

Hoofdstuk 3:

Kinetica van een puntmassa: arbeid en energie

Hoofdstukdoelen

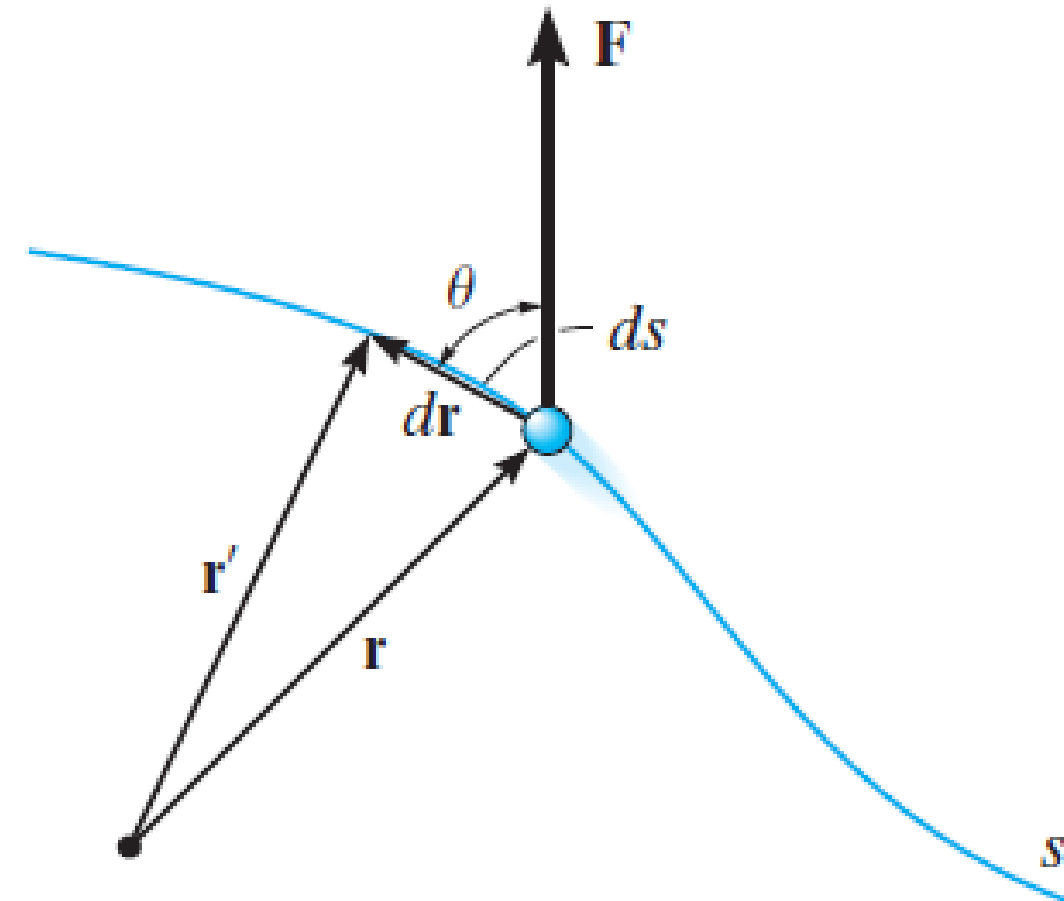
- Het principe van arbeid en energie afleiden en toepassen in vraagstukken waarin kracht, snelheid en verplaatsing een rol spelen
- Vraagstukken bestuderen waarin vermogen en rendement een rol spelen
- Het concept conservatieve kracht en de wet van behoud van energie toepassen om bewegingsvraagstukken op te lossen?

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

- Een kracht $\mathbf{F}$ verricht arbeid op een puntmassa wanneer deze een *verplaatsing in de richting van de kracht ondervindt*
- De verplaatsing is $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$
- De hoek tussen de staarten van $d\mathbf{r}$ en $\mathbf{F}$ is θ en de arbeid dU die verricht is door $\mathbf{F}$ is een scalaire grootheid

$$dU = F ds \cos \theta$$

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

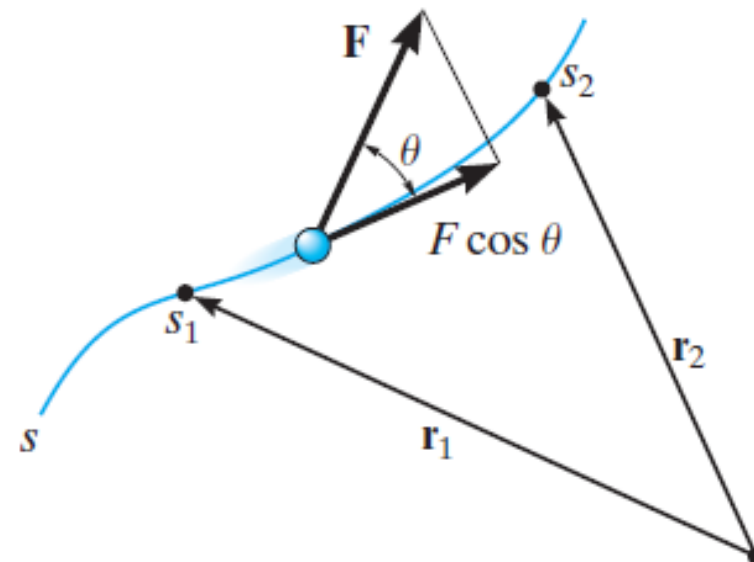


3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

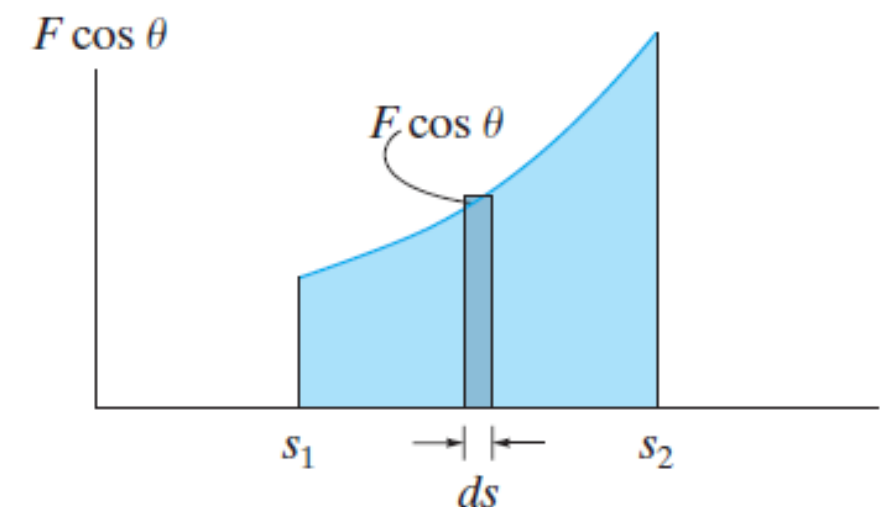
Arbeid ten gevolge van een veranderlijke kracht

- Wanneer een puntmassa een eindige verplaatsing langs de eigen baan ondergaat van $\mathbf{R}_1$ naar $\mathbf{R}_2$ of s_1 naar s_2 , kan de arbeid door middel van integratie bepaald worden
- Als $\mathbf{F}$ uitgedrukt wordt als functie van de plaats, dan $F = F(s)$, en geldt er:

$$U_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \theta ds$$



(a)



(b)

3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

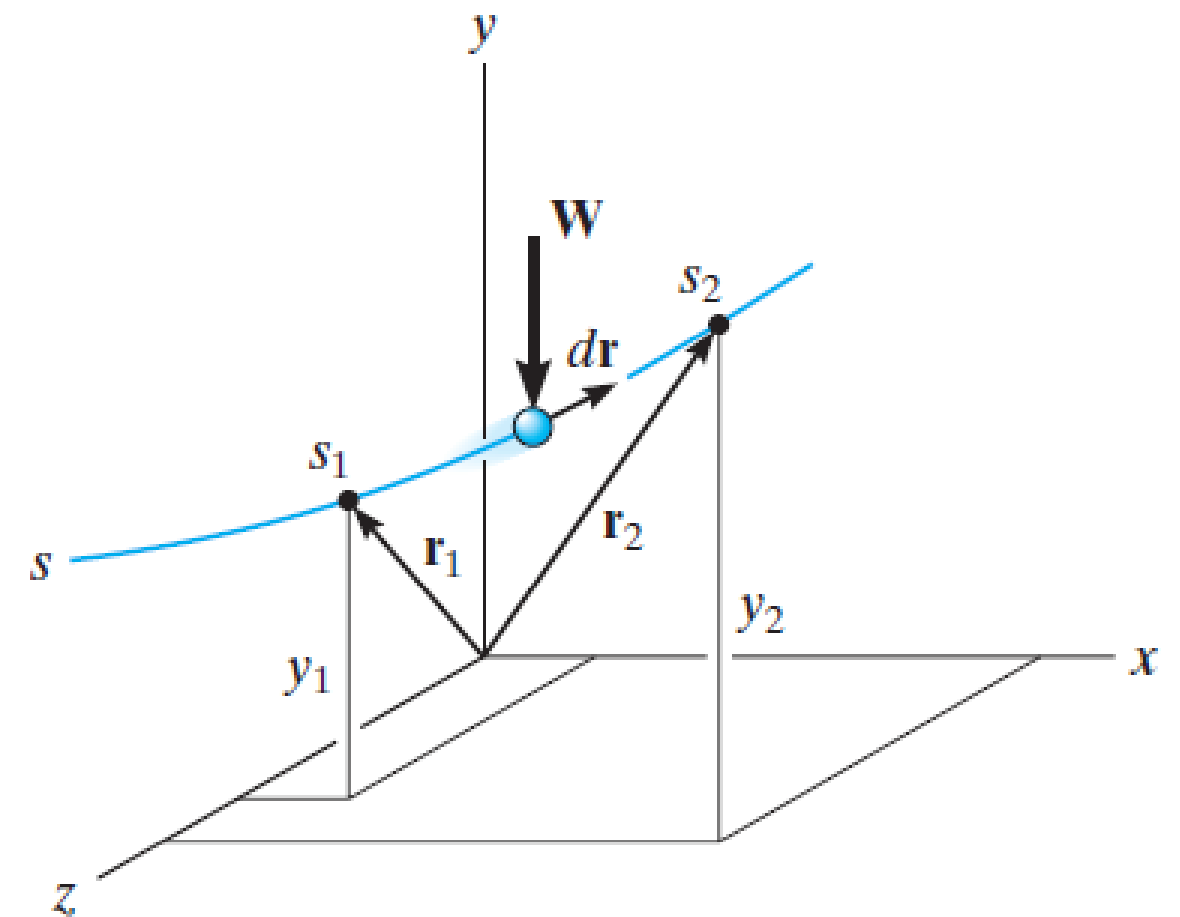
Arbeid ten gevolge van een gewicht

- Veronderstel een puntmassa die een baan aflegt van plaats s_1 naar plaats s_2
- Op een tussenliggend punt is de verplaatsing $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$
- Omdat $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$, geldt:

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -W(y_2 - y_1)$$

$$U_{1-2} = -W\Delta y$$

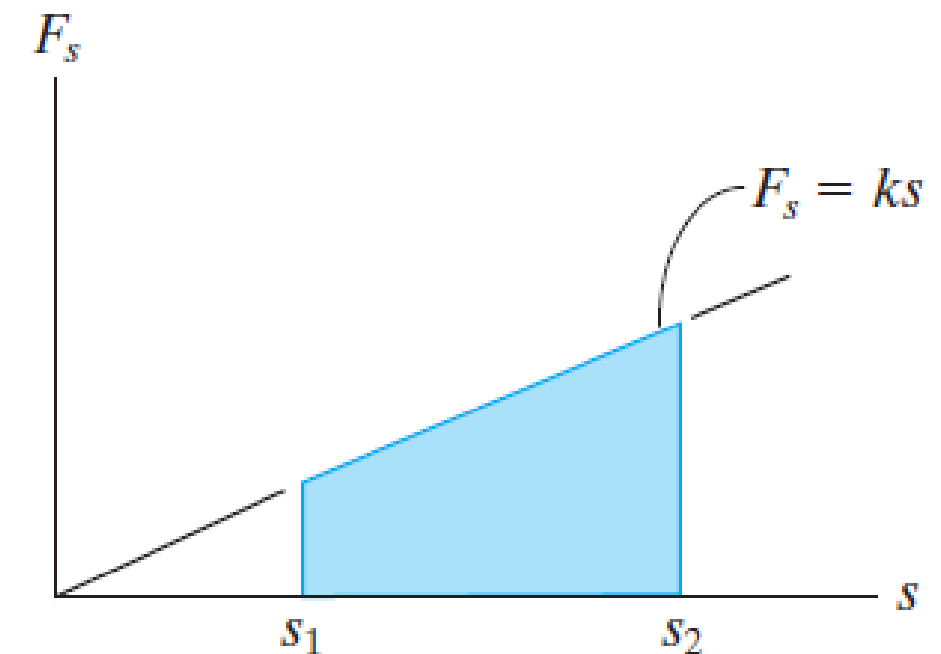
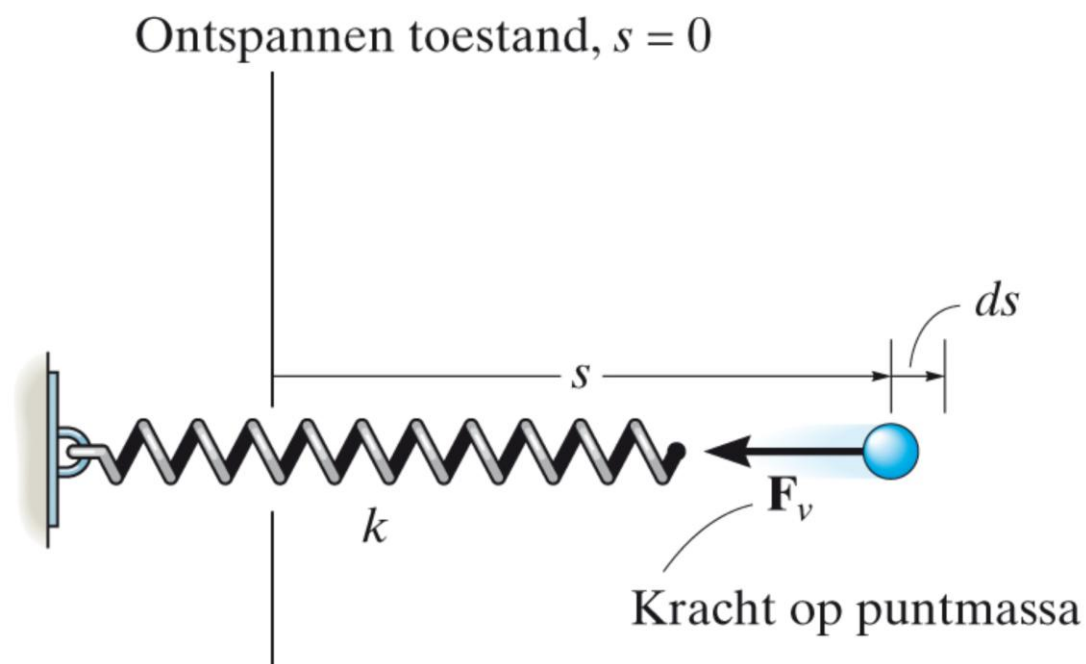


3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

Arbeid ten gevolge van de kracht van een veer

- De grootte van de kracht in een lineair elastische veer die over een afstand s vanuit de ontspannen toestand uitgerekt of ingedrukt wordt, is: $F_v = ks$
- Wanneer de veer uitgerekt of samengedrukt wordt van s_1 naar s_2 , is de verrichte arbeid op de veer door $\mathbf{F}_v$ *positief*, omdat kracht en verplaatsing *dezelfde richting hebben*

$$\begin{aligned} U_{1-2} &= \int_{s_1}^{s_2} F_s ds = \int_{s_1}^{s_2} -ks ds \\ &= -\left(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2\right) \end{aligned}$$



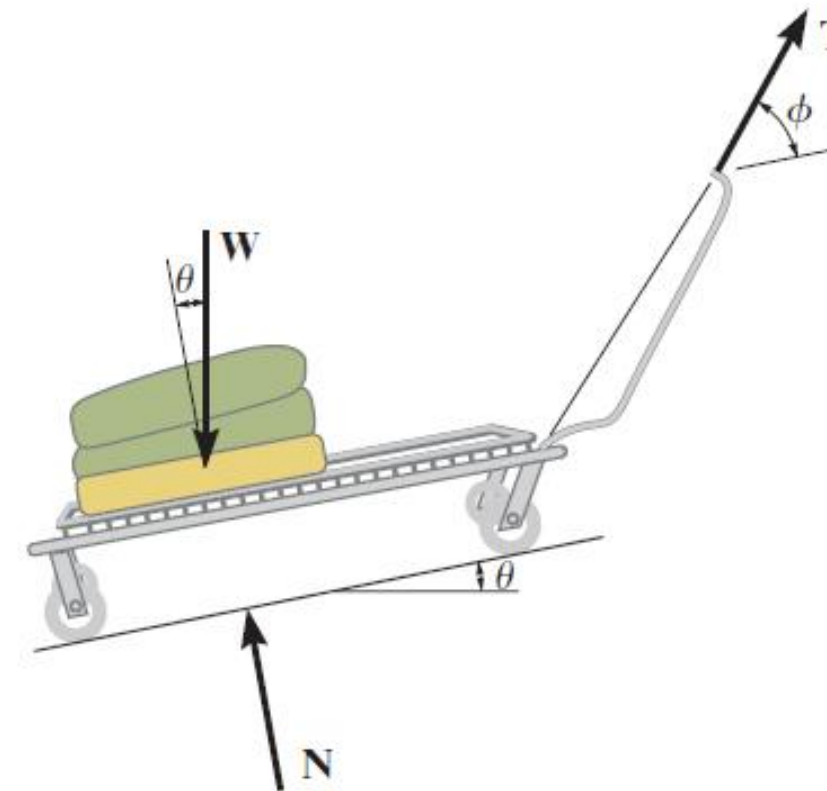
3.1 Arbeid ten gevolge van een kracht

Arbeid ten gevolge van een constante kracht

- De constante trekkkracht **T** verricht een positieve arbeid
- Het gewicht verricht een negatieve arbeid

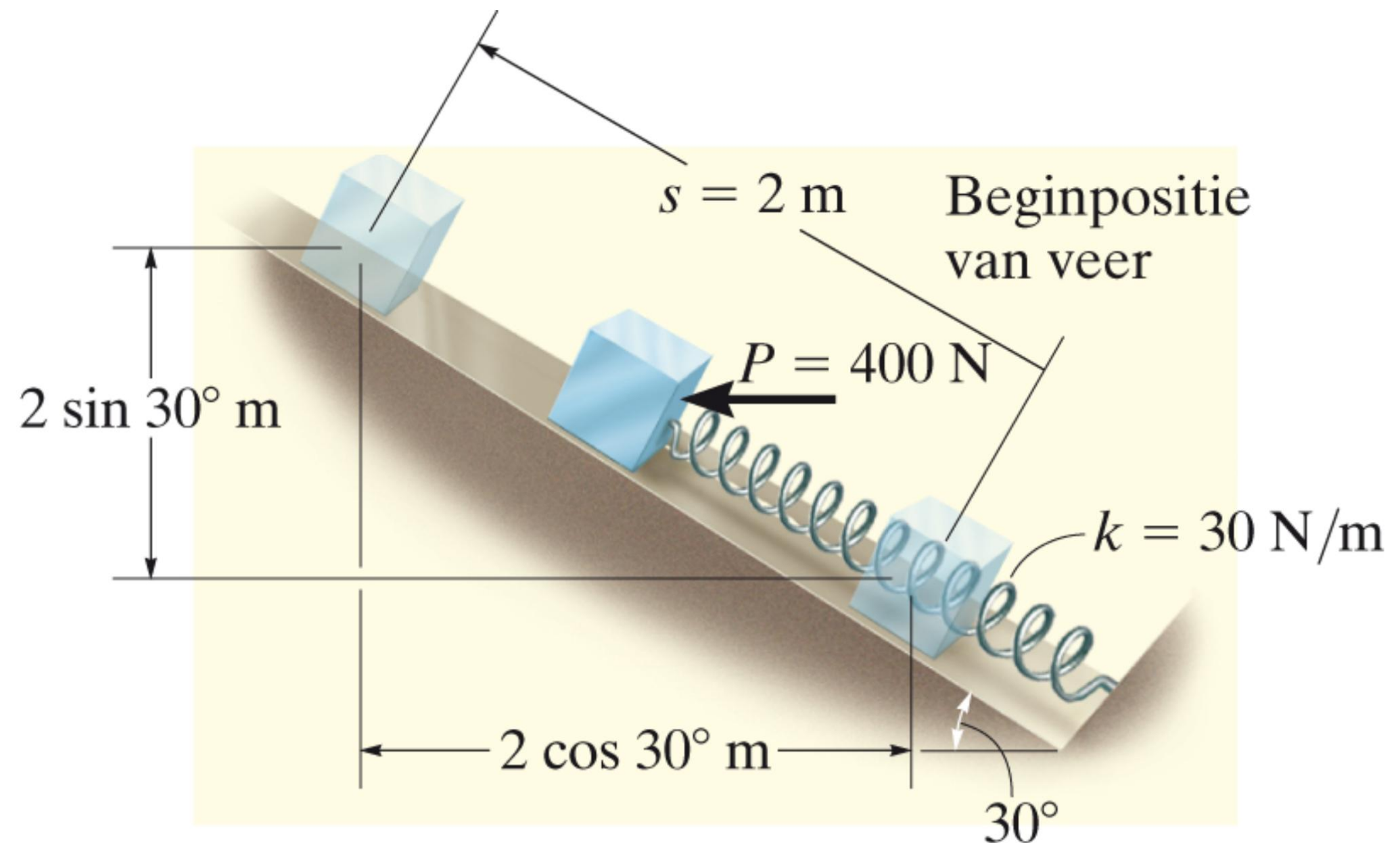
$$U_T = (T \cos \phi)s$$

$$U_W = -(W \sin \phi)s$$



Voorbeeld 3.1

Het blok van 10 kg rust op een gladde helling. De veer is in eerste instantie 0,5 m uitgerekt. Bepaal de totale door alle krachten die op het blok werken verrichte arbeid wanneer een horizontale kracht $P = 400 \text{ N}$ het blok over een afstand $s = 2 \text{ m}$ de helling op duwt.

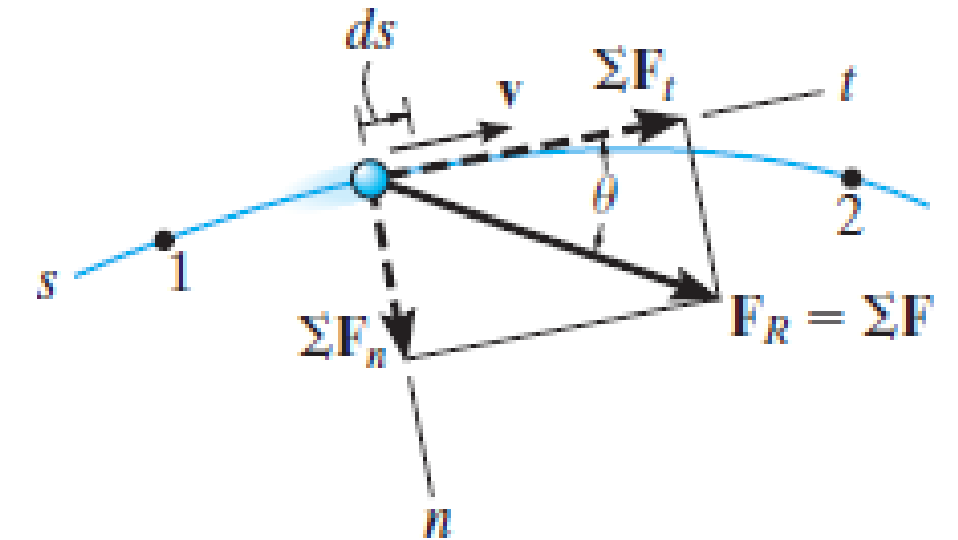


3.2 Principe van arbeid en energie

- Veronderstel een puntmassa P die een baan beschrijft die gemeten wordt ten opzichte van een inertiaal coördinatenstelsel
- Voor de puntmassa geldt in tangentiële richting $\sum F_t = ma_t$

$$\sum \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{v_1}^{v_2} mv dv$$

$$\sum \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$



- Het *principe van arbeid en energie* voor de puntmassa is:

$$\sum U_{1-2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

3.2 Principe van arbeid en energie

- Dit wordt vaak uitgedrukt in de vorm:

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

- De kinetische beginenergie van de puntmassa plus de arbeid die wordt geleverd door alle krachten die op de puntmassa worden uitgeoefend wanneer deze van haar begin- naar haar eindplaats beweegt, is gelijk aan de kinetische eindenergie van de puntmassa

3.2 Principe van arbeid en energie

Analyseprocedure

Arbeid (vrijlichaamsschema)

- Bepaal het initiële coördinatenstelsel en het vrijlichaamsschema

Principe van arbeid en energie

- Pas het principe van arbeid en energie toe:

$$T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$$

- De kinetische energie in de begin- en eindpunten is altijd positief, aangezien deze de gekwadrateerde snelheid bevat:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

3.2 Principe van arbeid en energie

Analyseprocedure (vervolg)

Principe van arbeid en energie (vervolg)

- Arbeid is altijd *positief* wanneer de krachtcomponent in *dezelfde* richting werkt als de verplaatsing
- De arbeid van krachten waarvan de grootte afhankelijk is van de verplaatsing, kan alleen berekend worden door te integreren
- De arbeid ten gevolge van een gewicht is het product van de grootte van het gewicht en de verticale verplaatsing
- De door een veer verrichte arbeid is:

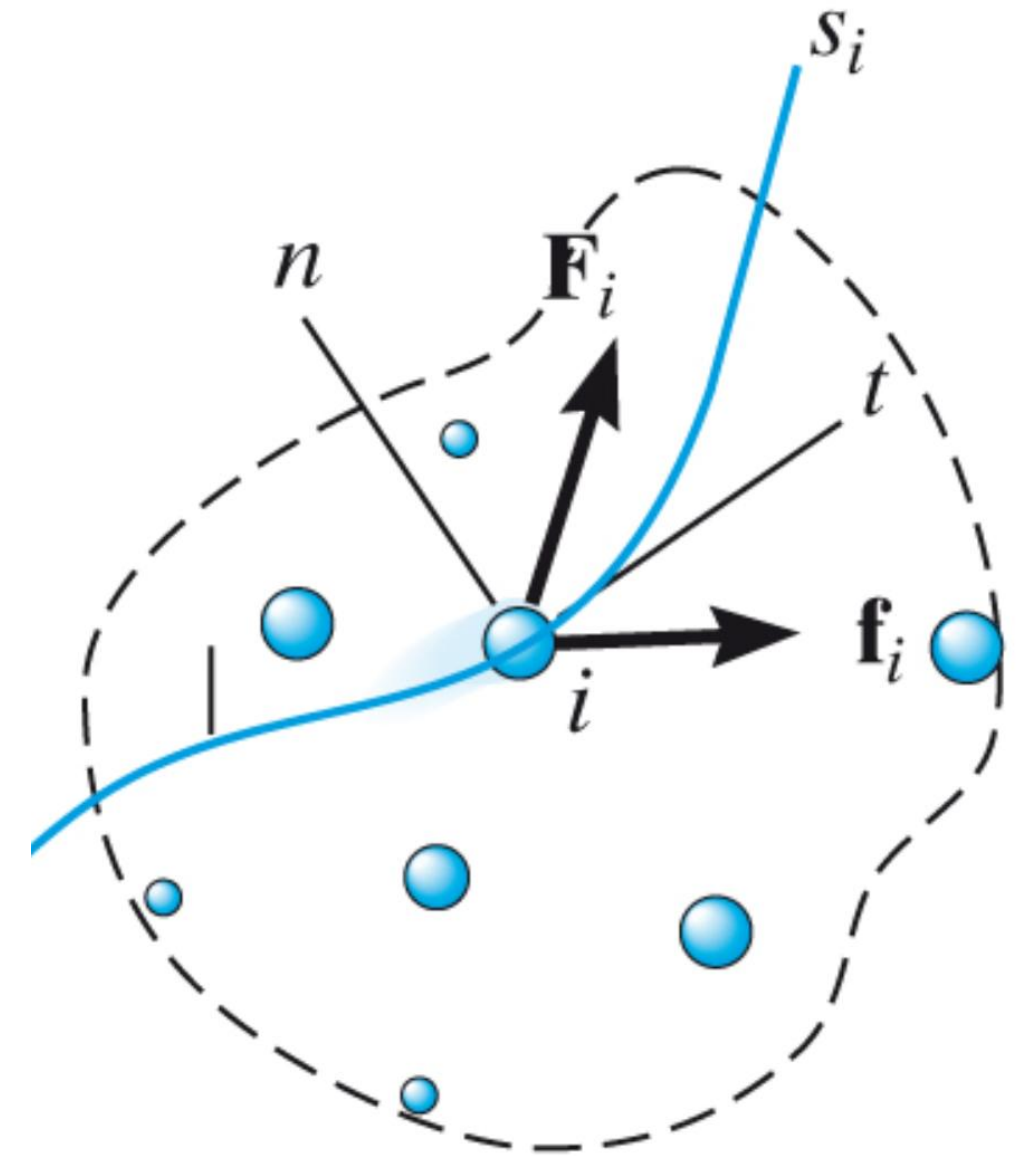
$$U_v = \frac{1}{2} k s^2$$



3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

Het principe van arbeid en energie kan uitgebreid worden zodat het geldt voor een stelsel van n puntmassa's die geïsoleerd zijn binnen een omsloten gebied in de ruimte.

$$\sum T_1 + \sum U_{1-2} = \sum T_2$$



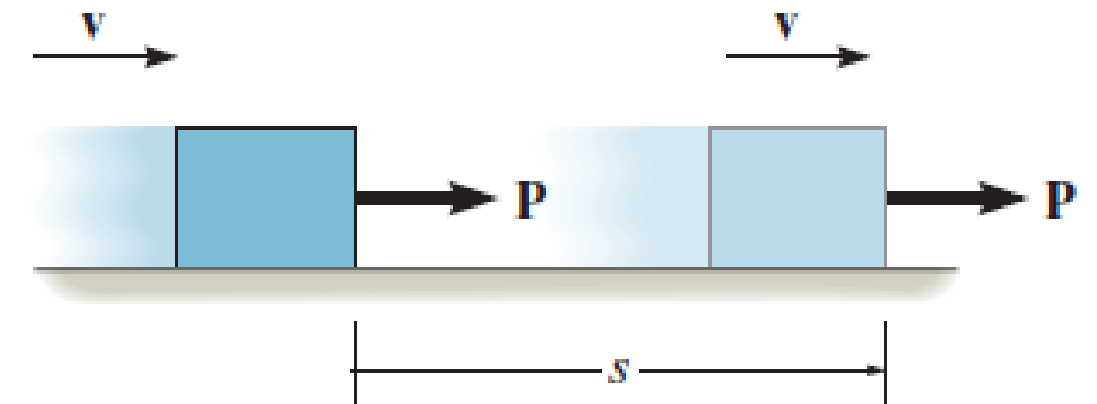
Vast coördinatenstelsel

3.3 Principe van arbeid en energie bij een stelsel van puntmassa's

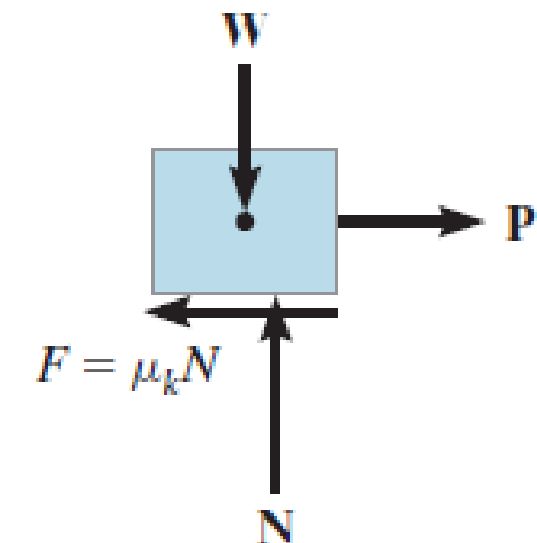
Wrijvingsarbeid bij glijden

- Wanneer de uitgeoefende kracht **P** precies even groot is als maar tegengesteld gericht is aan de *resulterende* wrijvingskracht $\mu_k N$, is de snelheid **v** als gevolg van dit evenwicht constant

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k Ns = \frac{1}{2}mv^2$$

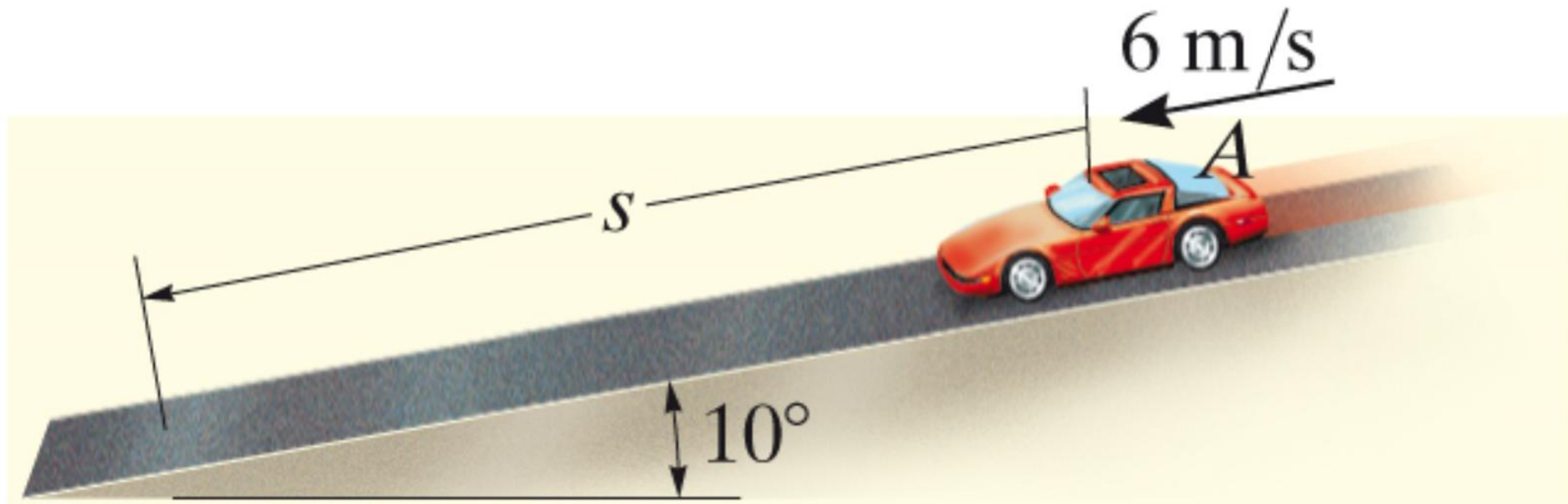


- Glijden *genereert warmte* en trillingen op een ruw oppervlak



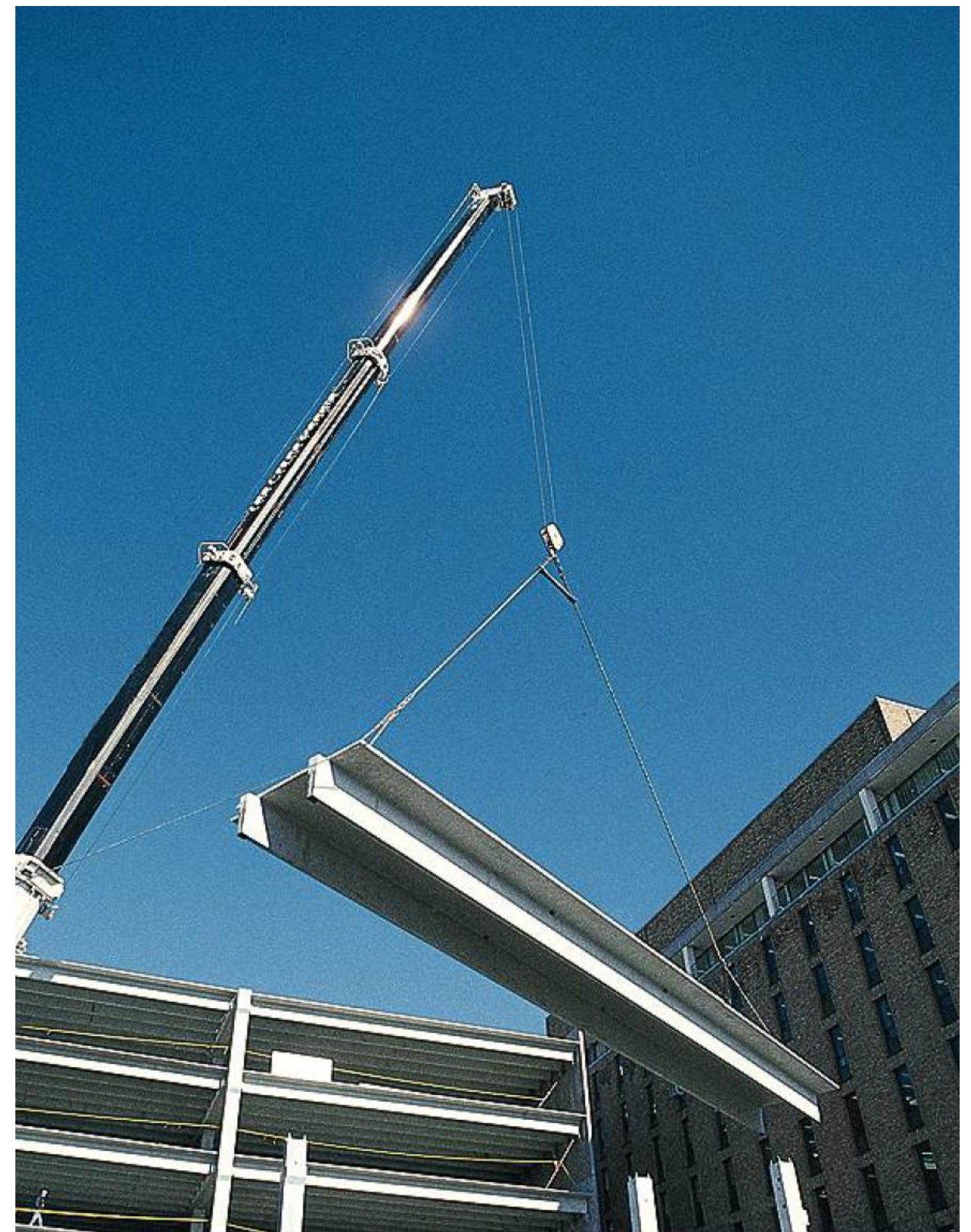
Voorbeeld 3.2

De auto van 17,5 kN rijdt omlaag over de helling van 10° met een snelheid van 6 m/s. De bestuurder trapt hard op de rem en de wielen blokkeren. Bepaal de afstand s waarover de banden over de weg slippen. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de wielen en de weg is $\mu_k = 0,5$.



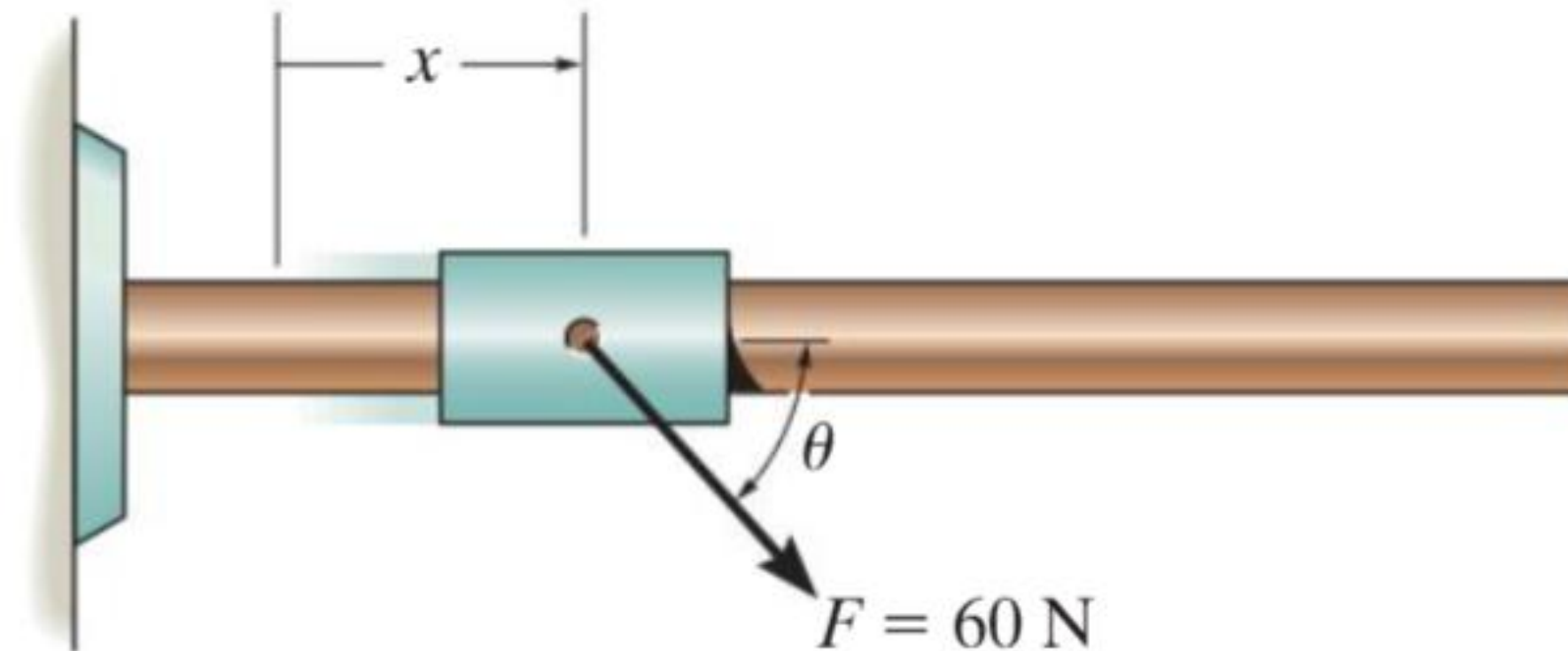
Voorbeeld 3.3

De kraan tilt de balk met een gewicht van 2500 kg gedurende korte tijd op met een kracht $F = (28 + 3s^2)$ kN. Bepaal de snelheid van de balk wanneer deze een hoogte van $s = 3$ m bereikt heeft. Hoe lang duurt het om die hoogte vanuit rust te bereiken?



Oefening

- *3.4.** De mof heeft een massa van 5 kg en beweegt met 8 m/s wanneer $x = 0$ en er een kracht van $F = 60$ N op wordt aangebracht. De richting θ van deze kracht varieert zodanig dat $\theta = 10x$, waarbij x in meters is en θ in graden met de klok mee wordt gemeten. Bepaal de snelheid van de mof bij $x = 3$ m. De wrijvingscoëfficiënt tussen de mof en de stang is $\mu_k = 0,3$.



3.4 Vermogen en rendement

Vermogen

- Gedefinieerd als de hoeveelheid verrichte arbeid per tijdseenheid
- *Vermogen* dat geleverd wordt door een machine of motor die een hoeveelheid arbeid dU in het tijdsinterval dt verricht is:

$$P = \frac{dU}{dt}$$

- Wanneer dU geschreven wordt als $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, vinden we dat $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$
- De SI-eenheid voor vermogen is watt (W) en is gedefinieerd als $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$
 $= 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$

3.4 Vermogen en rendement

Rendement

- Gedefinieerd als de verhouding van het nuttige uitgangsvermogen en het ingangsvermogen dat aan de machine geleverd wordt:

$$\varepsilon = \frac{\text{uitgaand vermogen}}{\text{ingaaand vermogen}}$$

- Als energie wordt aan- en afgevoerd in hetzelfde tijdsinterval, geldt ook:

$$\varepsilon = \frac{\text{uitgaande energie}}{\text{ingaande energie}}$$



3.4 Vermogen en rendement

Analyseprocedure

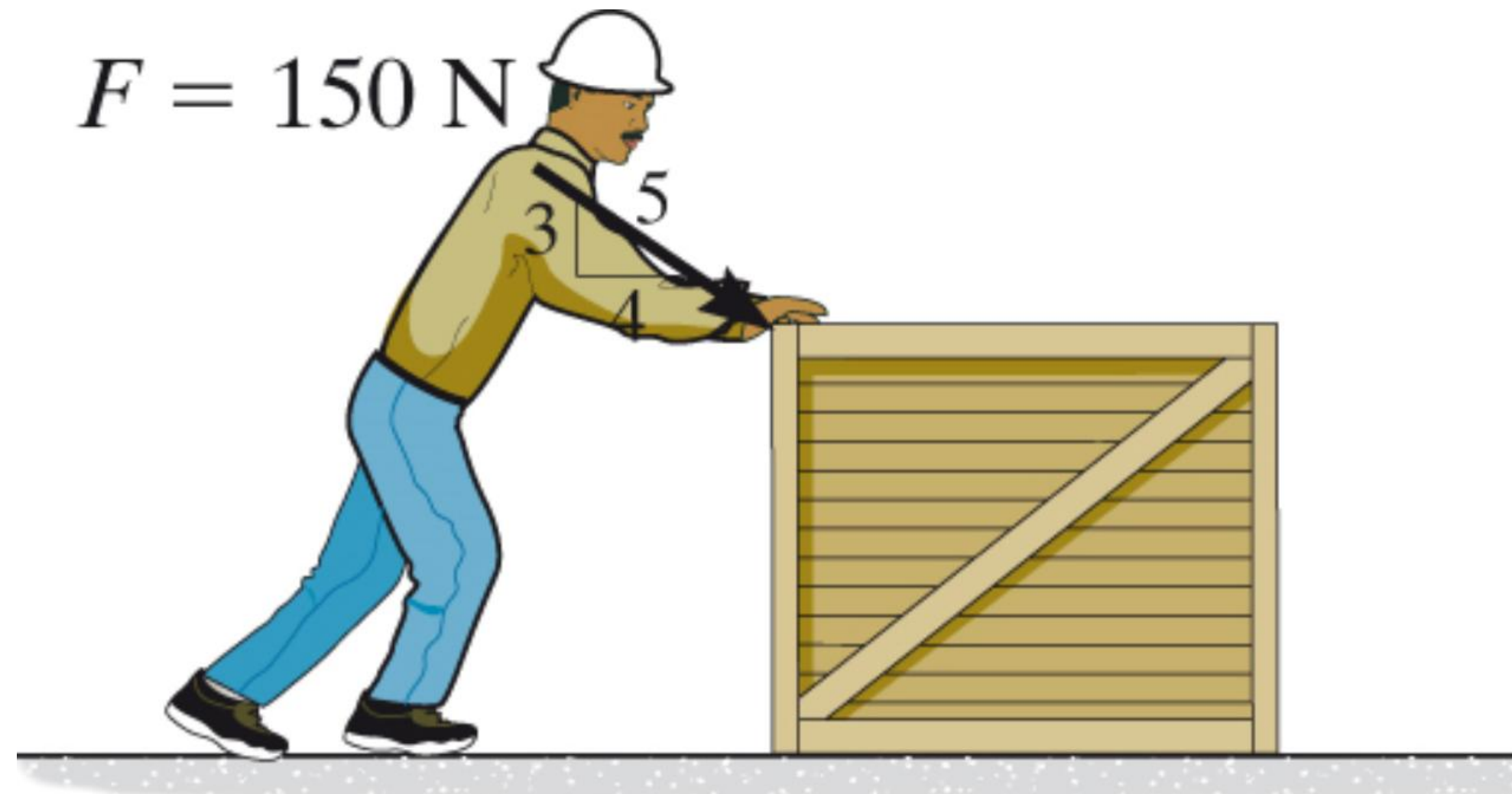
- Het aan een lichaam geleverde vermogen kan op de volgende manier worden bepaald.
- Bepaal de niet gecompenseerde uitwendige kracht $\mathbf{F}$ die op het lichaam wordt uitgeoefend en die de beweging veroorzaakt.
- Pas $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ toe als het lichaam versnelt, om $\mathbf{F}$ te bepalen.
- Zodra $\mathbf{F}$ en $\mathbf{v}$ bekend zijn, kan het vermogen bepaald worden met $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos\theta$
- Het vermogen kan ook bepaald worden met:

$$P_{gem} = \Delta U / \Delta t \text{ of } P = dU / dt$$



Voorbeeld 3.7

De man in fig. 3.15a drukt met een kracht $F = 150 \text{ N}$ tegen de kist van 50 kg. Bereken het vermogen dat de man levert op $t = 4 \text{ s}$. De kinetische wrijvingscoëfficiënt tussen de kist en het vlak $\mu_k = 0,2$. In eerste instantie is de kist in rust.



3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

Conservatieve kracht

- Gedefinieerd door de verrichte arbeid tijdens het verplaatsen van een puntmassa van een punt naar een ander punt die *onafhankelijk is van de baan* die de puntmassa aflegt

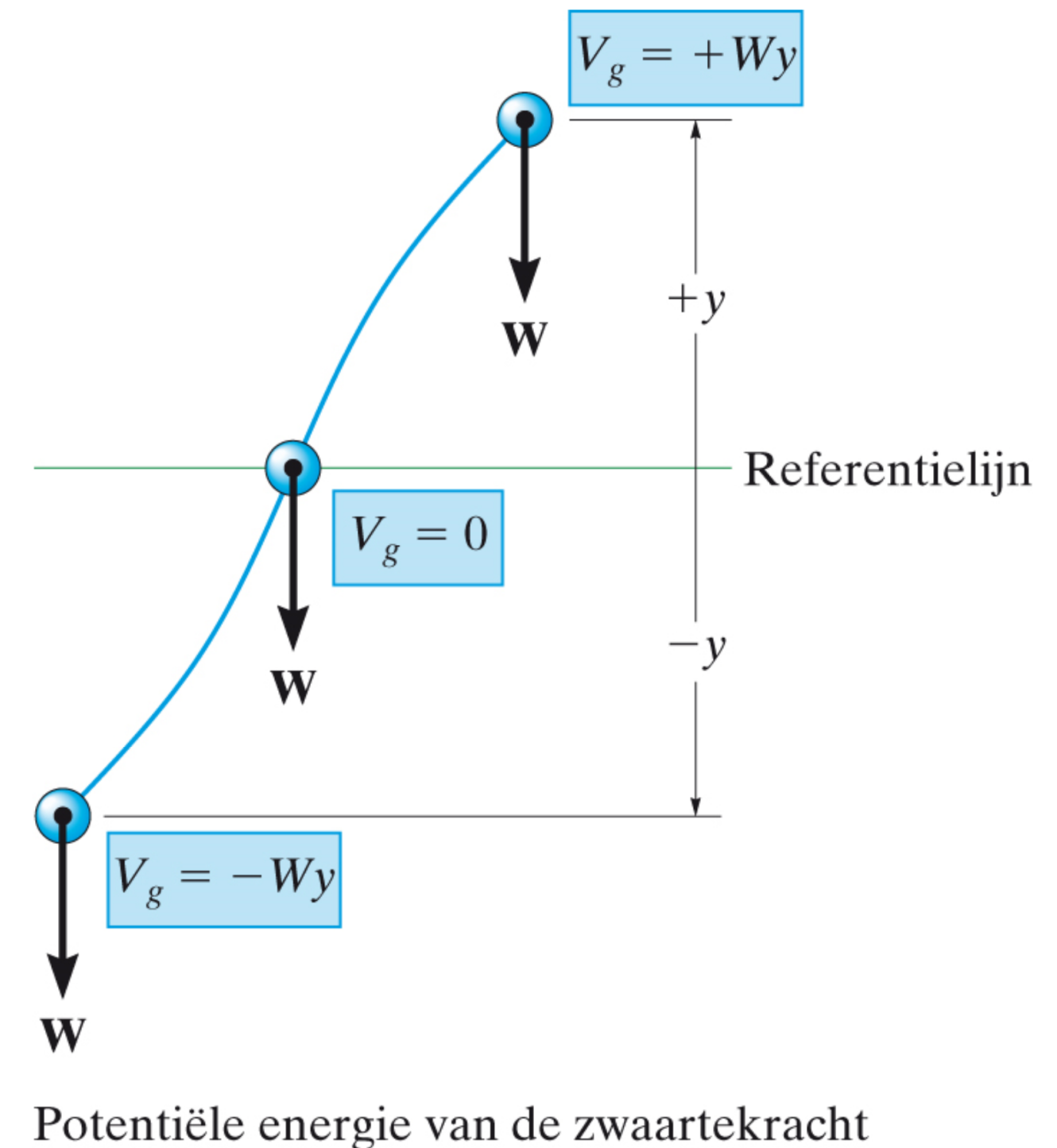
Energie

- Energie is gedefinieerd als een grootheid die de mogelijkheid geeft om arbeid te verrichten
- *Kinetische energie* houdt verband met de *beweging* van de puntmassa

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

Potentiële energie ten gevolge van de zwaartekracht

- Wanneer een puntmassa zich op een afstand y boven een referentielijn bevindt, heeft het gewicht $\mathbf{W}$ positieve *potentiële energie van de zwaartekracht* V_g
- Wanneer y positief is gericht, is de potentiële energie ten gevolge van de zwaartekracht van de puntmassa met gewicht W gelijk aan:
 $V_g = Wy$



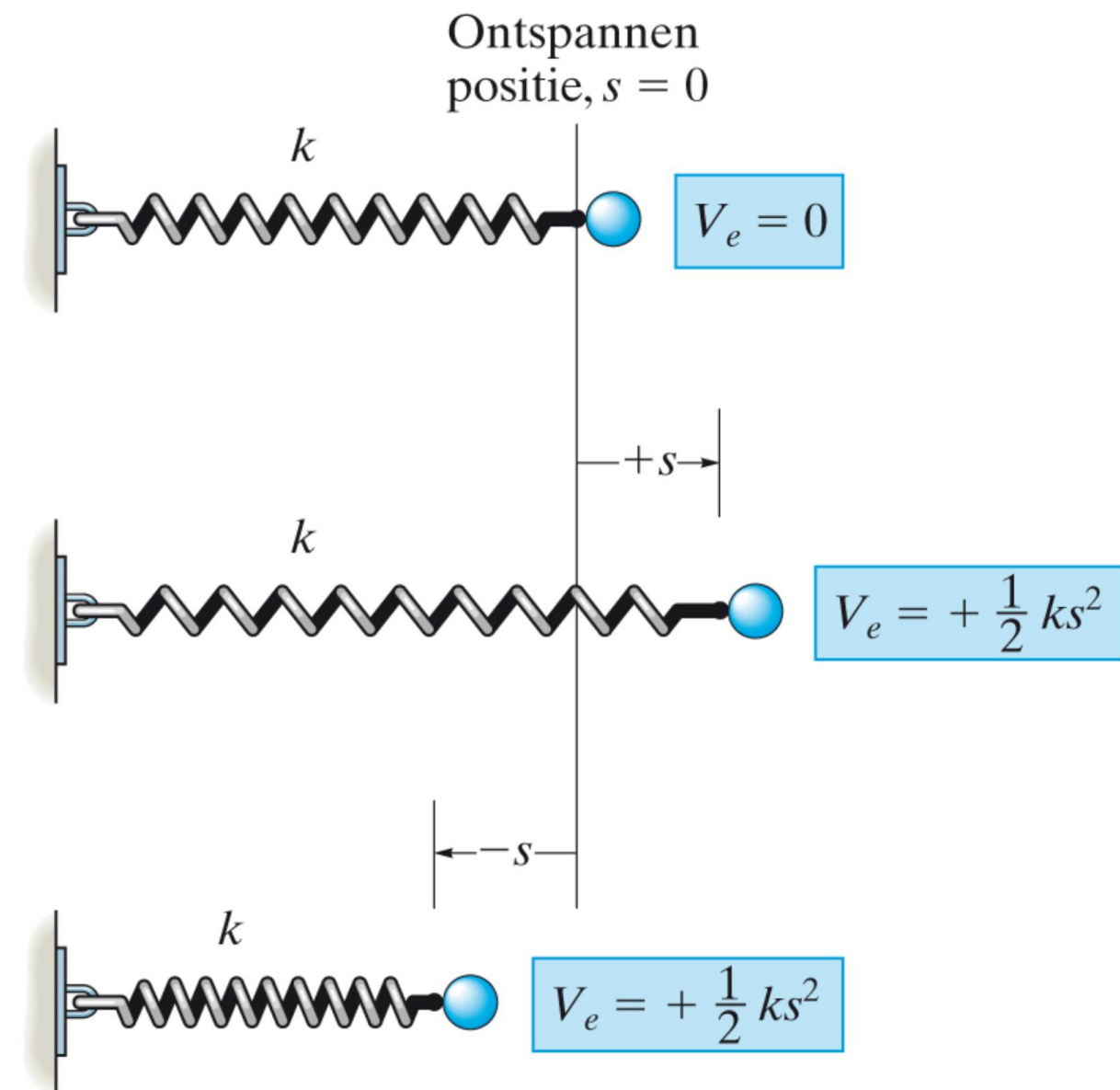
3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

Potentiële energie ten gevolge van elastische vervorming

- Wanneer een elastische veer uitgerekt of ingedrukt is ten opzichte van de rustpositie, is de potentiële energie als gevolg van de elastische vervorming:

$$V_e = +\frac{1}{2}ks^2$$

- V_e is altijd positief



Potentiële energie als gevolg van de elastische vervorming

3.5 Conservatieve krachten en potentiële energie

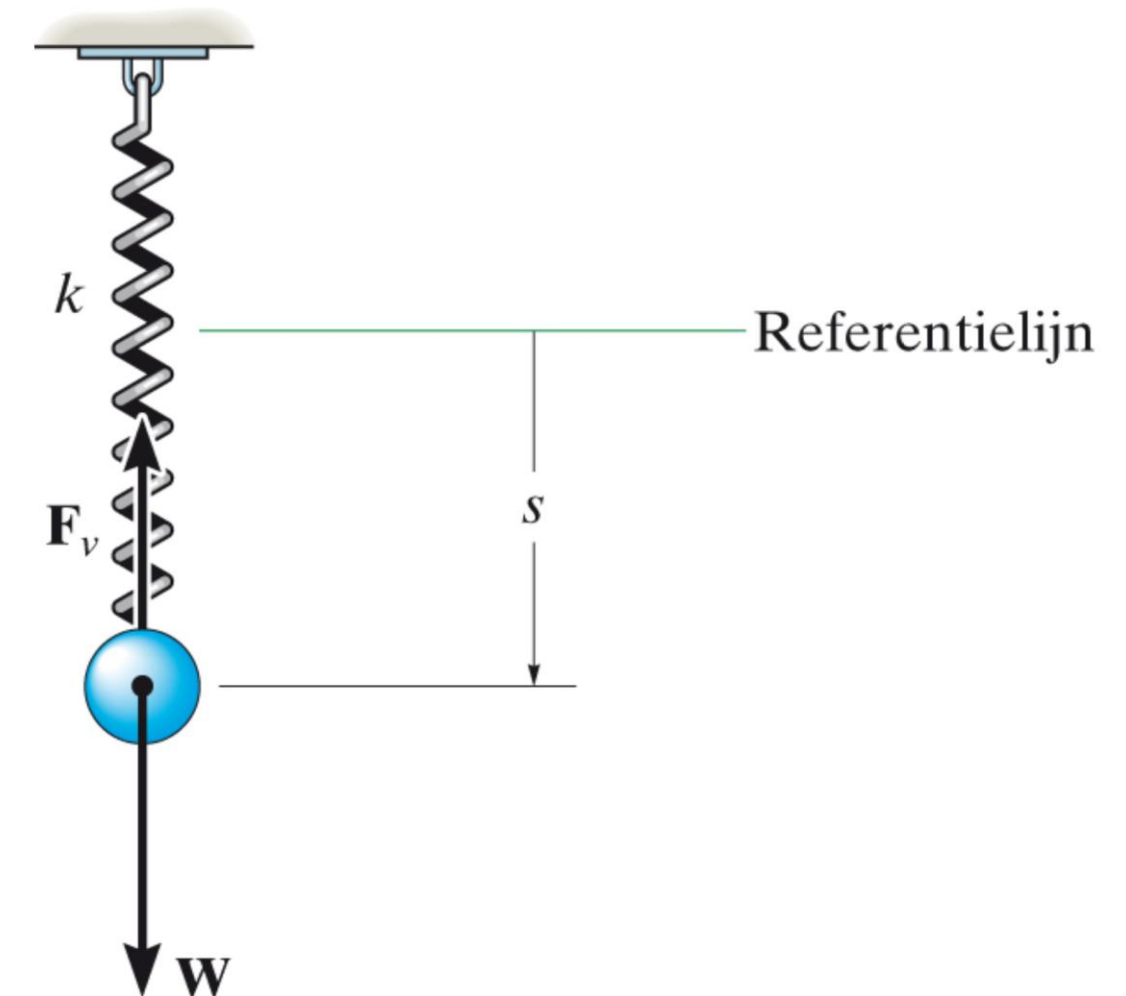
Potentiële energiefunctie

- Wanneer een puntmassa zowel de zwaartekracht als elastische krachten ondervindt, is de potentiële energie:

$$V = V_g + V_e$$

- Als een puntmassa van s_1 naar een lagere gelegen plaats s_2 beweegt, is de verrichte arbeid:

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 = W(s_2 - s_1) - \left(\frac{1}{2} k s_2^2 - \frac{1}{2} k s_1^2 \right)$$



3.6 Behoud van mechanische energie

- De door *conservatieve krachten* verrichte arbeid kan worden geschreven als functie van het verschil in hun potentiële energieën

$$\left(\sum U_{1-2}\right)_{\text{cons}} = V_1 - V_2$$

- Aangezien $T_1 + \sum U_{1-2} = T_2$, geldt

$$T_1 + \left(\sum U_{1-2}\right)_{\text{cons}} + \left(\sum U_{1-2}\right)_{\text{niet-cons}} = T_2$$

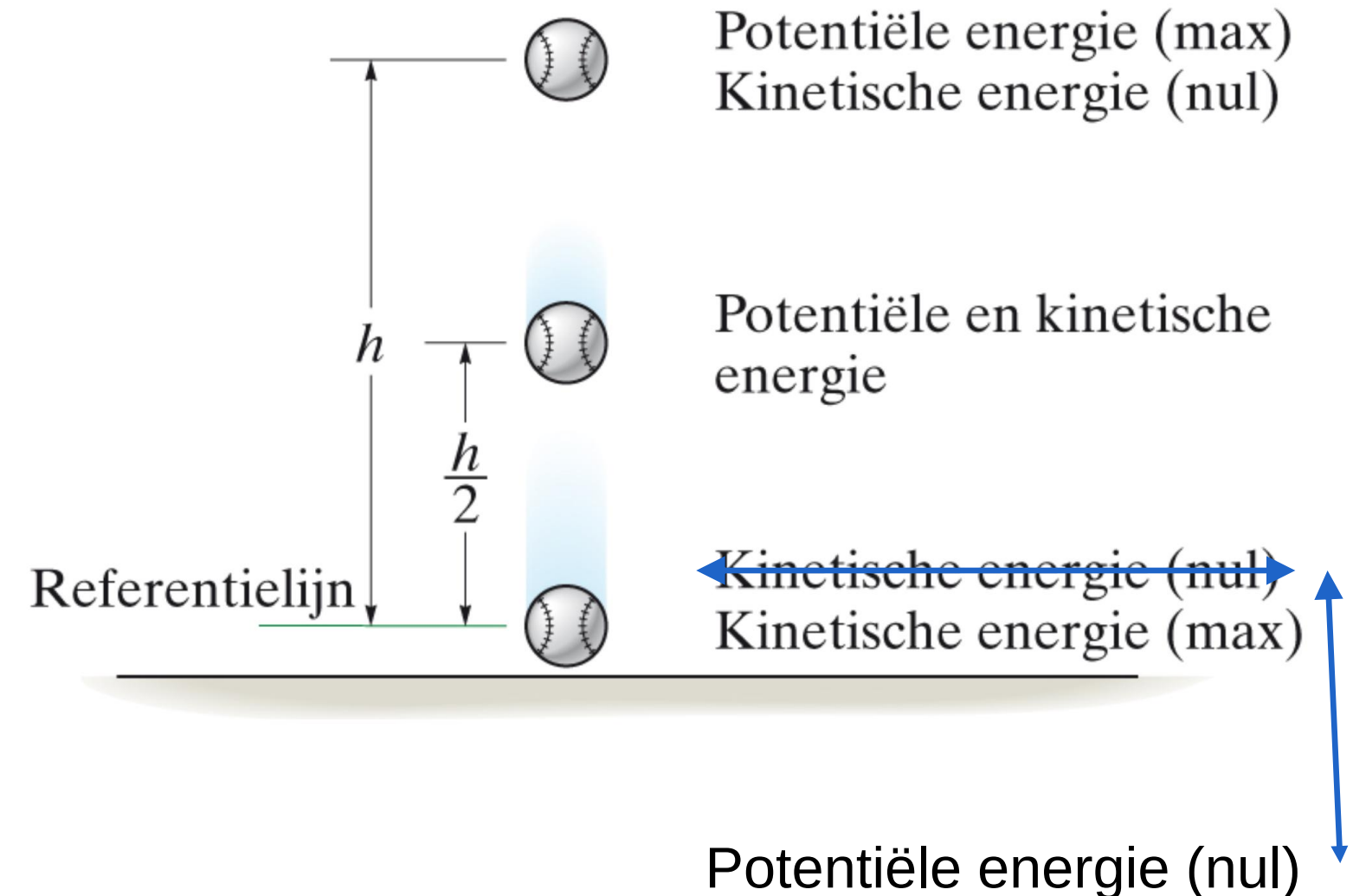
$$T_1 + V_1 + \left(\sum U_{1-2}\right)_{\text{niet-cons}} = T_2 + V_2$$

3.6 Behoud van mechanische energie

- Als *uitsluitend conservatieve krachten* op het lichaam werken terwijl het van de ene naar een andere toestand beweegt, geldt:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

- Dit wordt *behoud van mechanisch energie* of *behoud van energie* genoemd



3.6 Behoud van mechanische energie

Stelsel van puntmassa's

- Voor een stelsel van puntmassa's geldt:

$$\sum T_1 + \sum V_1 + \left(\sum U_{1-2} \right)_{\text{niet-cons}} = \sum T_2 + \sum V_2$$

3.6 Behoud van mechanische energie

Stelsel van puntmassa's

- Als een stelsel van puntmassa's aan uitsluitend conservatieve krachten wordt blootgesteld, geldt:

$$\sum T_1 + \sum V_1 = \sum T_2 + \sum V_2$$

- De som van de kinetische en potentiële energie van de puntmassa in de beginsituatie is gelijk aan de som van de uiteindelijke kinetische en potentiële energie ervan

$$\sum T + \sum V = \text{constant}$$

3.6 Behoud van mechanische energie

Analyseprocedure

Potentiële energie

- Teken 2 schema's met daarin het begin- en eindpunt van de puntmassa op de baan
- Bepaal een vaste horizontale referentielijn voor het bepalen van de potentiële energie van de zwaartekracht van de puntmassa wanneer deze een verticale verplaatsing ondergaat.

- Onthouden!
$$V_g = Wy \text{ en } V_e = \frac{1}{2}ks^2 \text{ (altijd positief)}$$

3.6 Behoud van mechanische energie

Analyseprocedure (vervolg)

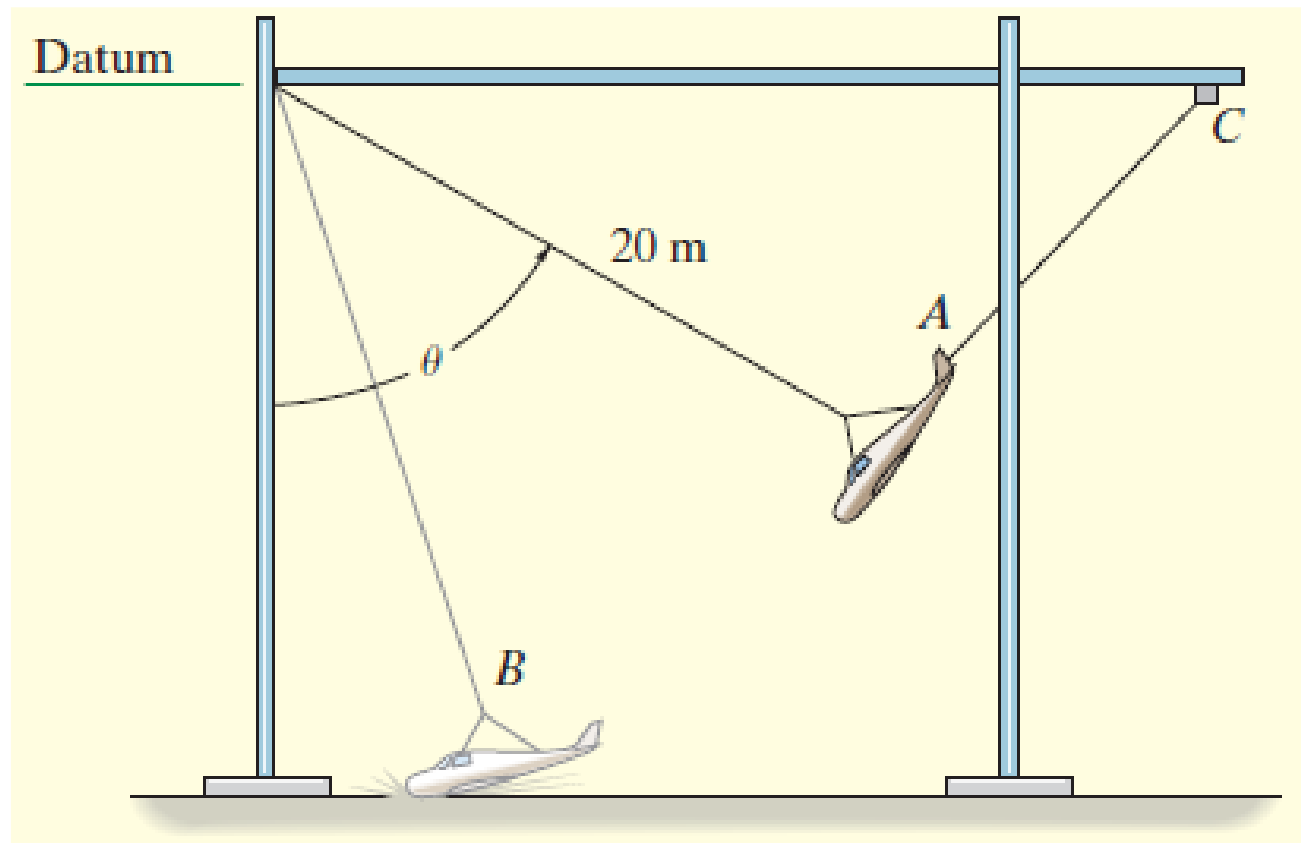
Behoud van mechanische energie

- Pas de volgende vergelijking toe: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
- Voor het bepalen van de kinetische energie moet de snelheidsgrootte v gemeten worden ten opzichte van een inertiaal referentiestelsel

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

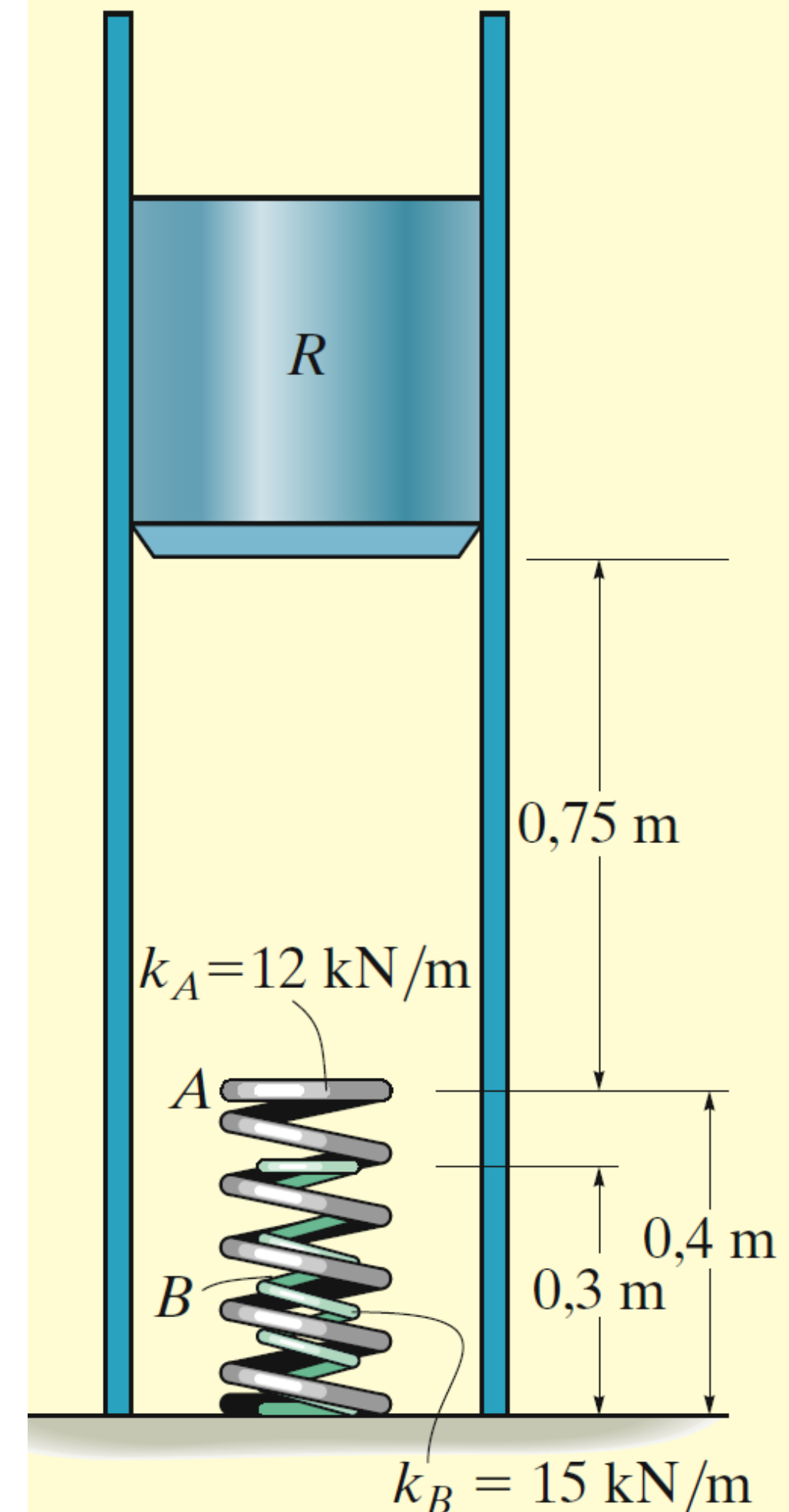
Voorbeeld 3.9

De portaalconstructie wordt gebruikt om de reactie van een vliegtuig tijdens een crash te testen. Het vliegtuig met een massa van 8 ton wordt opgelierd tot $\theta = 60^\circ$. Dan wordt de lierkabel AC losgelaten op het moment dat het vliegtuig in rust is. Bepaal de snelheid van het vliegtuig net voordat het crasht op de grond (als $\theta = 15^\circ$). Hoe groot is de maximale trekkracht in de draagkabel tijdens de beweging?



Voorbeeld 3.10

Het valgewicht R heeft een massa van 100 kg en wordt vanuit rust 0,75 m boven de bovenkant van de veer A losgelaten. De veer heeft een veerconstante $k_A = 12 \text{ kN/m}$. Een tweede veer B , met een veerconstante $k_B = 15 \text{ kN/m}$ 'zit' in A . Bepaal de maximale verplaatsing van A die nodig is om de neerwaartse beweging van het valgewicht te stoppen. De rustlengte van de veren wordt in de figuur weergegeven. Verwaarloos de massa van de veren.



Oefening

***3.72.** Het achtbaanwagentje heeft een massa van 700 kg, inclusief de passagier. Bepaal de minimale hoogte h van de heuvelkam waarbij het wagentje zonder van de baan te vallen door beide loopings kan rijden indien het vanuit stilstand wordt losgelaten vanaf de top van de heuvel A . Verwaarloos wrijving, de massa van de wielen en de afmetingen van het wagentje. Wat is de normaalkracht op het wagentje wanneer het zich bij B bevindt en wanneer het zich bij C bevindt? Neem $\rho_B = 7,5 \text{ m}$ en $\rho_C = 5 \text{ m}$.

