FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

Hoofdstuk 6

Fysica

Industrieel Ingenieur

Schoonmeersen

Gedwongen trillingen

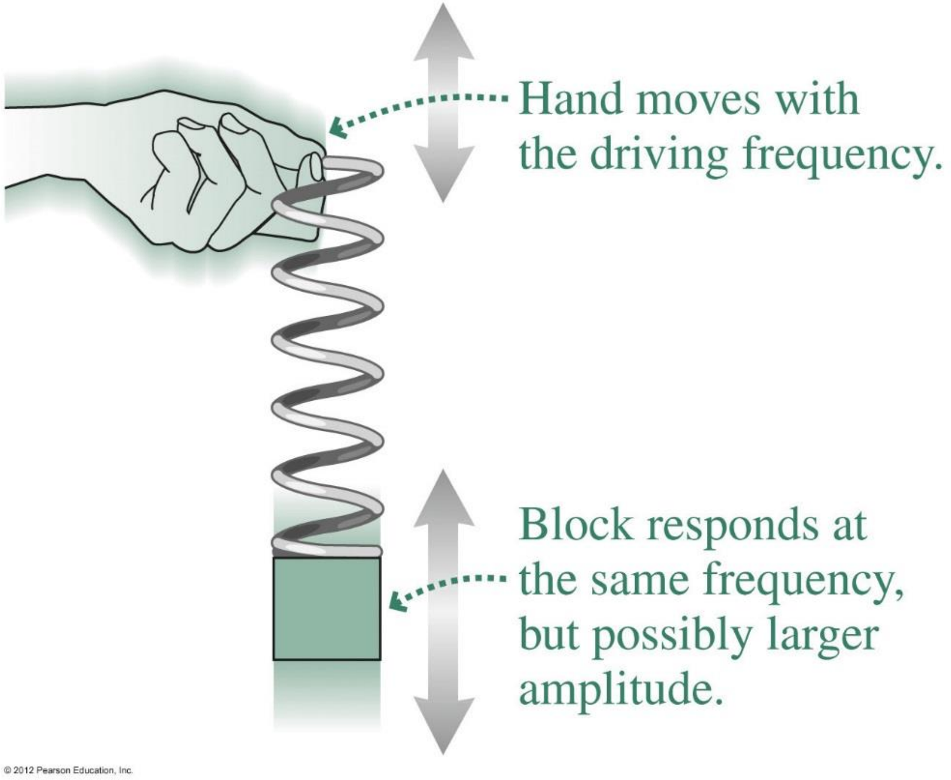
Driven oscillations

UNIVERSITEIT GENT

6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping

- Wanneer een uitwendige periodieke kracht werkt op een trillend systeem, ondergaat het systeem een **gedwongen trilling**.
- Vb.: periodiek aangedreven veer

  Na enige tijd zal de massa heen en weer bewegen met dezelfde frequentie als de externe periodieke kracht, in dit geval de frequentie waarmee de hand op en neer gaat.



- Andere vbn.: vioolsnaar, orgelpijp.

6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + \mathrm{k}u = F_{dw}\sin\omega_{dw}t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + \mathrm{k}u = F_{dw}\sin\omega_{dw}t$$

6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping

$$u = u_h + u_p = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\omega_1 t + \varphi\right) + A \sin\left(\omega_{dw} t - \beta\right)$$

dempt uit
overgangsgebied

blijft over
stationair regime

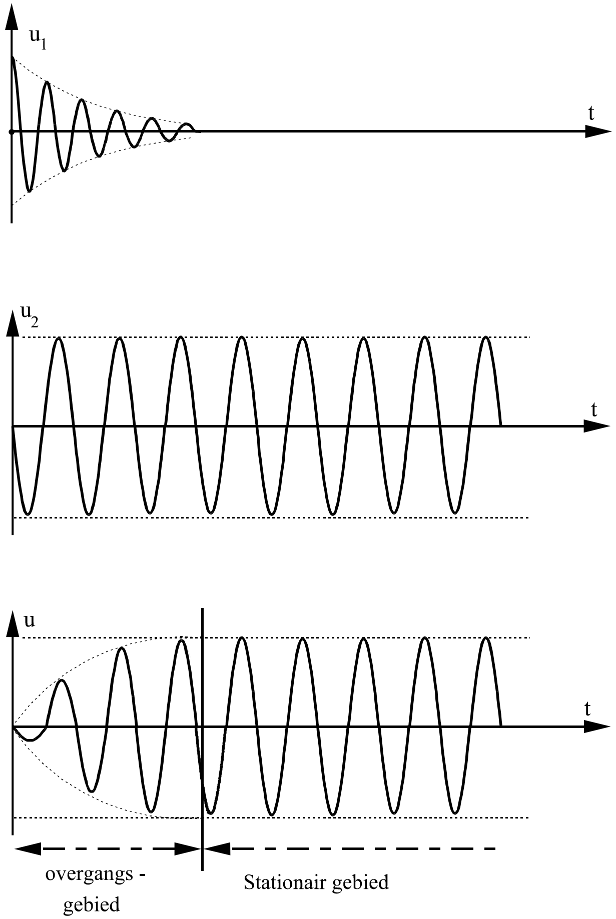
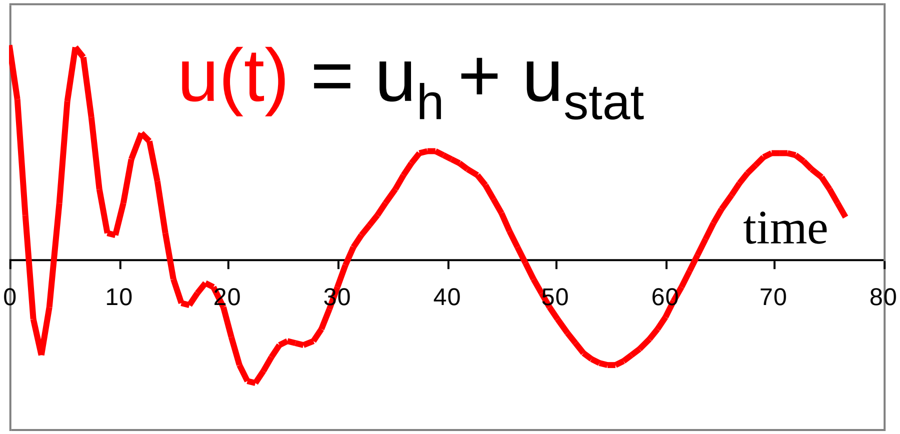
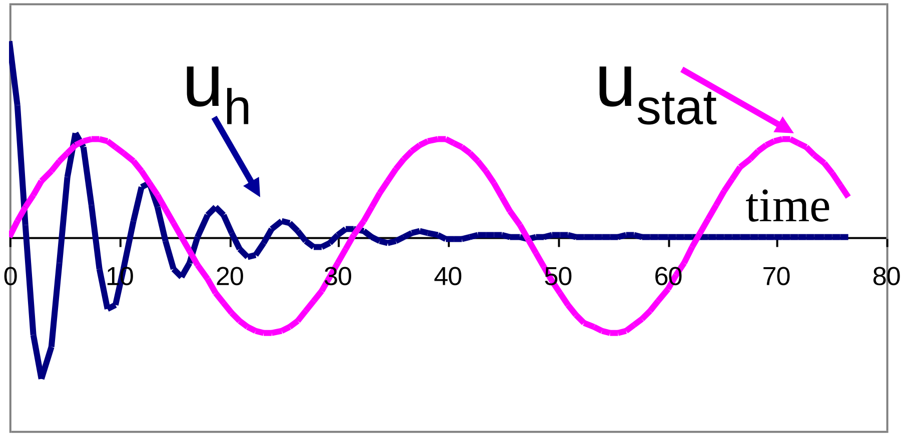


Fig. 1.7.1

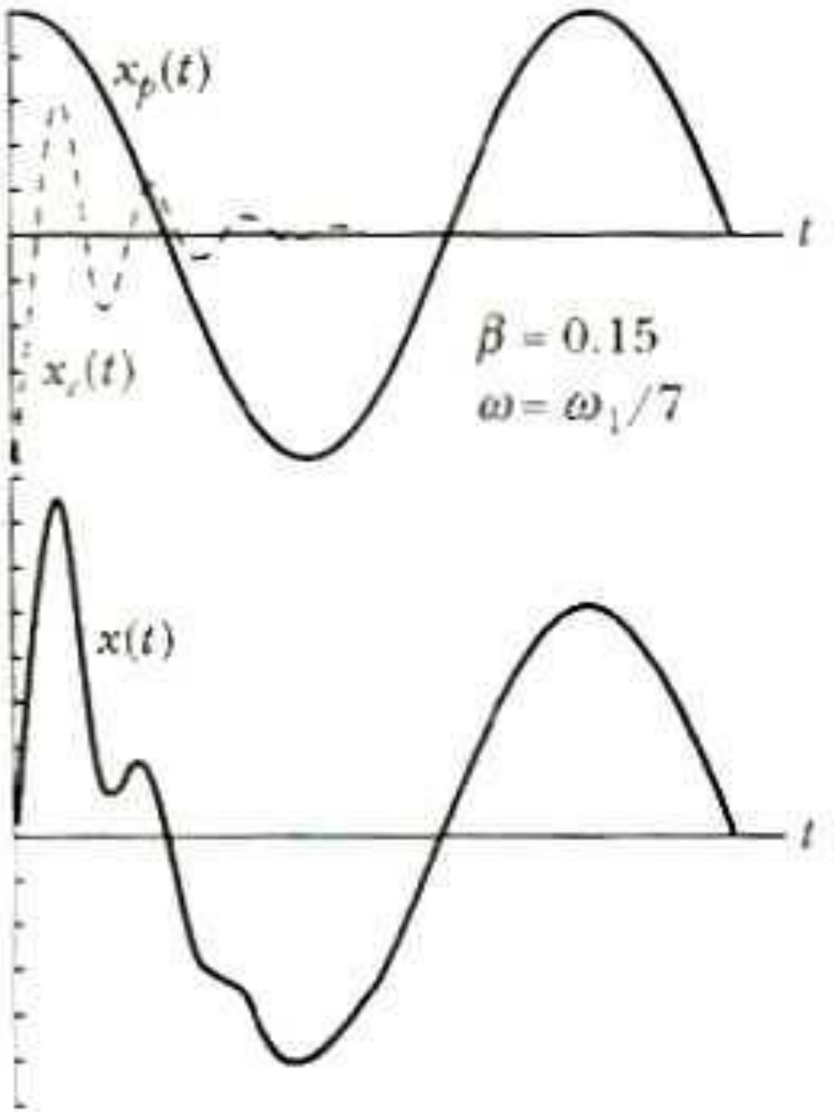
6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping

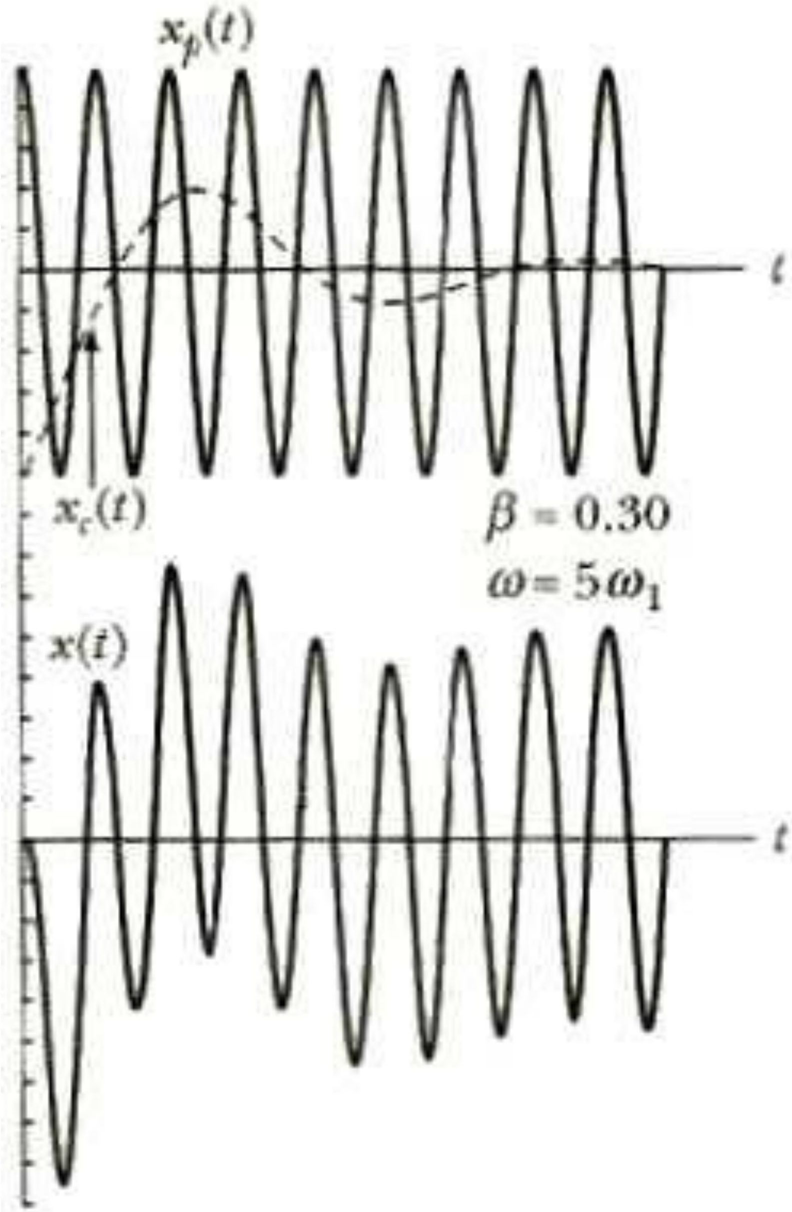
$$u = u_h + u_p = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\omega_1 t + \varphi\right) + A\sin\left(\omega_{dw} t - \beta\right)$$



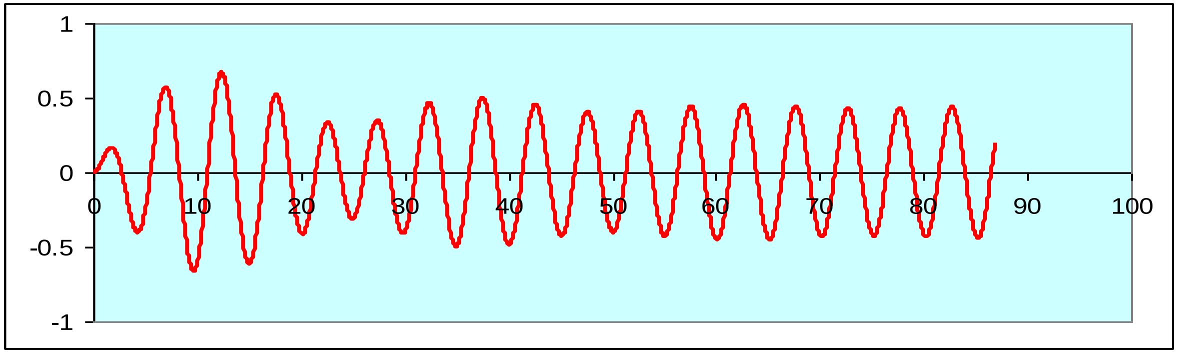


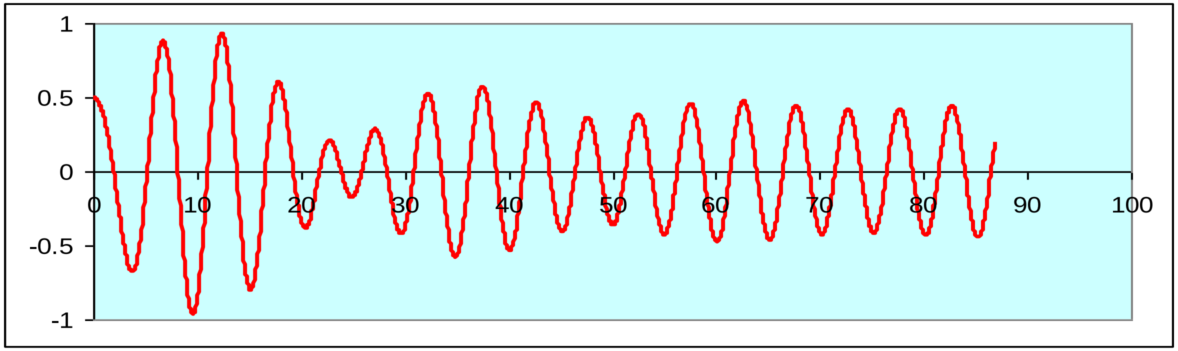
6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping





6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping





Dit betreft dezelfde gedwongen oscillator die vanuit rust start, een keer vanuit de oorsprong en een keer vanop 0,5.
Na ongeveer 70 seconden verlopen beide curven identiek zowel naar fase als naar amplitude, en
bekomt men het stationaire regime.

6.1 Gedwongen trilling met geringe visc. demping

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + \mathrm{k}u = F_{dw}\sin\omega_{dw}t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + \mathrm{k}u = F_{dw}\sin\omega_{dw}t$$

Particuliere oplossing van de differentiaalvergelijking

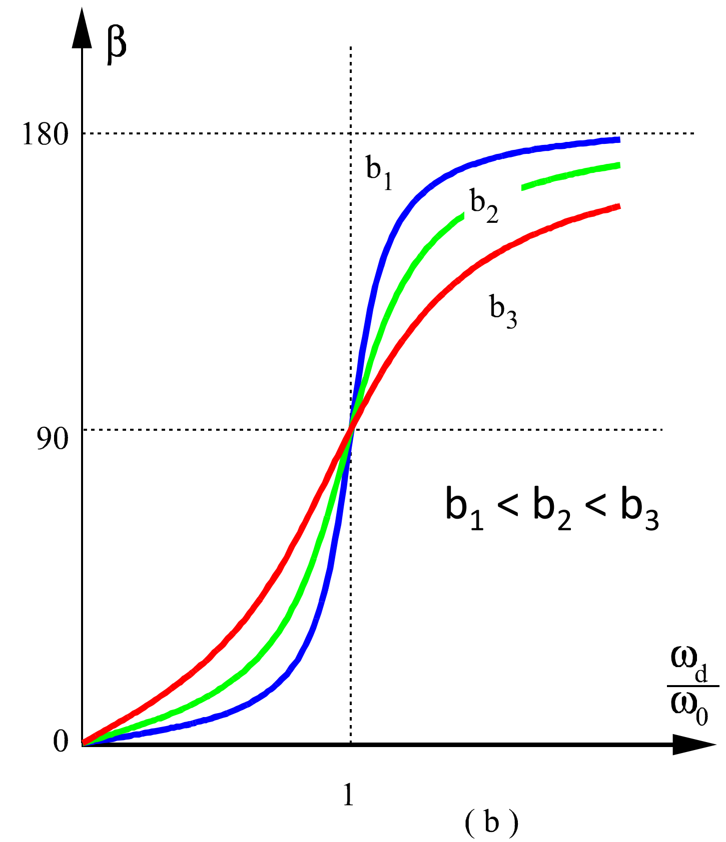
$$u_{stat} = A\sin(\omega_{dw}t - \beta)$$

In het stationair regime

6.1.2 Faseresponsie

$$\tan\beta = \frac{b\omega_{dw}}{m\left(\omega_0^{\,2} - \omega_{dw}^{\,2}\right)}$$

ω_{dw}	$tg\beta$	β
$\omega_{dw} \to 0$	0	0
ω_0	∞	90°
$\omega_{dw} \to +\infty$	$tg\beta \to 0$ <	180°



6.1.3 Amplituderesponsie - Amplituderesonantie

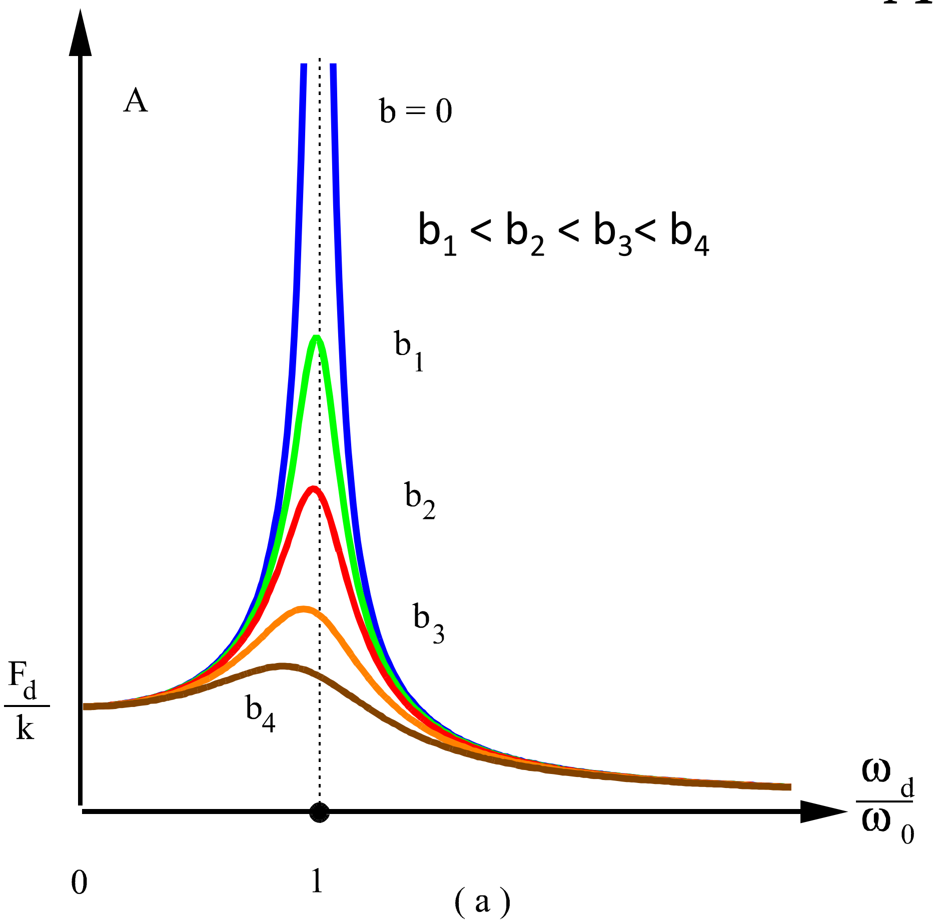
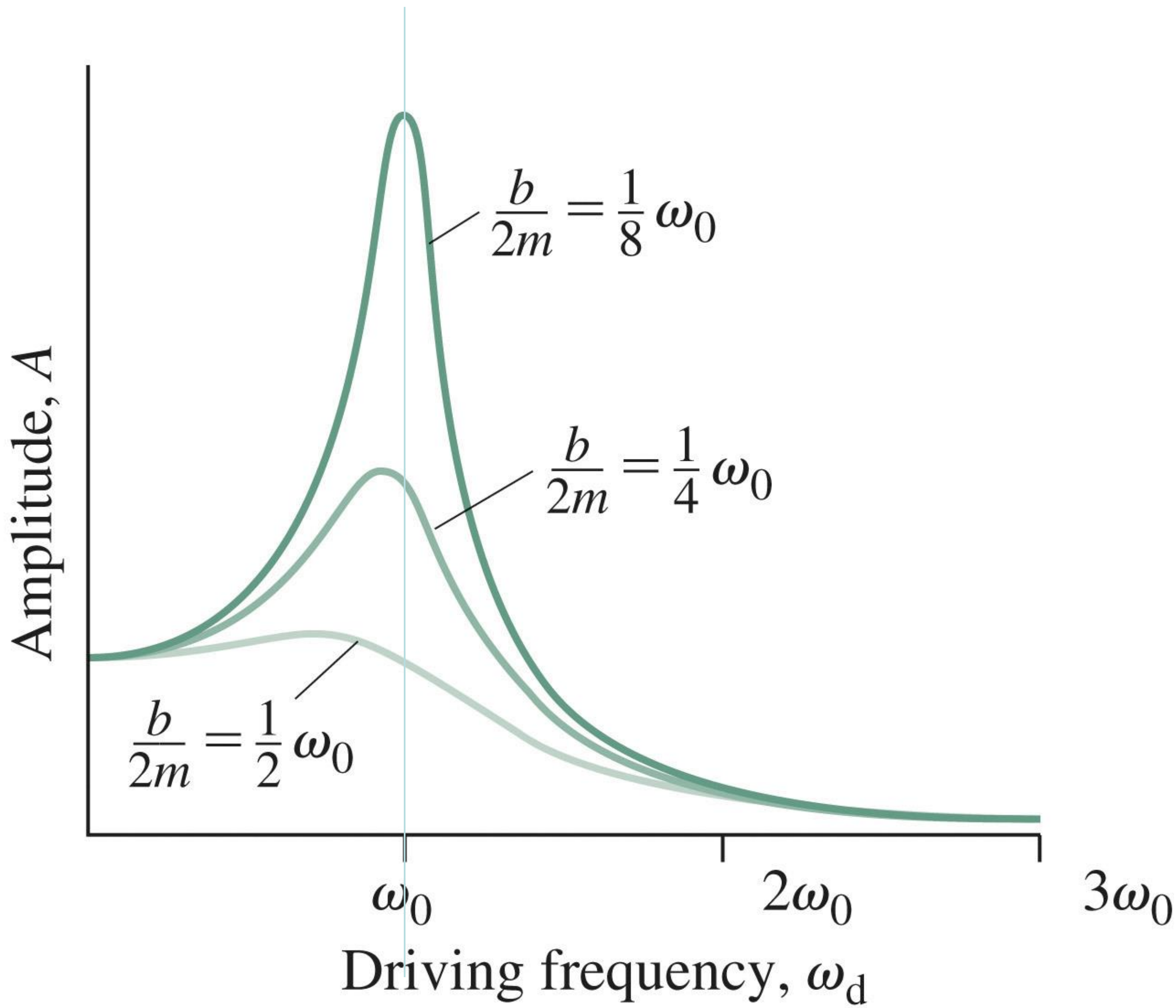


Fig. 1.7.2

$$A = \frac{F_{dw}}{\sqrt{m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega_{dw}{}^2\right)^2 + b^2\omega_{dw}{}^2}}$$

ω_{dw}	A
$\omega_{dw} \to 0$	$\frac{F_{dw}}{m\omega_0^2} = \frac{F_{dw}}{k}$
ω_0	$\frac{F_{dw}}{b\omega_0}$
$\omega_{dw} \to +\infty$	$A \to 0$

6.1.3 Amplituderesponsie - Amplituderesonantie



6.1.3 Amplituderesponsie - Amplituderesonantie

http://www.youtube.com/watch?v=aZNnwQ8HJHU

http://www.acoustics.salford.ac.uk/feschools/waves/shm4.htm

http://salfordacoustics.co.uk/sound-waves/oscillation/free-oscillations-forced-oscillations-and-resonance

6.1.3 Amplituderesponsie - Amplituderesonantie

$$A = \frac{F_{dw}}{\sqrt{m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega_{dw}{}^2\right)^2 + b^2\omega_{dw}{}^2}}$$

Amplituderesonantie

$$\textit{Amplitude is maximaal} \quad \Leftrightarrow$$

$$m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega_{dw}{}^2\right)^2 + b^2\omega_{dw}{}^2 = \text{minimaal}$$

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

6.1.4 Energieresonantie - Snelheidsresonantie

In het stationair regime

$$v_{p,\max} = A\omega_{dw} = \frac{\omega_{dw} F_{dw}}{\sqrt{m^2\left(\omega_0{}^2 - \omega_{dw}{}^2\right)^2 + b^2\omega_{dw}{}^2}}$$

Energieresonantie $\Leftrightarrow$ $E_{kin,max}$ maximaal

Snelheidsresonantie $\Leftrightarrow$ $v_{p,max}$ maximaal

Faseresonantie $\Leftrightarrow$ $v_{p,max}$ maximaal

6.1.6 Vermogensresonantie

$$P_{gem} = \frac{bA^2 \omega_{dw}{}^2}{2}$$

ω_{dw}	P_{gem}
$\omega_{dw} \rightarrow 0$	0
ω_0	$\dfrac{F_{dw}^2}{2b}$
$\omega_{dw} \rightarrow +\infty$	$P_{gem} \rightarrow 0$

6.1.6 Vermogensresonantie

$$P_{gem} = \frac{bA^2 {\omega_{dw}}^2}{2}$$

Vermogensresonantie $\Leftrightarrow$ P_{gem} maximaal

In het stationair regime

$$\Delta\omega_{dw} = \frac{b}{m} = FWHM$$

Full width at half maximum

$$P_{max} = \frac{F_{dw}^2}{2b}$$

6.1.6 Vermogensresonantie - FWHM

Gevr.: FWHM = $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ met ω_2 en ω_1 de pulsaties waarvoor $P_{gem} = P_{max}/2$

Opl.:

$$\frac{P_{max}}{2} = \frac{bA^2\omega_{dw}^2}{2}$$

$$\frac{P_{max}}{2} = \frac{1}{2}\frac{bF_{dw}^2\omega_{dw}^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega_{dw}^2)^2 + b^2\omega_{dw}^2}$$

$$\frac{F_{dw}^2}{2b} = \frac{bF_{dw}^2}{m^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{dw}} - \omega_{dw}\right)^2 + b^2}$$

$$m^2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{dw}} - \omega_{dw}\right)^2 + b^2 = 2b^2$$

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{dw}} - \omega_{dw}\right)^2 = \frac{b^2}{m^2}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_{dw}} - \omega_{dw} = \pm\frac{b}{m}$$

$$\omega_{dw}^2 \pm \frac{b}{m}\omega_{dw} - \omega_0^2 = 0$$

$$\omega_{dw} = \mp\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

Dit zijn 4 oplossingen waarvan 2 positieve en 2 negatieve. De positieve zijn:

$$\omega_2 = +\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

$$\omega_1 = -\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} + \omega_0^2}$$

Hiervoor geldt:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{b}{m}$$

6.1.7 Gemiddelde energie

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ku^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\left(\omega_{dw}{}^2\cos^2(\omega_{dw}t-\beta)+\omega_0{}^2\sin^2(\omega_{dw}t-\beta)\right)$$

$$E_{tot,gem} = \frac{1}{T_{dw}}\int_0^{T_{dw}} E_{tot}\,dt$$

$$= \frac{mA^2}{2}\left(\frac{\omega_{dw}{}^2+\omega_0{}^2}{2}\right)$$

In het stationair regime

6.1.8 Kwaliteitsfactor

Kwaliteitsfactor

$$Q = \omega_{dw} \frac{E_{tot,gem}}{P_{gem}}$$

$$Q_{\max} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{dw}}$$

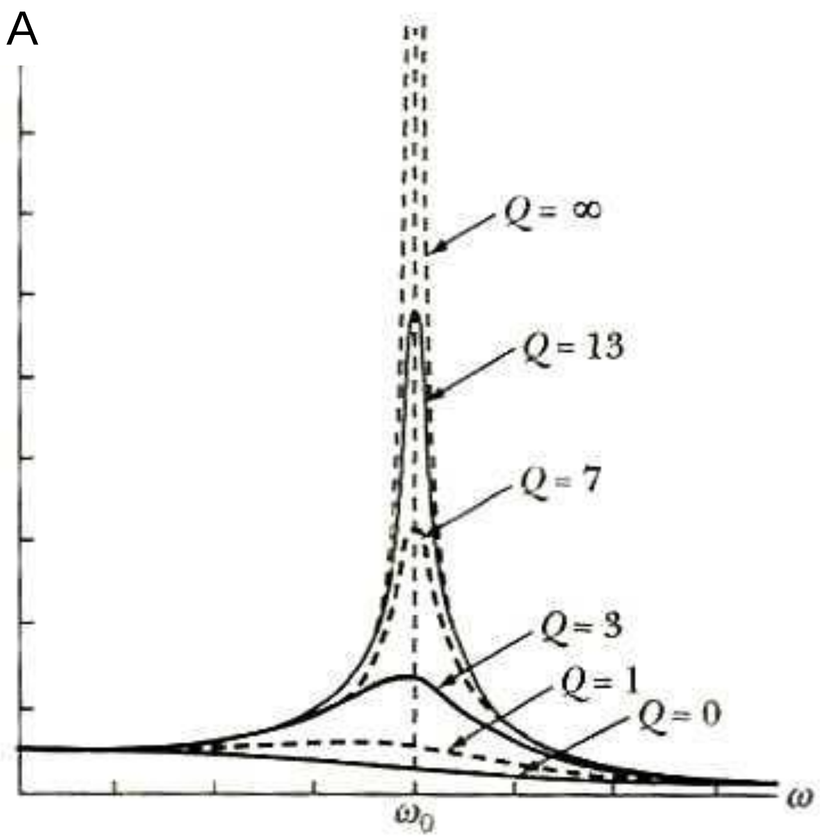
$$\Delta\omega_{dw} = \frac{b}{m} = FWHM$$

Full width at half maximum

Als b ↓ dan FWHM ↓ en Q_{max} ↑

6.1.8 Kwaliteitsfactor

- **Q** is een maat voor de dempingssterkte van de oscillator. Het is ook een maat voor de “scherpte” van de resonantie
- Voor zeer geringe demping: **Q** $\rightarrow \infty$ als **b** $\rightarrow$ **0**
- Grote demping $\Rightarrow$ **Kleine Q**
- Weinig demping $\Rightarrow$ **Grote Q**



- **Q** is **een maat voor de kwaliteit van de resonantie**!

6.1.8 Kwaliteitsfactor

Dempingsverhouding bij een gedempte trilling

$$\chi = \frac{b}{2m\omega_0}$$

$$Q_{\max} = \frac{m\omega_0}{b} \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{1}{2Q_{\max}}$$

$$\omega_1^{\,2} = \omega_0^{\,2} - \frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^{\,2} - \frac{\omega_0^{\,2}}{4Q_{\max}^{\,2}} = \omega_0^{\,2}\left(1 - \frac{1}{4Q_{\max}^{\,2}}\right)$$

6.1.8 Kwaliteitsfactor

- **Real physical oscillators:** Values of **Q** vary greatly!
- **Mechanical systems** (e.g., loudspeakers):

$$Q \approx 1 \text{ to a few } 100$$

- Quartz crystal oscillators & tuning forks: $Q \approx > 10^4$
- Highly tuned electrical circuits:

$$Q \approx 10^4 - 10^5$$

- **Atomic systems:** Electron oscillations in atoms $\Rightarrow$ Optical radiation. Sharpness of spectral lines limited by energy loss due to radiation. Classical minimum linewidth: $\Delta\omega \approx 2 \times 10^8\, \omega_0 \quad \Rightarrow \quad Q \approx 5 \times 10^7$
- **Largest known Q's**: Gas lasers: $Q \approx 10^{14}$

6.1.11.32 Voor een visceus gedempte oscillator gedreven door een sinusoïdale kracht, worden de pulsaties op halve hoogte van het maximumvermogen gegeven door

$$\omega_1 = 4.142\, {}^{rad}\!/_{s} \quad \text{en} \quad \omega_2 = 24.142\, {}^{rad}\!/_{s}$$

De massa m is 0.1 kg en de dempingsconstante b bedraagt 2 kg/s. Bepaal de eigenpulsatie van de trilling, de veerconstante k en de maximale kwaliteitsfactor Q.

6.2 De ongedempte gedwongen trilling

Voorbeeld van een resonantieverschijnsel:

Tacoma Bridge

London Millenium Bridge

6.3.1 Gedwongen trillingen in een RLC-seriecircuit

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_{\max}\sin(\omega_{br}t)$$

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + b\frac{du}{dt} + ku = F_{dw}\sin(\omega_{dw}t)$$

In het stationair regime

$$q_{stat} = q_{max}\sin(\omega_{br}t - \beta)$$

$$u_{stat} = A\sin(\omega_{dw}t - \beta)$$

$$q_{max} = \frac{U_{max}}{\sqrt{L^2({\omega_0}^2 - {\omega_{br}}^2)^2 + R^2{\omega_{br}}^2}}$$

$$A = \frac{F_{dw}}{\sqrt{m^2\left({\omega_0}^2 - {\omega_{dw}}^2\right)^2 + b^2{\omega_{dw}}^2}}$$

$$\tan\beta = \frac{R\omega_{br}}{L({\omega_0}^2 - {\omega_{br}}^2)}$$

$$\tan\beta = \frac{b\omega_{dw}}{m\left({\omega_0}^2 - {\omega_{dw}}^2\right)}$$

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\tan\beta = \frac{R\omega_{br}}{L\left(\frac{1}{LC} - {\omega_{br}}^2\right)} = \frac{R\omega_{br}}{\left(\frac{1}{C} - L{\omega_{br}}^2\right)} = \frac{R}{\left(\frac{1}{C\omega_{br}} - L\omega_{br}\right)}$$

In het stationair regime

$$q_{stat} = q_{max} \sin(\omega_{br} t - \beta)$$

$$I_{stat} = \frac{dq_{stat}}{dt} = q_{max}\omega_{dw} \cos(\omega_{br} t - \beta)$$

$$= I_{max} \sin(\omega_{br} t - \beta + 90°)$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{R}{\left(\frac{1}{C\omega_{br}} - L\omega_{br}\right)}$$

$$= I_{max} \sin(\omega_{br} t - \varphi)$$

$$\varphi = \beta - 90°$$

$$tg\varphi = \frac{\sin(\beta - 90°)}{\cos(\beta - 90°)}$$

$$tg\varphi = \frac{-\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{-1}{tg\beta}$$

$$tg\varphi = \frac{L\omega_{br} - \frac{1}{C\omega_{br}}}{R}$$

6.3.1 Gedwongen trillingen in een RLC-seriecircuit

In het stationair regime

$$q_{stat} = q_{max} \sin(\omega_{br} t - \beta)$$

$$I_{stat} = q_{max}\omega_{dw} \cos(\omega_{br} t - \beta)$$

$$= I_{max} \sin(\omega_{br} t - \beta + 90°)$$

$$= I_{max} \sin(\omega_{br} t - \varphi)$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{L\omega_{br} - \frac{1}{C\omega_{br}}}{R}}$$

$L\omega_{br} > \frac{1}{C\omega_{br}} \Leftrightarrow 0° < \varphi < 90°$: inductieve keten

$L\omega_{br} = \frac{1}{C\omega_{br}} \Leftrightarrow \varphi = 0°$: resistieve keten

$L\omega_{br} < \frac{1}{C\omega_{br}} \Leftrightarrow 0° > \varphi > -90°$: capacitieve keten

of $90° < \varphi < 180°$

6.3.1 Gedwongen trillingen in een RLC-seriecircuit

In het stationair regime

$$q_{stat} = q_{max} \sin(\omega_{br} t - \beta)$$

$$\begin{aligned} I_{stat} &= q_{max}\omega_{dw}\cos(\omega_{br} t - \beta) \\ &= I_{max}\sin(\omega_{br} t - \beta + 90°) \\ &= I_{max}\sin(\omega_{br} t - \varphi) \end{aligned}$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}$$

$$I_{max} = q_{max}\omega_{dw} = \frac{U_{max}\omega_{dw}}{\sqrt{L^2(\omega_0{}^2 - \omega_{br}{}^2)^2 + R^2\omega_{br}{}^2}} = \frac{U_{max}\omega_{dw}}{\sqrt{L^2\left(\frac{1}{LC} - \omega_{br}{}^2\right)^2 + R^2\omega_{br}{}^2}}$$

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{\sqrt{\left(\frac{1}{C\omega_{br}} - L\omega_{br}\right)^2 + R^2}}$$

$$\boxed{Z = \frac{U_{max}}{I_{max}} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega_{br} - \frac{1}{C\omega_{br}}\right)^2}}$$

6.3.1 Gedwongen trillingen in een RLC-seriecircuit

6.3.3.5 Een RLC-serieketen is aangesloten op een wisselspanning met amplitude 60 V en waarbij R=24Ω, L=25mH en C=0,10μF.
Bepaal de resonantiefrequentie, de kwaliteitsfactor (naar analogie met een massa-veersysteem), de frequentiebreedte op halve hoogte van de vermogenscurve, de stroomsterkte bij resonantie en de maximumspanning over de spoel bij resonantie.