Voor de analyse van de meetresultaten wordt het office-programma excel gebruikt. Wie de mogelijkheid heeft om een laptop mee te nemen, mag deze dus naar de open les van het labo Fysica meenemen. Als je geen laptop kan meenemen is dit geen probleem. Je zal sowieso kunnen samenwerken met andere studenten, waarvan zeker iemand een laptop zal hebben.

Veersystemen

Eén van de universele eigenschappen van elk fysisch systeem dat energie kan uitwisselen met zijn omgeving, is het spontaan streven naar een toestand van minimale energie. Die toestand bepaalt de zogenaamde evenwichtspositie. Dit is een toestand van stabiel evenwicht. Dit wil zeggen dat indien het systeem uit evenwicht gebracht wordt, het terug naar die evenwichtstoestand zal streven.

Indien de resulterende terugroepende kracht daarbij evenredig is met de uitwijking u t.o.v. de evenwichtspositie, zal het systeem een **enkelvoudige harmonische beweging** uitvoeren. Zo'n trillend systeem wordt een enkelvoudige harmonische oscillator genoemd. Voorbeelden hiervan zijn de verticale beweging van een massa aan een veer in het zwaarteveld, een trillende vloeistofkolom, een slinger, …

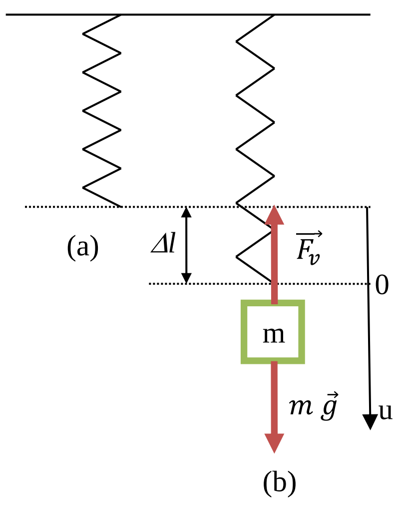
Bij de verticale beweging van een massa m aan een veer in het zwaarteveld wordt de terugroepende kracht veroorzaakt door de veerkracht F_v, waarvan de grootte algemeen gegeven door de wet van Hooke:

$$\left|\overrightarrow{F_v}\right| = k|\Delta l| \tag{1}$$

met Δl de lengteverandering van de veer ten opzichte van de onbelaste toestand en k de krachtconstante van de veer of de veerconstante.

Wanneer de veer belast wordt met massa, streeft het systeem opnieuw naar evenwicht. Dit evenwicht wordt bereikt als $\sum \vec{F} = 0$. Op de massa werkt, zoals te zien is in Figuur 1, enerzijds de zwaartekracht en anderzijds de veerkracht. Rekening houdende met de zin van de u-as wordt evenwicht bereikt als:

$$\sum F_u = mg - k\Delta l = 0 \tag{2}$$



Figuur 1: (a) Schema van de opstelling van de onbelaste veer, verticaal opgehangen. (b) Schema van de opstelling van de belaste veer in evenwicht.

De bekomen evenwichtsstand wordt daarbij als oorsprong van de u-as gekozen. Wanneer de massa uit evenwicht gebracht wordt door aan de massa een uitwijking *u* te geven volgens de u-as, zal de heersende veerkracht de massa opnieuw in de evenwichtsstand trachten te brengen. Vermits de resulterende kracht nu verschillend is van nul, zal de massa een versnelling ondervinden:

$$\sum F_u = mg - k(\Delta l + u) = - ku = ma \tag{3}$$

of

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku \tag{4}$$

Deze differentiaalvergelijking is de trillingsvergelijking van de enkelvoudige harmonische beweging. De oplossing ervan beschrijft de positie van de massa als functie van de tijd ten opzichte van de evenwichtsstand. In de veronderstelling dat er geen wrijving is, zal de trilling onveranderd voortduren. Daarom wordt ook gesproken van een **vrije, ongedempte trilling**. De massa m beweegt op en neer met een bepaalde frequentie die niet afhangt van de amplitude van de trilling. Deze frequentie f_0 wordt de **natuurlijke trillingsfrequentie** of **eigenfrequentie** van de beweging genoemd. Zij wordt gegeven door:

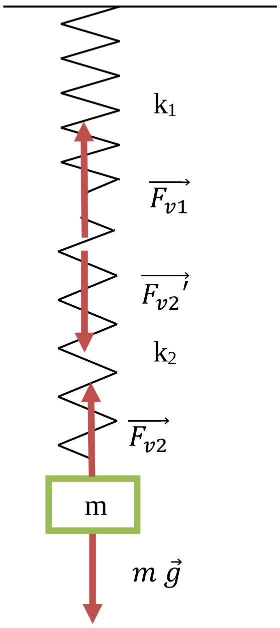
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Merk op dat in formule (5) uitgegaan wordt van een massaloze veer. Om de invloed van de (niet-verwaarloosbare) massa van de veer mee in rekening te brengen, moet in formule (5) de effectieve massa m_{eff} gebruikt worden, gegeven door:

$$m_{eff} = m + \frac{m_v}{3} \tag{6}$$

met m de massa van de belasting en m_v de massa van de veer.

Twee gekoppelde veren langs dezelfde kant van een massa



Figuur 2: Schema van de opstelling met de massa onder twee gekoppelde

In Figuur 2 wordt een veersysteem voorgesteld waarbij een massa onderaan twee gekoppelde veren is gehangen. De twee veren zijn hier in serie gekoppeld. Als referentiestand wordt de evenwichtsstand van de massa in het zwaarteveld van de aarde genomen. Er geldt:

$$\sum F_u = mg - k_2\Delta l_2 = 0 \tag{7}$$

De veerkracht op de massa (F_{v2}) is in grootte gelijk aan de veerkrachten (aangeduid met F_{v2}' en F_{v1} in Figuur 2) die de veren op elkaar uitoefenen, dus geldt:

$$k_1\Delta l_1 = k_2\Delta l_2 \tag{8}$$

met Δl_i de respectievelijke verlenging van veer i ten opzichte van haar onbelaste toestand. Ook geldt dat:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 \tag{9}$$

met Δl de totale uitrekking van beide veren samen. Eliminatie van Δl_1 en Δl_2 uit vergelijkingen (7), (8) en (9) geeft dan:

$$mg = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\Delta l = k_s\Delta l \tag{10}$$

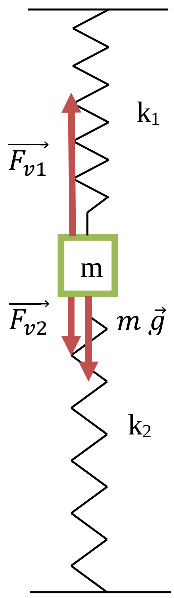
Bijgevolg kunnen de twee veren gezien worden als 1 veer met veerconstante k_s die voldoet aan volgende vergelijking:

$$k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad of \quad \frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \qquad (11)$$

Door de massa een uitwijking *u* te geven wordt de massa uit evenwicht gebracht en werkt een resulterende kracht $\sum F_u = -k_s u$ op de massa. Daardoor ontstaat opnieuw een vrije, ongedempte trilling. Door een analoge afleiding als voor formule (4) kan besloten worden dat de massa zal trillen met frequentie:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)\, m}} \qquad (12)$$

Twee veren langs weerszijden van een massa



Figuur 3: Schema van de opstelling met de massa tussen de twee

In een tweede situatie wordt de massa tussen de twee veren geplaatst zoals in Figuur 3. De veren bevinden zich dus langs weerszijden van de massa, waarbij de onderste veer onderaan aan een vast punt wordt bevestigd en wel zodanig dat beide veren enigszins uitgerekt zijn. De veren zijn nu parallel gekoppeld.

Bij evenwicht oefenen beide veren een kracht uit op de massa m, waarbij geldt dat:

$$\sum F_u = mg + k_2 \Delta l_2 - k_1 \Delta l_1 = 0 \qquad (13)$$

met Δl_i de respectievelijke verlenging van veer i ten opzichte van haar onbelaste toestand.

Als nu een uitwijking *u* aan de massa gegeven wordt, dan geldt voor de resulterende kracht:

$$\sum F_u = mg + k_2 (\Delta l_2 - u) - k_1(\Delta l_1 + u) = -(k_1 + k_2)\, u = -k_p\, u \qquad (14)$$

De krachtconstante k_p van dit samengesteld veersysteem wordt dus gegeven door:

$$k_p = k_1 + k_2 \qquad (15)$$

Uit formule (14) volgt dat de beweging opnieuw een enkelvoudige harmonische beweging is met frequentie:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_p}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad (16)$$

Opdracht

1. Statische bepaling van krachtconstanten

Bepaal en noteer bij al deze opdrachten ook steeds de correcte meetfouten (AF).

- Weeg de opeenvolgende belastingen (vb. m_1; m_1+m_2; m_1+m_2+m_3; …).
- Meet de rustlengte l_0 van de eerste veer. Belast de veer achtereenvolgens met 1, 2, 3, 4 en 5 massa's en meet telkens de lengte *l* van de veer. Bepaal hieruit de uitrekking Δl (zie Figuur 1) in functie van de belasting.
- Herhaal de meting voor de tweede veer en noteer alle metingen overzichtelijk in een tabel.
- Zet de meetresultaten van Δl in functie van m voor beide veren uit in eenzelfde grafiek als twee verschillende datareeksen.
- Pas lineaire regressie toe op elke reeks afzonderlijk en teken de bijhorende best passende rechten door de meetpunten. Plaats de vergelijkingen bij de bijhorende rechten in de grafiek. Noteer de regressiewaarden met AF (gebruik hiervoor "regressie.xls").

- Herschrijf formule (2) in de vorm y = a x + b waarbij y en x de veranderlijken zijn die op de y- en x-as zijn uitgezet. Op deze manier worden formules voor a en b verkregen. Bereken hieruit de krachtconstanten van beide veren (k_1 en k_2) met AF. Bespreek ook de waarden van b.

2. Dynamische bepaling van krachtconstanten

Bepaal en noteer telkens de meetfouten (AF) bij de hierna volgende opdrachten.

2.1 Twee veren in serie

- Haak de veren in elkaar en belast ze onderaan achtereenvolgens met 1, 2, 3, 4 en 5 massa's (zie Figuur 2).
- Geef telkens een kleine verticale uitwijking aan de opeenvolgende belastingen en meet telkens de tijd voor 20 perioden T (1 meting van 20T per belasting is voldoende).
- Hervorm formule (5) zodanig dat een lineair verband ontstaat tussen een functie van T langs de Y-as en m langs de X-as. Zet de bijhorende waarden uit in grafiek.
- Pas lineaire regressie toe en plaats de vergelijking van de rechte in de grafiek. Noteer de regressiewaarden met hun AF
- Bereken de krachtconstante k_s van dit gekoppelde systeem (met AF) uit de bekomen regressiewaarden en bespreek de waarde van b.
- Bereken k_s ook met formule (11) a.d.h.v. de eerder bekomen waarden voor k_1 en k_2 (met AF).
- Vergelijk beide waarden voor k_s en bespreek.

2.2 Twee veren in parallel

- Maak de opstelling van Figuur 3. Hang de veer met de grootste veerconstante bovenaan met daaraan alle massa's. Bevestig de tweede veer aan de massa's en span de veren op met behulp van het tweede haakje. Als de veren niet voldoende opgespannen kunnen worden, verwijder dan een of meerdere massa's.
- Geef een kleine verticale uitwijking aan de massa's en meet de tijd voor 20 perioden minstens 10 keer.
- Bereken de gemiddelde periode (met AF).
- Bereken de krachtconstante k_p van dit gekoppelde systeem a.d.h.v. formule (16) uit de periode (met AF).
- Bereken k_p ook met formule (15) a.d.h.v. de eerder bekomen waarden voor k_1 en k_2 (met AF).
- Vergelijk beide waarden voor k_p en bespreek.

Appendix: Formules meetfouttheorie

$$AF_{gem} \equiv \frac{STDEV}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

R=X+Y..-Z $\quad \Delta R^2 = \Delta X^2 + \Delta Y^2 .. + \Delta Z^2$

R=XY/Z $\quad \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2$

R=X^n $\quad \left|\frac{\Delta R}{R}\right| = \left|n\frac{\Delta X}{X}\right|$

R=f(X) $\quad |\Delta R| = |f'(X)\Delta X|$

R=f(X,Y,Z,...) $\quad \Delta R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\Delta X\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta Z\right)^2 \cdots$