13. Een lichtstraal volgens de rechte $L: 2x = y = 2z - 2$ wordt teruggekaatst op het vlak α : $x+y+z=1$. Bepaal de vergelijking van de teruggekaatste straal.
14. Bereken de afstand tussen de rechten A en B met

$$A: \begin{cases} x-2y=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad \text{en} \quad B: \begin{cases} 7x-4y-4z=3 \\ 5x-4z=9 \end{cases}$$

15. Bepaal de projectie van de rechte $A: \begin{cases} x+2y-3z+5=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases}$ op het XY-vlak.
16. Bepaal de gemeenschappelijke loodlijn van $A_1 : \begin{cases} x+y=6 \\ x-z=3 \end{cases}$ en $A_2 : x+2 = \dfrac{y+8}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$
17. Bepaal de afstand tussen $A: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ en $B: \begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-y-2z=-4 \end{cases}$.
18. Bepaal middelpunt en straal van het boloppervlak $3x^2+3y^2+3z^2-8x+12y-10z+10=0$.
19. Stel de vergelijking op van het boloppervlak:
    (a) met middelpunt $m(4,-4,-2)$ en dat door de oorsprong gaat
    (b) met middelpunt $m(3,-2,1)$ en dat door het punt $a(2,-1,-3)$ gaat
    (c) waarvan de punten $a(2,-3,5)$ en $b(4,1,-3)$ de uiteinden van een diameter zijn
    (d) met middelpunt $m(3,1,5)$ en rakend aan het vlak $2x+5y-z+21=0$
    (e) gaande door de vier punten $a(0,0,4), b(0,2,0), c(8,0,0)$ en $d(-2,1,-1)$
    (f) met straal 3 en rakend aan het vlak $x+2y+2z+3=0$ in het punt $a(1,1,-3)$
    (g) met middelpunt$(-4,-2,3)$ en rakend aan het YZ-vlak.
20. Bepaal middelpunt en straal van de cirkel $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z=8 \\ 3y-4z+3=0 \end{cases}$
21. Stel de vergelijking op van de cirkel door de punten $a(0,0,1)$, $b(1,0,1)$ en $c(0,1,1)$.
22. Stel de vergelijking op van de cirkel met middelpunt $m(1,-1,-2)$ en die van de rechte $\begin{cases} 2x-y+2z-12=0 \\ 4x-7y-z+6=0 \end{cases}$ een koorde afsnijdt met lengte 8
23. Stel de vergelijking op van de bol die door de oorsprong gaat alsook door

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$$

24. Snijdt het vlak $\alpha : 2x-2y+z=8$ de bol $x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$?
    Bepaal het punt van de bol dat het verst verwijderd is van het vlak.
25. Bepaal de vlakken loodrecht op $L: \begin{cases} 2x+y+2z=4 \\ -4x+y-z=2 \end{cases}$ zodat de doorsnede met de bol $x^2+y^2+z^2+2x-2y=23$ een cirkel is met straal 3.
26. Bepaal het middelpunt van de bol(len) met straal $R=2$ die door de cirkel C met vergelijking $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2y-2z=0 \\ z=2 \end{cases}$ gaan.
27. Zet om van cartesische coördinaten naar cilindercoördinaten:

    $a(1,0,0)$, $b(1,1,1)$, $c(-2,2,\sqrt{3}-3)$
28. Zet om van cilindercoördinaten naar cartesische coördinaten:

    $a\left(2,\frac{\pi}{3},3\right)$, $b(1,1,1)$, $c\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},3\right)$
29. Zet om van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten:

    $a(1,0,0)$, $b(1,1,1)$, $c(-2,-2,-2)$

30. Zet om van bolcoördinaten naar cartesische coördinaten:

    $a(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$, $\quad b(1,1,1)$, $\quad c(2, \frac{\pi}{4}, 0)$

31. Zet om van cilindercoördinaten naar bolcoördinaten:

    $a(1,0,0)$, $\quad b(1,1,1)$, $\quad c(2, \frac{5\pi}{6}, -4)$

32. Zet om van bolcoördinaten naar cilindercoördinaten:

    $a(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$, $\quad b(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$, $\quad c(4, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

33. Zet om naar cartesische coördinaten:
    (a) $\phi = -\frac{\pi}{4}$
    (b) $\rho = 2 \sin\phi \, \cos\vartheta$
34. Zet om naar cilinder- en bolcoördinaten:
    (a) $y^2 = x$
    (b) $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

11.2 Functies van meerdere variabelen

1. Bepaal het domein en beeld van de volgende functies.

   (a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (b) $z = \sin xy$

   (c) $z = |x| - |y|$

   (d) $z = \dfrac{1}{x - y}$

   (e) $z = \ln^{-1}(x^2 + y^2 - 3)$

   (f) $z = \pi - \mathrm{Bgsin}(x^2 + 2y^2)$

2. Bepaal

   (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ als $z = e^{xy(x^2+y^2)}$

   (b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ als $u = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$

   (c) $\dfrac{\partial r}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial r}{\partial \vartheta}$ als $r = \rho^2 \sin^4 \vartheta$

   (d) dz als $z = \mathrm{Bgtg}\dfrac{x+y}{x-y}$

   (e) du als $u = x^{y^2 z}$

   (f) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ als $z = \ln \mathrm{tg}\frac{y}{x}$

   (g) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ in het punt $(0, \frac{\pi}{2})$ als $u = \sin(x + \cos y)$

   (h) $d^2 z$ als $z = e^{xy}$

   (i) $d^2 u$ als $u = xyz$

   (j) $d^3 z$ als $z = e^x \cos y$

   (k) $df(1,2)$ en $d^2 f(1,2)$ als $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

3. Bewijs dat $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ voldoet aan $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

4. Bewijs dat $z = f(x)g(y)$ voldoet aan: $z \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$

5. Bereken $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix}$ indien $\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$

6. Geef een benaderende waarde voor

   (a) $\mathrm{Bgtg}(\frac{1.02}{0.95})$

   (b) $\sqrt{3.99 \times 4.02}$

7. Gegeven $\phi = 2x^2y - xz^3$. Bereken $\vec{\nabla}\phi$ en $\vec{\nabla}\phi_p$ in $p(1, -1, 2)$.

8. Gegeven $\phi = x^2yz^3$.
   Bereken $\vec{\nabla}\phi$ en de richting van de grootste helling van ϕ in het punt $p(1, 0, 2)$.

9. Gegeven $f = x + y^2 - 3xy + 5y - 1$. In welke richting in het punt $p(1, 1)$ verandert de functiewaarde het meest?

10. Stel de vergelijking op van het raakvlak en van de normaal aan het oppervlak

    (a) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ in $p(1, -1, 1)$

    (b) $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ in $p(3, -1, 2)$.

    (c) $z = 2\sin x \cos y$ in $p(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, 1)$