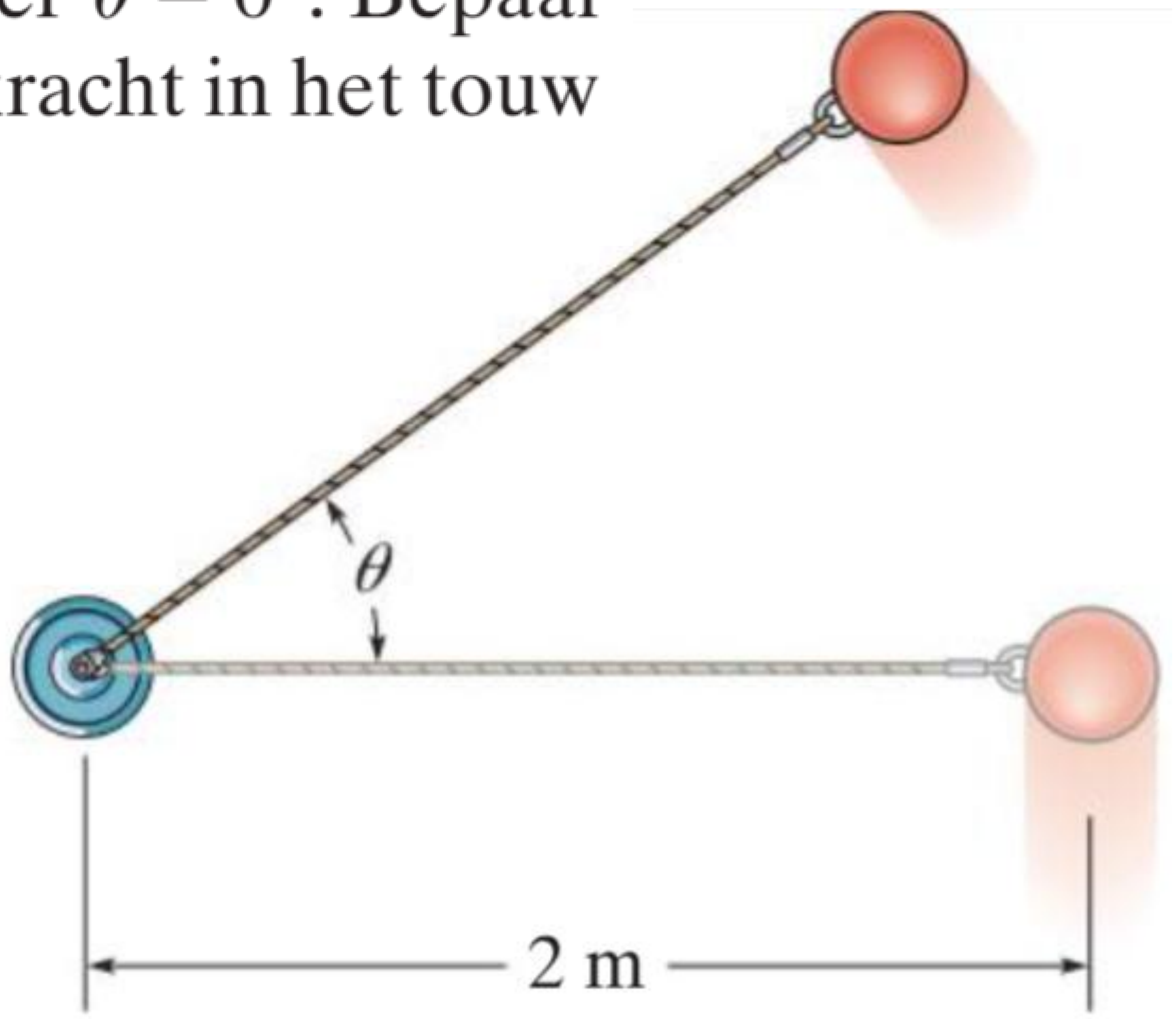
De skateboarder in fig. 2.15*a* heeft een massa van 60 kg en rijdt omlaag over de cirkelvormige baan. Hij begint vanuit stilstand als θ = 0°. Bepaal de grootte van de normale reactie die de baan op hem uitoefent als θ = 60°. Verwaarloos zijn afmetingen bij de berekening.



UNIVERSITEIT GENT

Oefening

2.82. Het gewicht met een massa van 2 kg beweegt zich in het verticale vlak met een snelheid van 6 m/s wanneer $\theta = 0°$. Bepaal de hoek θ waarbij de trekkracht in het touw nul wordt.



UNIVERSITEIT GENT