3 Affiene transformaties

Opgave: in de theorie hebben we gezien dat als de matrix A de inproducten behoudt, dus $(A\vec{u}) \cdot (A\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, A orthogonaal is, $A^T = A^{-1}$. Wat indien een matrix A de kruisproducten behoudt, d.w.z. voor alle $\vec{u}$ en $\vec{v}$ geldt dat $(A\vec{u}) \times (A\vec{v}) = A(\vec{u} \times \vec{v})$?

We merken eerst op dat $A = I_3$ en $A = 0_{3\times 3}$ voldoen aan deze eis, maar bv. $A = -I_3$ niet.

Schrijf $\vec{a} = A\vec{e}_1$, $\vec{b} = A\vec{e}_2$, $\vec{c} = A\vec{e}_3$ voor de kolommen van A. Uit $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ volgt dat $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Dan volgt uit $\vec{e}_2 \times (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1$ dat $\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}$. Maar gelet op de identiteit voor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ is het linkerlid ook $(\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{b}$.

Eerste geval: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn lineair onafhankelijk. Dan volgt uit $(\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{b} = \vec{a}$ dat $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$ en $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$. Na cyclische permutatie volgt dat de kolommen orthonormaal zijn zodat A orthogonaal is. Verder volgt uit $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ dat $\det A = 1$.

Tweede geval: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn lineair afhankelijk, bv. $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Maar $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ staat loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$, zodat $\vec{c} = \vec{0}$. Dan is $\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ en $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$ zodat $A = 0_{3\times 3}$.

Samengevat: $A \in \mathrm{SO}(3) \cup \{0_{3\times 3}\}$.

Opgave: ($\mathrm{SO}(3)$*doku.) Vul de open vakjes in zodat een 3D-rotatiematrix verkregen wordt (d.w.z.* $A^T A = I_3$ *en* $\det A = 1$*). Één oplossing volstaat als er meerdere zijn.*

1. *(niveau 1)*

$$\begin{pmatrix} -1 & \square & \square \\ \square & -1 & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & 1 & \square \end{pmatrix}$$

Oplossing: elke ± 1 dwingt de rest van de rij en kolom tot nul. Verder moet de determinant op 1 uitkomen, dus de oplossingen zijn

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *(niveau 2)*

$$\begin{pmatrix} 0 & \square & \square \\ \square & 0 & \square \\ \square & \square & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & \square & \square \\ 4/5 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Oplossing. Eerste matrix: een mogelijkheid om een nuldiagonaal te maken vindt men in een permutatie van de coördinaten. Tweede matrix: $3^2 + 4^2 = 5^2$ dus de positie a_{31} is zeker nul; dan kan men $\vec{e}_3$ kiezen voor de tweede kolom en volgt de derde uit het kruisproduct van de eerste twee (om de determinant $+1$ te krijgen).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *(niveau 3)*

$$\begin{pmatrix} -4/9 & 1/9 & \square \\ 7/9 & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6/11 & \square & 9/11 \\ \square & \square & -6/11 \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

Oplossing. Eerste matrix: posities a_{13} en a_{31} volgen uit de som van de kwadraten, die 1 moet zijn; $\pm 8/9$ resp. $\pm 4/9$, neem bv. de plus in beide gevallen. De posities a_{22} en a_{32} voldoen aan het stelsel $(1/81) + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$, $(-4/81) + (7/9)a_{22} + (4/9)a_{32} = 0$. Een mogelijke oplossing is $a_{22} = -4/9$ en $a_{32} = 8/9$ waarvoor de derde kolom bepaald kan worden als kruisproduct van de eerste twee. Tweede matrix: analoog.

$$\begin{pmatrix} -4/9 & 1/9 & 8/9 \\ 7/9 & -4/9 & 4/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6/11 & 2/11 & 9/11 \\ 46/55 & -3/55 & -6/11 \\ -3/55 & 54/55 & -2/11 \end{pmatrix}$$

4. *(niveau 4)*

$$\begin{pmatrix} -1/3 & \square & \square \\ \square & -2/3 & \square \\ \square & \square & 2/15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a^2+1} & \square & \square \\ \square & \frac{2a}{2a^2+1} & \square \\ \square & \square & -\frac{2a}{2a^2+1} \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Oplossing. De formule met q_0 tot en met q_3 uit de slides leidt ertoe dat men deze waarden kan afleiden uit de diagonaalelementen, want het stelsel

$$\begin{cases} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 &= a_{11} \\ q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 &= a_{22} \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 &= a_{33} \\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1 \end{cases}$$

is lineair in de symbolen q_0^2 tot en met q_3^2, zodat de oplossing gegeven wordt door

$$q_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}, \quad q_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}},$$
$$q_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}}, \quad q_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}},$$

waarbij alle $\pm$ onafhankelijk zijn van elkaar. Mogelijke oplossingen zijn ($(q_0, q_1, q_2, q_3) = (1, 3, 2, 4)$ resp. $(-a, a, a+1, 1-a)$)

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & 14/15 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & 2/15 \end{pmatrix}, \frac{1}{2a^2+1} \begin{pmatrix} -1 & 2a & -2a^2 \\ 2a^2 & 2a & 1 \\ 2a & 1-2a^2 & -2a \end{pmatrix}$$

Opmerking: men kan deze resultaten ook via Maple vinden:

```
with(LinearAlgebra);
rotm := <<
    q0^2 + q1^2 - q2^2 - q3^2 | -2*q0*q3 + 2*q1*q2 | 2*q0*q2 + 2*q1*q3>
    , <
    2*q0*q3 + 2*q1*q2 | q0^2 - q1^2 + q2^2 - q3^2 | -2*q0*q1 + 2*q2*q3>
    , <
    -2*q0*q2 + 2*q1*q3 | 2*q0*q1 + 2*q2*q3 | q0^2 - q1^2 - q2^2 + q3^2>
    >/(q0^2 + q1^2 + q2^2 + q3^2);
{solve({rotm[1, 1] = -4/9, rotm[1, 2] = 1/9, rotm[2, 1] = 7/9},
    {q1, q2, q3})};
seq(subs(w, rotm), w = %);
{solve({rotm[1, 1] = 6/11, rotm[1, 3] = 9/11, rotm[2, 3] = -6/11},
    {q1, q2, q3})};
{seq(subs(w, rotm), w = %)};
{solve({rotm[1, 1] = -1/3, rotm[2, 2] = -2/3, rotm[3, 3] = 2/15},
    {q1, q2, q3})};
{seq(subs(w, rotm), w = %)};
```

met respectievelijk vier, vier en acht oplossingen.

Opgave: (niveau 3) Gezocht: een isometrie die de oorsprong fixeert, het punt $(12, 12, 1)$ naar de z-as afbeeldt en het punt $(27, -4, 13)$ naar het yz-vlak (d.w.z. $x = 0$) afbeeldt.
Bepaal deze isometrie als samenstelling van achtereenvolgende rotaties om de z-as, de x-as en opnieuw de z-as.

Opmerking: de drie rotatiehoeken van een dergelijke samenstelling van asrotaties worden Eulerse hoeken genoemd.

Oplossing. De eerste stap is een rotatie R_1 om de z-as, dus van de vorm $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, waarbij $\alpha = \cos h$ en $\beta = \sin h$ zodat $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. We willen dat deze eerste rotatie nuttig werk verricht: het einddoel is dat de x en y coördinaat van de afbeelding van $(12, 12, 1)$ beide nul zijn. We beginnen met de x-coördinaat en eisen dus $12\alpha - 12\beta = 0$, d.w.z. $\alpha = \beta$ waaruit $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$. De eerste rotatie is dus $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en zij beeldt $(12, 12, 1)$ af op $(0, 12\sqrt{2}, 1)$.

De tweede stap is een rotatie R_2 om de x-as, dus van de vorm $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$, waarbij $\alpha = \cos h$ en $\beta = \sin h$ zodat $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. We willen dat zij $(0, 12\sqrt{2}, 1)$ afbeeldt op een punt op de z-as, dus met y-coördinaat nul. Dat betekent $12\sqrt{2}\alpha - \beta = 0$ of nog $\beta = 12\sqrt{2}\alpha$. Substitutie in $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ geeft $289\alpha^2 = 1$ met oplossing bv. $\alpha = 1/17$ zodat $\beta = 12\sqrt{2}/17$. De tweede rotatie is daarom $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/17 & -12\sqrt{2}/17 \\ 0 & 12\sqrt{2}/17 & 1/17 \end{pmatrix}$ en beeldt $(0, 12\sqrt{2}, 1)$ af op $(0, 0, 17)$.

De samenstelling $R_2 \circ R_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/34 & \sqrt{2}/34 & -12\sqrt{2}/17 \\ 12/17 & 12/17 & 1/17 \end{pmatrix}$ beeldt het andere punt, $(27, -4, 13)$, af op $(31\sqrt{2}/2, -17\sqrt{2}/2, 17)$, hetgeen nog niet in het yz vlak ligt. Een derde rotatie R_3 om de z-as is nog nodig, zij is van de vorm $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en de eis is nu dat $(31\sqrt{2}/2)\alpha + (17\sqrt{2}/2)\beta = 0$ met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, hetgeen mogelijk is voor $\alpha = 17\sqrt{2}/50$, $\beta = -31\sqrt{2}/50$ dus

$\begin{pmatrix} 17\sqrt{2}/50 & 31\sqrt{2}/50 & 0 \\ -31\sqrt{2}/50 & 17\sqrt{2}/50 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deze matrix beeldt$(31\sqrt{2}/2, -17\sqrt{2}/2, 17)$ af op $(0, -25, 17)$. De resulterende rotatie $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ is dan $\frac{1}{425}\begin{pmatrix} 160 & -129 & -372 \\ -255 & 272 & -204 \\ 300 & 300 & 25 \end{pmatrix}$.

Opmerking. Ook hier kan Maple de oplossing vinden:

```
    RR := <<cos(h3) | -sin(h3) | 0>, <sin(h3) | cos(h3) | 0>, <0 | 0 | 1>>
         . <<1 | 0 | 0>, <0 | cos(h2) | -sin(h2)>, <0 | sin(h2) | cos(h2)>>
         . <<cos(h1) | -sin(h1) | 0>, <sin(h1) | cos(h1) | 0>, <0 | 0 | 1>>
        ;
    RR . <12, 12, 1>;
    RR . <27, -4, 13>;
    {solve({%[1] = 0, `%%`[1] = 0, `%%`[2] = 0}, explicit)};
    {seq(subs(w, RR), w = %)};
```

met in totaal vier oplossingen

```
           3 Pi                    1/2                  31
{{h1 = - ----, h2 = -arctan(12 2   ), h3 = -arctan(--)},
            4                                           17

             3 Pi                    1/2                     31
    {h1 = - ----, h2 = -arctan(12 2   ) + Pi, h3 = arctan(--)},
              4                                              17

            Pi                    1/2                    31
    {h1 = ----, h2 = arctan(12 2   ) - Pi, h3 = arctan(--)},
             4                                           17

            Pi                    1/2                 31
    {h1 = ----, h2 = arctan(12 2   ), h3 = -arctan(--)}}
             4                                        17
```

```
  [-32     129     372 ]  [-32      129     372]  [32      -129     -372]
  [---     ---     --- ]  [---      ---     ---]  [--      ----     ----]
  [85      425     425 ]  [85       425     425]  [85      425      425 ]
  [                    ]  [                    ]  [                     ]
  [        -16      12 ]  [         16      -12]  [        -16       12 ]
 {[3/5     ---      -- ], [-3/5     --      ---], [3/5     ---       -- ],
  [        25       25 ]  [         25      25 ]  [        25        25 ]
  [                    ]  [                    ]  [                     ]
  [12      12          ]  [-12      -12     -1 ]  [-12     -12       -1 ]
  [--      --      1/17]  [---      ---     -- ]  [---     ---       -- ]
  [17      17          ]  [17       17      17 ]  [17      17        17 ]

     [ 32     -129    -372]
     [ --     ----    ----]
     [ 85     425     425 ]
     [                    ]
     [         16     -12 ]
     [-3/5     --     --- ]}
     [         25     25  ]
     [                    ]
     [ 12      12         ]
     [ --      --     1/17]
     [ 17      17         ]
```

Opgave: Gegeven de verzameling V der punten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ waarvoor $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. *(niveau 1) welke ruimtelijke figuur is dit?*

Oplossing: dit is een omwentelingskegel.

2. *(niveau 2) wat is de inhoud ervan, en wat is de oppervlakte van de zijvlakken?*

Oplossing: de hoogte van de kegel is 1, de straal van zijn grondvlak is 1, de oppervlakte van het grondvlak is π, de inhoud van de kegel is $\pi/3$ en de oppervlakte van de mantel is $\sqrt{2}$ maal de omtrek van de grondcirkel 2π, gedeeld door 2, dus $\pi\sqrt{2}$.

3. *(niveau 3) gegeven $a > 0$, $b > 0$ beelden we V af via de affiene transformatie met matrix* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 7 \\ 0 & a & 0 & 15 \\ 0 & 0 & b & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Bepaal de inhoud van het beeld, en de oppervlakte van de zijvlakken.

Oplossing. De translatie heeft geen enkele invloed op de afmetingen, enkel de herschaling van de assen moet in rekening gebracht worden. De nieuwe hoogte is b, de nieuwe straal van het grondvlak a, de oppervlakte van het grondvlak is πa^2, de inhoud van de kegel is $\pi a^2 b/3$ en de oppervlakte van de mantel is $\sqrt{a^2+b^2}$ maal $2\pi a$ gedeeld door 2, dus $\pi a\sqrt{a^2+b^2}$.

Opmerking: volumes schalen gewoon via het product van de schaalfactoren (of algemeen via $|\det A| = |\det M|$); oppervlakken en lengtes schalen niet op uniforme wijze als de assen afzonderlijk geschaald worden.

4 Krommen en oppervlakken

- rechten en vlakken ingevoerd meetkundig via axioma's, vectorieel via parametervergelijkingen $P = P_1 + t\vec{u}_1$ resp. $P = P_1 + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$, $s, t \in \mathbb{R}$
- rechten 4 vrijheidsgraden, vlakken 3: zeer specifieke deelverzamelingen beschrijfbaar met weinig parameters
- algemene krommen en oppervlakken hebben oneindig veel vrijheidsgraden, elk deelinterval of deelbereik kan variëren
- daarom geen axiomatische maar productieve definitie, via parametervoorstellingen
- om meetkundig betekenis te hebben, zijn er eisen aan parametervoorstellingen

4.1 Krommen

- vectorfunctie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \to f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, domein $t \in]a, b[$; indien haar componenten allemaal afleidbaar zijn, afgeleide $f' : t \to (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

- $f(t)$ associëren met vrije vector $f_1(t)\vec{e}_1 + f_2(t)\vec{e}_2 + f_3(t)\vec{e}_3$; als O gekend is, met overeenstemmende gebonden vector en uiteindelijk met punt $P(t) \in E_O$ met cartesiaanse coördinaten $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$; compacte notatie $P(t)$ en coördinaten $(x(t), y(t), z(t))$

- $P(t)$ lijkt op de baan van een stoffelijk punt voor parameter t de tijd; op een dergelijke baan kan het punt stilstaan voor een zekere tijd, opnieuw vertrekken, of ook achterwaarts bewegen, door impulsieve krachten abrupt in snelheid toenemen... dit zijn fysische, maar *geen meetkundige* eigenschappen van de baan

Gladde boog $\mathcal{C} \subset E$ is per definitie het beeld van vectorfunctie $P(t)$ voor $t \in]a, b[$ waarbij in dat interval:

- P injectief is: elke $P(t)$ wordt maar één keer bereikt
- P continu is, afleidbaar, en P' is continu: geen sprongen in de ruimte, overal een "eindige snelheid", en geen abrupte versnellingen
- $\|P'(t)\| \neq 0$: er is nooit stilstand, zelfs niet voor een ogenblik.

Dan is die P een zgn. parametervoorstelling van $\mathcal{C}$. Die is *nooit uniek*: elke continu afleidbare afbeelding $\phi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ waarvoor $\phi'(u) \neq 0$ zorgt voor een andere parametrisatie $u \to P(\phi(u))$ van dezelfde gladde boog $\mathcal{C}$.

Nog wat terminologie…

- als $P(t)$ tot $P(a)$ continu uitbreidbaar, dan is dit zgn. beginpunt; idem voor b en eindpunt
- als begin- en eindpunt samenvallen heet $\mathcal{C}$ gesloten
- als alle punten ervan in een vlak liggen, heet $\mathcal{C}$ vlak.

Voorbeelden

- grafiek van gladde (= continu afleidbare) functie $y = f(x)$, $a < x < b$, is gladde boog met voorstelling $P(x) = (x, f(x), 0)$ (of ook $P(t) = (t, f(t), 0)$, de naam van de parameter maakt niet uit).

Nog voorbeelden

- $P(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$, $t \in]-\pi, \pi[$, checken eigenschappen + begin- en eindpunt die samenvallen; cirkel
- nu met z: $P(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in]0, +\infty[$, checken eigenschappen, beginpunt, geen eindpunt; cirkelvormige schroeflijn
- $P(u) = (R(1-u^2)/(1+u^2), 2uR/(1+u^2), 0)$, $u \in]-\infty, +\infty[$; ook cirkel, maar met rationale functies i.p.v. trigonometrische

Raaklijn: in $P(t_0)$: per definitie is deze $Q(u) = P(t_0) + P'(t_0)u$, met $P'(t_0)$ de zgn. raakvector. Opgelet: de raak*vector* hangt af van de parametrisatie P die gekozen werd, maar de raak*lijn* is dezelfde voor alle parametrisaties van $\mathcal{C}$.

Stuksgewijs gladde kromme

- kleef gladde bogen $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ aan elkaar, zolang het eindpunt van elke $\mathcal{C}_k$ bestaat en samenvalt met het beginpunt van $\mathcal{C}_{k+1}$
- de rij $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ kan oneindig zijn
- formeel kan een parametrisatie $P(t)$ geschreven worden voor het resultaat
- in de laspunten weet men niet of P afleidbaar is
- de stuksgewijs gladde kromme kan ook zichzelf snijden (verlies van injectiviteit)

Singuliere punten

- indien de raakvector $P'(t)$ niet bestaat, discontinu is, of nul, heet $P(t)$ een singulier punt van de parametervoorstelling
- als $P(t)$ singulier punt is van *alle* parametervoorstellingen, heet het singulier punt van de kromme
- de kromme heeft geen goed gedefinieerde raakvectoren in singuliere punten
- zelfsnijdingspunten hoeven niet singulier te zijn maar ook daar is er geen goed gedefinieerde raakvector
- voorbeeld: cycloïde $(R(t - \sin t), R(1 - \cos t), 0)$ heeft singuliere punten (dus zonder raakvectoren) in $t = 0, 2\pi, 4\pi \ldots$ (al is er daar wel een verticale raaklijn).

4.2 Oppervlakken

- vectorfunctie van twee parameters, u en v: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \to f(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, w))$
- bij krommen def. op open interval $]a, b[$; nu op verzameling Ω
- eisen Ω open en samenhangend
- indien componenten allemaal afleidbaar zijn over Ω, partiële afgeleide $f_u : (u, v) \to ((f_1)_u(u, v), (f_2)_u(u, v), (f_3)_u(u, v))$ en $f_v : (u, v) \to ((f_1)_v(u, v), (f_2)_v(u, v), (f_3)_v(u, v))$
- $f(u, v)$ associëren met vrije vector $f_1(u, v)\vec{e}_1 + f_2(u, v)\vec{e}_2 + f_3(u, v)\vec{e}_3$; als O gekend is, met overeenstemmende gebonden vector en uiteindelijk met punt $P(u, v) \in E_O$ met cartesiaanse coördinaten $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$, $z = f_3(u, v)$; compacte notatie $P(u, v)$ en coördinaten $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

Glad oppervlak $\mathcal{S} \subset E$ is per definitie het beeld van vectorfunctie $P(u,v)$ voor $(u,v) \in \Omega$ waarbij in Ω:

- P injectief is: elke $P(u,v)$ wordt maar één keer bereikt
- P continu is, afleidbaar, en P_u en P_v zijn continu
- $\|P_u \times P_v\| \neq 0$: de invloedsrichtingen van u en v zijn altijd onderscheiden.

Dan wordt die P een parametervoorstelling van $\mathcal{S}$ genoemd. Zij is nooit uniek.

Een interval $]a,b[$ heeft als rand het beginpunt a en het eindpunt b; Ω kan een rand $\partial\Omega$ met oneindig veel punten hebben. Indien P continu voortzetbaar is tot $\partial\Omega$, dan heet het beeld van $\partial\Omega$ onder P de rand van $\mathcal{S}$.

Voorbeeld: $(R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v)$ is sfeer voor $\Omega =]-\pi,\pi[\times]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$, u en v zijn lengte en breedte uit cartografie. Noord- en Zuidpool en 180e meridiaan liggen op rand.

Raakvlakken

- in een algemeen punt $P(u_0, v_0)$ van een glad oppervlak kan men twee parameterkrommen tekenen, die gladde bogen zijn met raakvectoren P_u en P_v, zodat het raakvlak $Q(s,t) = P(u_0, v_0) + sP_u(u_0, v_0) + tP_v(u_0, v_0)$ wordt
- het is handiger een definitie met een normaalvector te hanteren: $(P - P(u_0, v_0)) \cdot (P_u(u_0, v_0) \times P_v(u_0, v_0)) = 0$ want dat kruisproduct $P_u \times P_v$ is zeker niet nul (zie eisen bij de definitie van het begrip glad oppervlak).

Stuksgewijs glad oppervlak

- Ook hier kan men “verenigbare” gladde oppervlakken aaneen kleven, waarbij de lasnaden tot singuliere punten aanleiding kunnen geven
- singuliere punten die in alle parametrisaties optreden, zijn singuliere punten van het oppervlak zelf
- de rol van raakvectoren bij krommen wordt overgenomen door normaalvectoren bij oppervlakken.

De administratieve last die deze definities meebrengen zorgt ervoor dat men voor hogerdimensionale gevallen licht anders te werk gaat: in de theorie van de differentieerbare variëteiten voert men zgn. kaarten in voor open deelverzamelingen die klein genoeg zijn, en legt men de gladheidseisen op aan de overgang van de ene kaart naar de andere.