

4 Evenwicht van een star lichaam

DOELSTELLINGEN:

- Evenwichtsvoorwaarde van een lichaam introduceren;
- Bestaan van steunpuntsreacties verklaren;
- Leren tekenen van een vrijlichaamschets;
- Oplossen van de bijhorende krachten- en momentenevenwichtsvergelijkingen;
- Kenmerken van vakwerken illustreren aan de hand van voorbeelden;
- Methoden voorstellen om de krachten in vakwerkstaven te berekenen;
- Methoden voorstellen om de krachten in andere samengestelde constructies te berekenen.

VERWIJZING NAAR HANDBOEK STATICA (RC Hibbeler, 13^{de} editie):

- Hoofdstuk 5
- Hoofdstuk 6 paragrafen 6.1-6.4, 6.6

4.1 Inleiding

Binnen het deel statica is hoofdstuk 4 het belangrijkste hoofdstuk. Hier wordt de basis gelegd voor het bestuderen van evenwicht van lichamen (reële voorwerpen) in twee en in drie dimensies.

Eerst wordt het evenwicht bestudeerd van enkelvoudige voorwerpen door het uitdrukken van krachterevenwicht en momentenevenwicht. Doorheen dit hoofdstuk wordt veel belang gehecht aan het tekenen van een vrijlichaamschets, en de verschillende soorten optredende reactiekrachten en reactiemomenten. Deze komen voor aan de steunpunten, waar het voorwerp contact maakt met zijn omgeving.

Naast de eerste wet van Newton wordt ook gebruik gemaakt van de derde wet van Newton (principe van actie en reactie) om het evenwicht te bestuderen van constructies. Voorbeelden van constructies zijn vakwerken, draagconstructies en werktuigen.

4.2 Evenwichtsvoorwaarde

Voorgaand hoofdstuk werd afgesloten met het feit dat elk stelsel belastingen gelijkwaardig is met een krachtresultante $\sum \vec{F}$ en een bijkomend koppelmoment $\sum \vec{M}_O$, berekend ten opzichte van een gekozen punt O. In de statica moet steeds voldaan zijn aan krachterevenwicht om versnelling van het (massamiddelpunt van het) voorwerp tegen te gaan, terwijl momentenevenwicht nodig is om hoekversnelling van een voorwerp tegen te gaan. Statisch evenwicht van een voorwerp is dus pas gegarandeerd indien de resultante van alle inwerkende krachten en momenten gelijk is aan nul, d.w.z.:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \text{ en } \sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad [4-1]$$

met O een gekozen punt, dat niet per se op het voorwerp dient te liggen.

4.3 Vrijlichaamschets

Net zoals bij puntmassa's is het tekenen van een VLS de beste manier om alle krachten zichtbaar te maken die inwerken op het voorwerp waarvan men evenwicht wil bestuderen. Het eerder geformuleerde stappenplan (paragraaf 2.4.2) wordt nu wat aangepast in geval van evenwicht van een lichaam:

- Het 'vrije lichaam' wordt volledig zelf –maar doordacht- gekozen. Vrijmaken betekent dat alle verbindingen tussen het lichaam en de omgeving (virtueel) worden doorgeknipt. Het voorwerp wordt dus losgemaakt van zijn steunpunten en gescheiden van alle andere zaken (steunpunten en/of verbindingen met andere voorwerpen) waar het contact mee maakte. Het lichaam zelf mag ook doorgeknipt worden om eventuele inwendige krachten te bepalen, maar dit komt pas aan bod in een cursus sterkteleer (2^{de} bachelor) en bij de studie van vakwerken.
- Alle uitwendige krachten moeten aangeduid worden op de VLS. Dit zijn o.a.
 - de krachten die uitgeoefend worden door de steunpunten en door alle voorwerpen die geen deel uitmaken van het VLS, op het voorwerp dat vrijgemaakt wordt. De zogenaamde steunpuntsreacties worden behandeld in paragraaf 4.4.2.
 - andere uitwendige krachten (bv. een persoon die rechtstreeks een drukkracht of trekkracht uitoefent op een voorwerp)
 - het eigengewicht, een voorbeeld van een uitwendige lichaamskracht, dat aangrijpt in het gewichtszwaartepunt (of massamiddelpunt) van het lichaam.
- Inwendige krachten worden niet getoond op een VLS, gezien hun resultante gelijk aan nul is, waardoor ze geen uitwendig effect uitoefenen op het voorwerp.
- Indien de grootte, richting en zin van krachten gekend zijn, kunnen ze grafisch worden voorgesteld met een pijl ter plaatse van de werklijn van de kracht. Naast de pijl wordt in symbolen of in cijferwaarden de grootte van de kracht aangeduid. Als de richting en zin van de kracht of het koppel niet op voorhand

gekend is (zoals bij steunpuntsreacties), wordt geadviseerd om ze te ontbinden in componenten (volgens de positieve x-, y- en z-as of positieve draairichting (kurkentrekkerregel)). Pas na het uitrekenen van de evenwichtsvergelijkingen kan geoordeeld worden over de fysisch correcte richting en zin van de kracht of het koppel.

- Leg de x-, y- en z-coördinaatassen vast met een geschikt assenstelsel.
- Verder bevat een VLS alle relevante dimensies (afmetingen en hoeken) die nodig zijn om de evenwichtsvergelijkingen (in het bijzonder de momentenvergelijkingen) op te stellen en uit te rekenen.
- Om het overzicht te bewaren worden andere details niet getekend op de VLS.

4.4 Evenwicht in twee dimensies

4.4.1 Evenwichtsvoorwaarde

In tweedimensionale krachtenstelsels vereenvoudigen we bovenvermelde twee vectorvergelijkingen tot drie scalaire vergelijkingen, m.n. twee krachtenevenwichten en één momentenevenwicht:

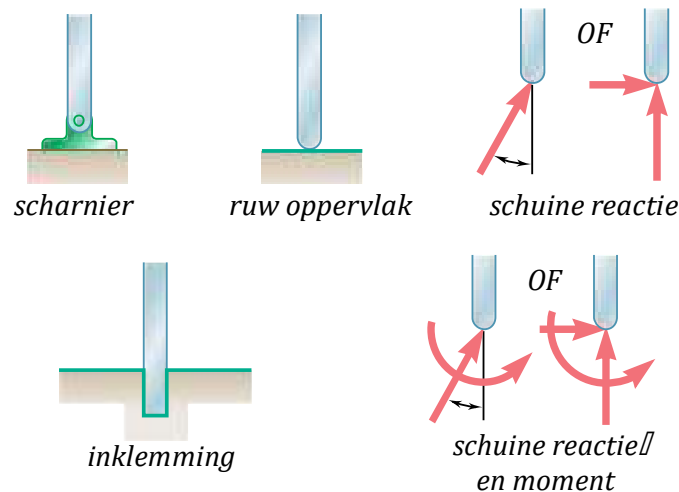
$$\sum F_x = 0 \text{ en } \sum F_y = 0 \text{ en } \sum M_0 = 0 \quad [4-2]$$

4.4.2 Steunpuntsreacties

Een steunpunt of oplegging verwijst naar de plaats waar het voorwerp (of de constructie) verbonden wordt met buitenwereld. De manier waarop een steunpunt een eventuele beweging van het voorwerp verhindert, bepaalt het soort steunpunt en de bijhorende steunpuntsreacties. Met steunpuntsreacties bedoelt men de krachten en momenten die weerstand bieden tegen beweging (respectievelijk translatie en rotatie) en er voor zorgen dat het voorwerp in een toestand van statisch evenwicht blijft. Als een steunpunt een translatie (verplaatsing) in een bepaalde richting verhindert, oefent die een reactiekracht uit in die richting. Als rotatie wordt verhinderd, wordt een reactiemoment uitgeoefend.

Een aantal soorten verbindingen (kabel en veer) hebben we al in hoofdstuk 2 behandeld. Andere veel voorkomende verbindingen zijn in deze cursus het rolscharnier, het vaste scharnier en de inklemming.

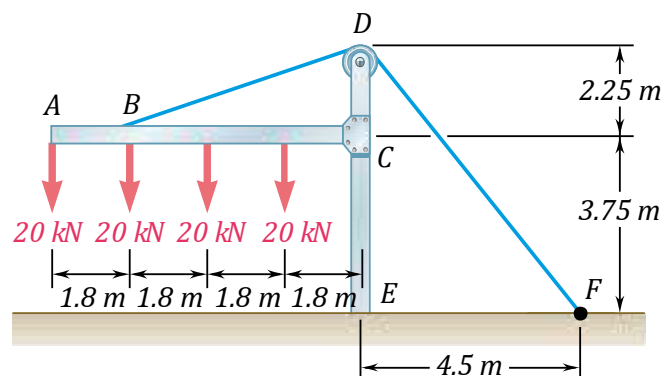




Figuur 4-1: Vaak voorkomende verbindingen in 2D problemen met bijhorende reactiecomponenten.

- Een rolscharnier (of roloplegging) en een schommelverbinding laten beweging toe in het vlak waarop de verbinding gemonteerd wordt, maar niet in de richting loodrecht daarop. Een kleine rotatie wordt toegelaten. De reactie die de buitenwereld uitoefent op de constructie is een reactiekracht in de richting waarin de verplaatsing verhinderd wordt. Deze staat loodrecht op het contactvlak (gemeenschappelijke raakvlak).
- Een scharnier of penverbinding laat in geen enkele richting een verplaatsing toe, maar wel een kleine rotatie. De reactie die de buitenwereld uitoefent op de constructie is één reactiekracht met een vooraf onbekende richting, typisch voorgesteld door twee onafhankelijke reactiecomponenten.
- Een ingeklemde verbinding (of inklemming) laat geen verplaatsing toe en geen rotatie en is dus de meest beperkende verbindingsmethode. De reactie die de buitenwereld uitoefent op de constructie is één reactiekracht met een vooraf onbekende richting, typisch voorgesteld door twee onafhankelijke reactiecomponenten, en één reactiemoment.

Tal van complexere varianten en combinaties van de bovenvermelde verbindingen bestaan eveneens. Zij kunnen aan bod komen bij de werkcolleges.



Voorbeeldoefening 4-1: Als je weet dat de spankracht in het touw 150 kN bedraagt, bepaal dan de steunpuntsreacties in inklemming E. [Antwoord: $R_{E,x} = -90$ kN en $R_{E,y} = 200$ kN en $M_E = 180$ kNm.]

De meest eenvoudige 'verbindingsmethode' is wellicht wanneer een voorwerp rechtstreeks steunt op een oppervlak, dus zonder aanwezigheid van een verbindingmechanisme. We onderscheiden daar:

- Een glad oppervlak: dit contact gedraagt zich net zoals een roloplegging en zorgt voor één reactiecomponent, loodrecht op het gemeenschappelijke raakvlak.
- Een ruw oppervlak: De reactiekrachten die optreden bij dergelijk contact zijn complexer. Vanwege zijn specifieke eigenschappen wordt dit onderwerp afzonderlijk behandeld in hoofdstuk 5 omtrent wrijving.

4.4.3 Bijzondere situaties

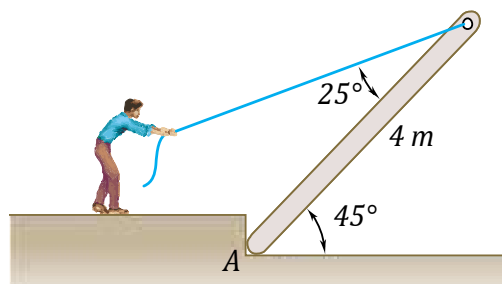
4.4.3.1. Voorwerpen belast met exact twee of exact drie krachten

Als voorwerpen belast worden met exact twee of exact drie krachten, kan het evenwicht op een alternatieve, vaak efficiëntere manier bestudeerd worden.

Bij een voorwerp belast met exact twee krachten (en geen krachtenkoppel) kan men aantonen dat deze krachten in elkaars verlengde moeten liggen, even groot en tegengesteld zijn om statisch evenwicht te kunnen garanderen. Krachtenevenwicht vereist immers dat de twee krachten even groot en tegengesteld zijn, en momentenevenwicht vereist dat ze een gemeenschappelijk werklijn moeten hebben. Dit principe is van groot belang bij het oplossen van vakwerken (4.6.1), draagconstructies en werktuigen (4.6.2).

Wanneer een voorwerp belast wordt met exact drie krachten (en geen krachtenkoppel), wordt aangetoond dat de werklijnen van de drie krachten door hetzelfde punt moeten gaan (d.w.z. de krachten zijn samenlopend of concurrent) of parallel zijn om voor statisch evenwicht te kunnen zorgen.

Hoewel evenwichtsvraagstukken met twee- of driekrachtenelementen steeds kunnen opgelost worden met de traditionele methode, d.i. via oplossen van krachten- en momentenevenwicht, kunnen ze vaak sneller en efficiënter opgelost worden wanneer men bovenstaande principes in het achterhoofd houdt. Dit komt omdat het idee achter momentenevenwicht reeds verwerkt zit in de getekende vrijlichaamschets. De momentenvergelijking moet daardoor niet meer afzonderlijk, expliciet worden uitgeschreven. Zodoende beperkt het stelsel evenwichtsvergelijkingen zich tot de twee krachtenevenwichten (en geen momentenevenwicht) en kan het probleem eenvoudiger opgelost worden met de methode behandeld in hoofdstuk 2. De keerzijde is dat er als compensatie vaak wat meer driehoeksmmeetkunde komt bij kijken.



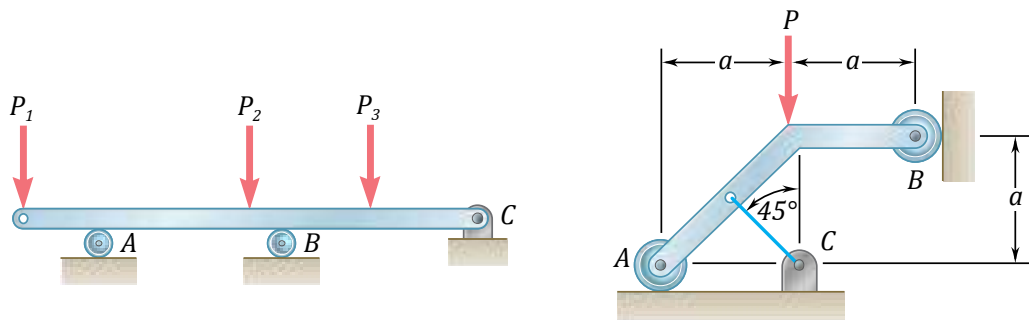
Voorbeeldoefening 4-2: Een man trekt met een touw een paal met massa 10 kg op. Bepaal de kracht in het touw en de reactiekracht in het steunpunt A. [Antwoord: $T = 82 \text{ N}$ en $R_{A,x} = 77 \text{ N}$ en $R_{A,y} = 126 \text{ N}$]

4.4.3.2. Statisch onderbepaalde en overbepaalde constructies

In voorgaande paragrafen werden steeds gevallen besproken waarin een voorwerp op zo een manier ondersteund werd dat het aantal onbekende reactiecomponenten correspondeert met het aantal beschikbare evenwichtsvergelijkingen en dat het voorwerp niet kon bewegen bij de gegeven belasting. Met spreekt in dat geval van (iso)statisch evenwicht.

Het is echter mogelijk dat voorwerpen meer ondersteund worden dan nodig is om stabiliteit te garanderen. Anderzijds kan het zijn dat de voldoende steunpunten op een ondoordachte manier zijn aangebracht, waardoor het voorwerp toch nog kan bewegen.

- Bij statisch onbepaalde (of overbepaalde of hyperstatische) constructies zijn er meer onbekende reacties aanwezig dan dat er evenwichtsvergelijkingen zijn. Extra vergelijkingen zijn nodig om de reactiekrachten te bepalen. Ze kunnen bijvoorbeeld worden verkregen uit de elastische eigenschappen van het voorwerp (bijvoorbeeld vervormingsvoorwaarden ter hoogte van de steunpunten). Toepassingen daarop komen aan bod in een cursus sterkteleer.
- Instabiele constructies komen voor wanneer ze onvoldoende ondersteund zijn (onderbepaalde of hypostatische constructies) of wanneer de verbindingen ongeschikt zijn (bijvoorbeeld wanneer de werklijnen van de reactiekrachten door hetzelfde punt lopen, of wanneer ze parallel zijn).



Voorbeeldoefening 4-3: Bestudeer het evenwicht van deze constructies. [Antwoord: links: statisch overbepaald (te veel steunpunten), rechts: instabiel, te wijten aan slecht geplaatste steunpunten]

4.5 Evenwicht in drie dimensies

4.5.1 Voorwaarde

De twee vectorvergelijkingen uit paragraaf 4.5 herleiden zich nu tot een stelsel van in totaal zes scalaire vergelijkingen, nl. drie krachteenevenwichten

$$\sum F_x = 0 \text{ en } \sum F_y = 0 \text{ en } \sum F_z = 0 \quad [4-3]$$

en drie momentenevenwichten.

$$\sum M_x = 0 \text{ en } \sum M_y = 0 \text{ en } \sum M_z = 0 \quad [4-4]$$

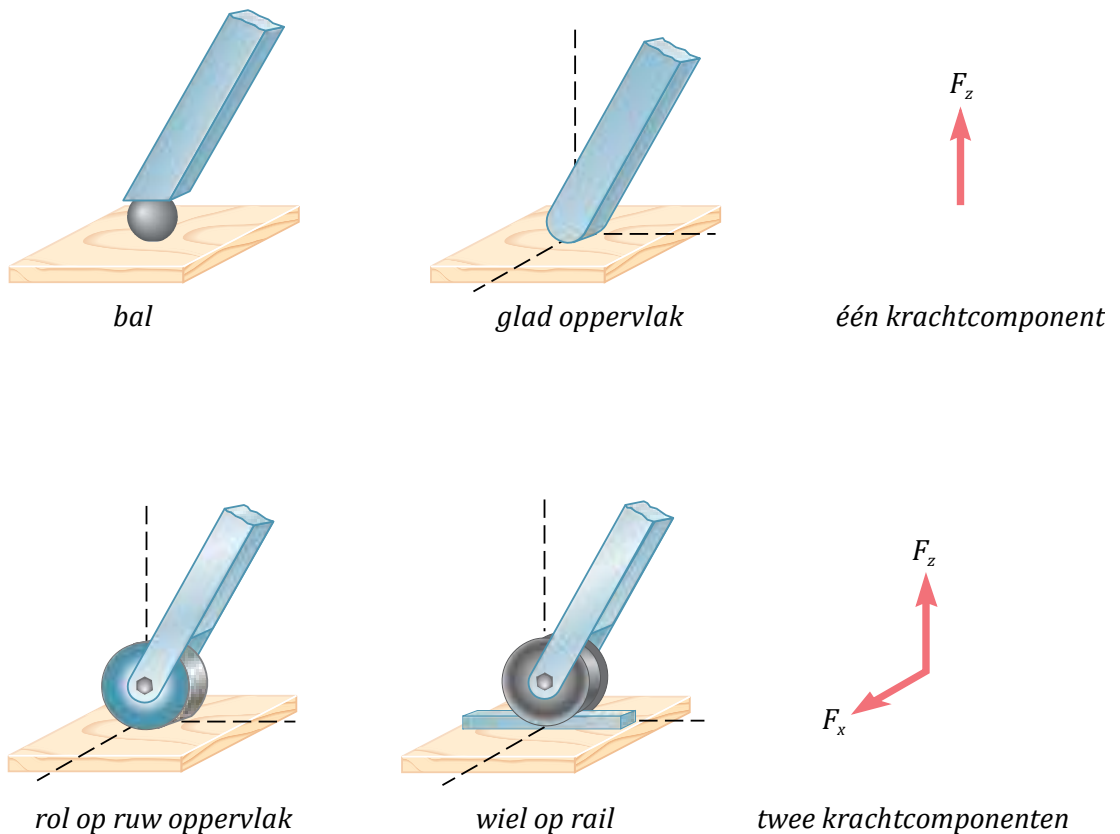
De betekenis van de eerste drie vergelijkingen ligt voor de hand. De drie andere vergelijkingen kunnen op twee verschillende manieren geïnterpreteerd worden:

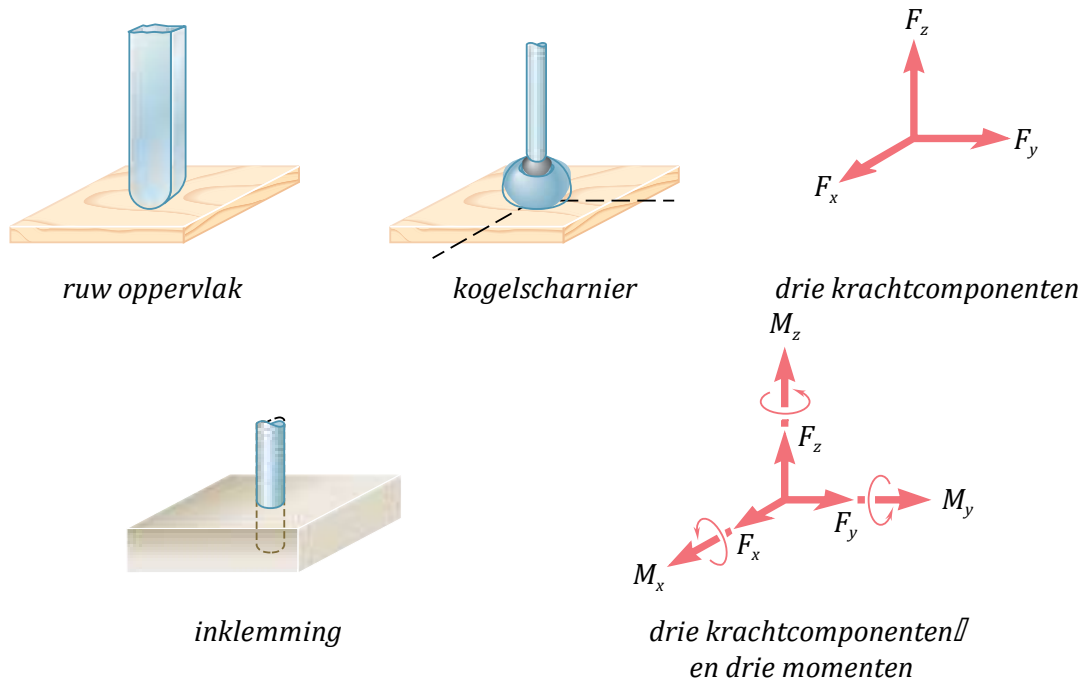
- Ze geven aan dat de drie scalaire componenten van de krachtmomenten allemaal gelijk aan nul zijn, of
- Ze geven aan dat de krachtmomenten, berekend ten opzichte van de x-, y- en z-assen, gelijk zijn aan nul.

De voorkeur wordt gegeven aan de eerste interpretatie.

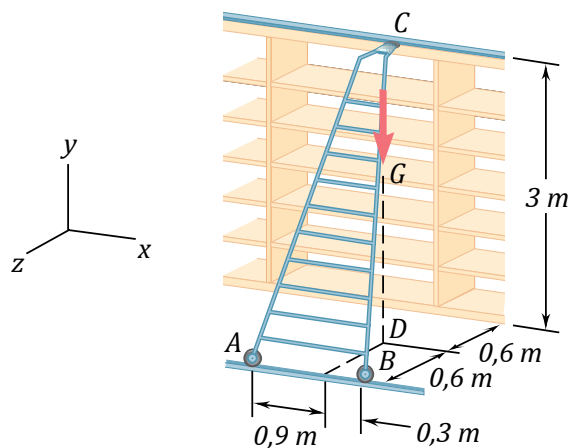
4.5.2 Vrijlichaamschets en steunpuntsreacties

De opbouw van een VLS gebeurt volledig analoog aan het tweedimensionale geval. Ter illustratie worden hieronder een aantal vaak voorkomende driedimensionale verbindingen weergegeven. Net zoals bij het tweedimensionale geval is de manier waarop het steunpunt in werkelijkheid de beweging verhindert, bepalend voor de optredende reactiekrachten (in x-, y- en z-richting) en reactiemomenten (ten opzichte van de x-, y- en z-as). Het is van groot belang om de gebruikte symbolen te herkennen en de link met de in werkelijkheid voorkomende verbindingstechnieken in te zien.





Figuur 4-2: Vaak voorkomende verbindingen met bijhorende reactiecomponenten.



Voorbeeldoefening 4-4: Een massaloze ladder in de bibliotheek wordt ondersteund door twee wielen A en B. Het steunpunt bij C is eveneens een gewone roloplegging. Een man van 100 kg leunt aan de rechterkant van de ladder (waardoor de werklijn van G door punt D gaat). Bepaal de reacties in punten A, B en C. [Antwoord: $R_{A,x} = 0$ N, $R_{A,y} = 245$ N, $R_{A,z} = -98,1$ N, $R_{B,x} = 0$ N, $R_{B,y} = 736$ N, $R_{B,z} = -98,1$ N, $R_{C,x} = 0$ N, $R_{C,y} = 0$ N, $R_{C,z} = 196,2$ N]

4.6 Constructies

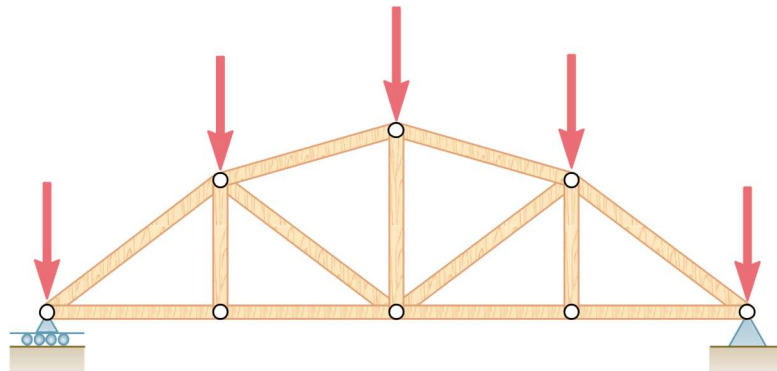
Wanneer meerdere lichamen worden verbonden met elkaar, wordt een constructie verkregen. Dit zijn onder meer vakwerken, draagconstructies en werktuigen. Eerst worden de vlakke vakwerken behandeld, een type constructie met specifieke eigenschappen en bijhorende specifieke oplossingsmethoden.

4.6.1 Vlakke vakwerken

De constructies met balken, stangen en buizen die men in bruggen, kranen, daken en steigers aantreft, dragen de gemeenschappelijke naam vakwerk. De slanke, langwerpige constructie-elementen, vaak uit hout of metaal, noemt men staven. Zij lopen samen in knooppunten. Het vakwerk is (quasi altijd) opgebouwd uit driehoeken en daardoor vormvast. In de bouwkunde zijn in de loop der jaren veel vakwerken ontworpen, die veelal de naam van de ontwerper dragen.

Een primair driehoeksvakwerk wordt als volgt opgebouwd:

- In twee dimensies: men begint met een driehoek, en elk nieuw knooppunt wordt met 2 staven vastgemaakt. Zo verkrijgt men 3 punten $\rightarrow$ 3 staven. Wanneer men twee staven toevoegt, krijg je 1 extra knooppunt. Algemeen: n knooppunten resulteert in $m = 3 + (n-3) \cdot 2 = (2n-3)$ staven.
- In drie dimensies: men begint met een viervlak, en elk nieuw knooppunt wordt met 3 staven vastgemaakt. Zo verkrijgt men: 4 punten $\rightarrow$ 6 staven, of, algemeen: n punten $\rightarrow 6 + (n-4) \cdot 3 = (3n-6)$ staven.



Figuur 4-3: Voorbeeld van een eenvoudig tweedimensionaal vakwerk: slanke staven zijn scharnierend met elkaar verbonden en alle krachten, zowel de uitwendige als de reactiekrachten, grijpen aan in de knooppunten van de staven.

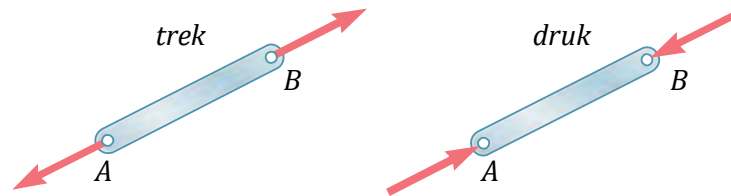
Voor een eerste benadering van de krachten (staafkrachten) die in de staven en de verbindingen optreden, veronderstelt men dat:

- de staven met scharnieren (of vergelijkbare technieken) met elkaar verbonden zijn;
- het vakwerk alleen in zijn knooppunten belast wordt;
- het gewicht van de staven mag verwaarloosd worden t.o.v. de andere uitwendige krachten;

Wanneer ingeschat wordt dat het gewicht toch niet verwaarloosbaar is ten opzichte van de andere uitwendige krachten, kan men beslissen om op elk knooppunt de helft van het eigenwicht van de staaf in rekening te brengen. Op deze manier kan de constructie blijvend geanalyseerd worden als een vakwerk.

Als gevolg van deze drie eigenschappen zijn alle staven in een vakwerk tweekrachtenelementen (zie 4.4.3.1). Beschouwen we een staaf AB uit een vakwerk. A en B zijn tevens de knooppunten. AB is een staaf tussen twee scharnierpunten, waarop, behalve in de scharnierpunten, geen andere krachten optreden. Wil de staaf AB in evenwicht zijn, dan weten we intussen dat de krachten in A en in B gelijk in

grootte en richting, maar tegengesteld van zin moeten zijn. Elke staaf ondergaat dus uitsluitend krachten die gericht zijn volgens de as van de staaf, dus druk- of trekkrachten.



Figuur 4-4: Werking van trek- en drukkracht op een staaf van een vakwerk. De trekkracht maakt de staaf langer, de drukkracht maakt de staaf korter.

Veronderstellen we nu dat de staaf AB onderworpen wordt aan een trekkracht (Figuur 4-4). Maken we de staaf AB vrij, dan tekenen we in A en B twee krachten met een zin van elkaar weg: dit zijn de krachten die via de knooppunten worden uitgeoefend op de staven. De staaf heeft de neiging om langer te worden.

Maken we één knooppunt vrij, bijvoorbeeld B, dan is de kracht die de staaf AB op het knooppunt uitoefent gelijk en tegengesteld aan deze die het knooppunt op de staaf uitoefent. Deze kracht gaat dus van het knooppunt weg. Treedt in een staaf een trekkracht op, dan uit zich dit op het knooppunt door een kracht volgens de staaf van het knooppunt weg. Treedt in de staaf een drukkracht op, dan uit zich dit op het knooppunt door een kracht volgens de staaf naar knooppunt toe.

Voor de berekening van de staafkrachten (d.w.z. het bepalen van de groottes van de trek- of drukkrachten in de staven) beschikken we over twee ontwerpmethodes:

- Knooppuntmethode: door stelselmatig het krachtenevenwicht van de knopen uit te drukken, en
- De snedemethode: door zowel krachten- als momentenevenwicht van grotere delen van het vakwerk uit te drukken.

We illustreren beide methodes voor een tweedimensionaal vakwerk. Bij een driedimensionaal vakwerk is de methode analoog.

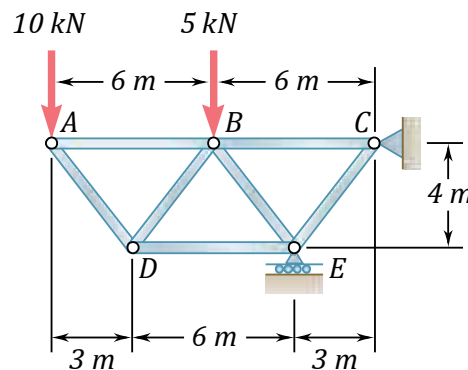
4.6.1.1. Knooppuntmethode

Hierbij wordt elk knooppunt afzonderlijk vrijgemaakt. De methode wordt best eerst toegepast in een punt waar slechts twee staven samenkomen. Indien dit niet beschikbaar is, is het aangewezen om eerst de steunpuntsreacties van het hele vakwerk te bepalen.

Uit de krachtvergelijkingen $\sum F_x = 0$ en $\sum F_y = 0$ die we voor elk knooppunt uitdrukken, kunnen we slechts twee staafkrachten halen. Merk op dat het uitdrukken van momentenevenwicht geen zin heeft bij een knooppunt: $\sum M_O = 0$ volgt bij samenlopende krachten uit $\sum F_x = 0$ en $\sum F_y = 0$ en is dus geen onafhankelijke vergelijking.

We veronderstellen in de VLS steeds dat de onbekende krachten die op een knoop werken trekkrachten zijn, d.w.z. dat alle staven aan de knoop trekken om de knoop in evenwicht te houden. Na de berekening levert dit positieve scalair op voor trekstaven en negatieve scalair voor drukstaven. Zodra een onbekende staafkracht

is gevonden, dienen zijn correcte grootte en zin (trek- of drukkracht) in de VLS'en van de andere, aangrenzende knooppunten te worden gebruikt. Deze procedure herhaalt men tot wanneer alle (gevraagde) staafkrachten berekend zijn.

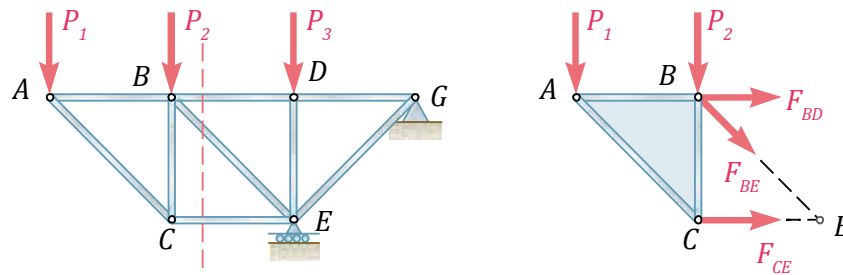


Voorbeeldoefening 4-5: Bepaal, aan de hand van de knooppuntmethode, de krachten in elk van de staven en geef aan om het of druk- of trekkrachten gaat. [Antwoord: $F_{AB} = 7,5$ kN (trek), $F_{AD} = 12,5$ kN (druk), $F_{DB} = 12,5$ kN (trek), $F_{DE} = 15$ kN (druk), $F_{BE} = 18,75$ kN (druk), $F_{BC} = 26,25$ kN (trek) en $F_{EC} = 43,75$ kN (druk)]

4.6.1.2. Snedemethode (of methode van Ritter)

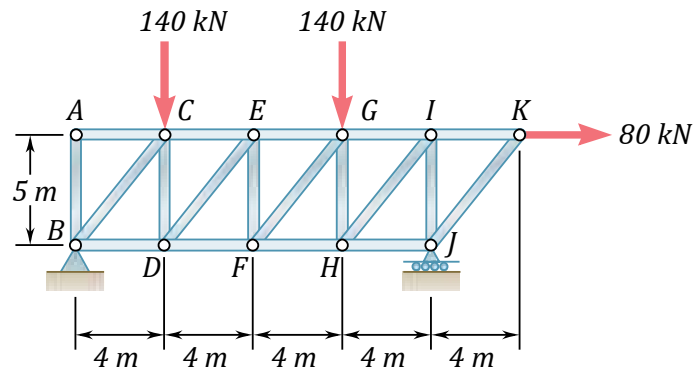
Deze methode is gebaseerd op het feit dat wanneer een constructie in statisch evenwicht is, elk deel van deze constructie ook in evenwicht is. De snedemethode is efficiënter dan de voorgaande methode wanneer maar één of een heel beperkt aantal staafkrachten dient gezocht te worden.

Men maakt een deel van het vakwerk vrij door (meestal) drie niet-samenlopende staven fictief door te knippen. De drie staafkrachten volgen rechtstreeks uit de drie evenwichtsvergelijkingen: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ en $\sum M_O = 0$.



Figuur 4-5: Illustratie van de snedemethode. Het vakwerk wordt ter hoogte van de stippellijn volledig doorgeknip. Zowel het linkerdeel als het rechterdeel is in statisch evenwicht. De drie evenwichtsvergelijkingen laten rechtstreeks toe om de onbekende staafkrachten in het linker deel te berekenen.

Indien voldoende ervaring is opgebouwd met het gebruik van de knooppuntmethode en de snedemethode, kunnen beide methoden perfect met elkaar gecombineerd worden.



Voorbeeldoefening 4-6: Bepaal aan de hand van de snedemethode de grootte van de krachten in staven EF en GI. Geef aan of het om trek- of drukkrachten gaat. [Antwoord: $F_{EF} = 25 \text{ kN}$ (druk) en $F_{GI} = 52 \text{ kN}$ (druk)]

4.6.1.3. Nulkrachtstaven

De analyse van een vakwerk kan fel vereenvoudigd worden als we snel nulkrachtstaven kunnen detecteren. Nulkrachtstaven (of nulstaven) zijn staven waarin de berekende staafkracht gelijk aan nul is in een gegeven belastingssituatie. Ze zijn daarom echter niet nutteloos:

- Ze dienen om de stabiliteit en vormvastheid van het vakwerk tijdens de montage te vergroten.
- Slanke, dunne staven zijn extra gevoelig voor knikgevaar (d.w.z. plots uitbuigen) wanneer ze op druk belast wordt. De nulstaven bieden extra steun aan de slanke staven en verminderen de kans op knik.
- Een belastingssituatie is doorgaans niet uniek (bv. windbelasting uit verschillende richtingen). Dat wil zeggen dat bij de ene belasting een welbepaalde staaf zich gedraagt als een nulstaaf, maar dat dit niet meer het geval is bij een andere optredende belasting in eenzelfde constructie.

Uit een knooppuntsanalyse van enkele vakwerken leert men dat:

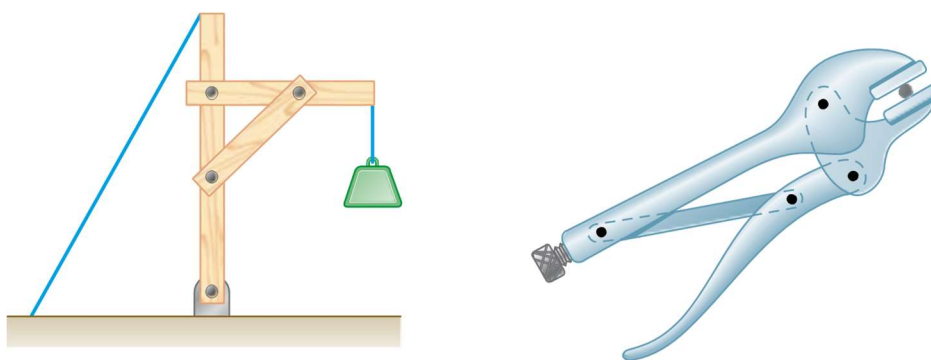
- Als slechts twee staven met één van hun uiteinden samenkomen in een knooppunt en er geen externe belasting (of steunpuntsreactie) op de knoop wordt uitgeoefend, beide staven nulkrachtstaven moeten zijn;
- Als drie staven met één van hun uiteinden samenkomen in een knooppunt en twee van de staven in elkaars verlengde liggen, dan is de derde een staaf een nulkrachtstaaf als er geen externe kracht (of steunpuntsreactie) op de knoop wordt uitgeoefend.

4.6.2 Andere constructies

Deze types constructies worden vaak samengesteld uit elementen die met scharnieren (penverbindingen) met elkaar verbonden zijn, waarbij minstens één van de elementen belast wordt met een koppel of met een kracht die niet op het scharnier aangrijpt. Daardoor kan er naast trek/druk nog buiging van de onderdelen optreden, waardoor ze dus niet enkel bestaan uit tweekrachtenlichamen en niet meer tot de categorie 'vakwerken' behoren. De knooppuntmethode en snedemethode mogen hier dus niet toegepast worden.

Binnen deze constructies kan onderscheid worden gemaakt in draagconstructies en werktuigen. Het eerste type betreft constructies die in rust zijn en gebruikt worden om lasten te dragen. Werktuigen daarentegen bevatten (traag) bewegende delen en zijn ontworpen om het effect van krachten over te dragen en te veranderen. Door de zeer lage versnellingen worden de optredende traagheidskrachten verwaarloosd en worden ze geanalyseerd met de evenwichtsvergelijkingen uit de statica.

De werkwijze die gehanteerd wordt om de krachtwerking te verstaan is in beide types evenwel exact dezelfde: zolang de constructie is vastgezet en niet meer steunpunten of elementen bevat dan nodig is om bezwijken te voorkomen, kunnen we de krachten die op de steunpunten (reactiekrachten) en penverbinding komen, bepalen via de evenwichtsvergelijkingen. We maken daarvoor gebruik van VLS'en van de hele constructie, maar ook van één enkele of een verzameling van enkele samenhangende constructieonderdelen.



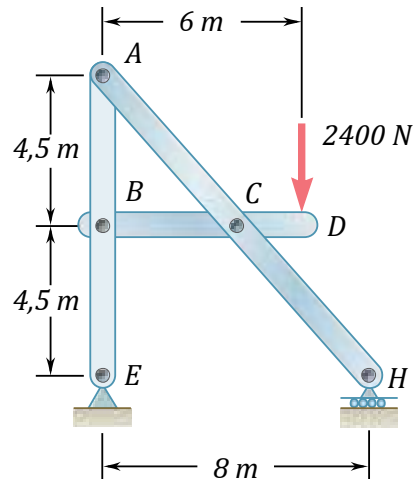
Figuur 4-6: Voorbeeld van een draagconstructie (links) en werktuig (rechts).

Bij het tekenen van deze VLS'en, moeten onderstaande belangrijke punten in acht worden genomen:

- De zin van de onbekende krachten wordt aanvankelijk aangenomen.
- Kennis van de eigenschappen van tweekrachtenlichamen (en in mindere mate driekrachtenlichamen) komt hier zeker van pas: als we bij een tweekrachtenlichaam beide inwerkende krachten tekenen op de werklijn die beide aangrijpingspunten van de krachten met elkaar verbindt, wordt vermeden dat we één of meerdere onnodige evenwichtsvergelijking schrijven.
- Als een VLS wordt getekend van een verzameling van constructieonderdelen, zijn de krachten die werkzaam zijn in de penverbindingen inwendige krachten en worden ze dus niet weergegeven op de figuur.
- Tussen de constructieonderdelen onderling dient het principe van actie en reactie worden toegepast. Dit betekent dat de krachten die getekend worden op de afzonderlijke constructieonderdelen even groot zijn en in dezelfde richting liggen, maar een tegengestelde zin hebben.
- Tenzij anders vermeld, wordt het eigengewicht van de constructieonderdelen niet in rekening gebracht. Indien het gewicht gegeven is, grijpt dit aan in het gewichtszwaartepunt van het constructieonderdeel.

Bij elke doordacht gekozen VLS horen evenwichtsvergelijkingen. Het uitschrijven ervan vraagt de nodige aandacht, in het bijzonder ter plaatse van penverbindingen:

- Telkens moet erop toegezien worden dat het totaal aantal vergelijkingen (van alle VLS'en samen) gelijk is aan het totaal aantal onbekenden in het probleem om het stelsel te kunnen oplossen. Het is best mogelijk dat in sommige VLS'en meer onbekenden zitten dan er beschikbare vergelijkingen zijn, maar dat wordt gecompenseerd door andere VLS'en met minder onbekenden dan het aantal evenwichtsvergelijkingen.
- Indien na het oplossen van het hele stelsel evenwichtsvergelijkingen blijkt dat de uitkomst van een onbekende kracht (of koppelmoment) negatief is, wil dit zeggen dat de werkelijke zin van de kracht (of koppelmoment) omgekeerd is van wat initieel werd aangenomen.

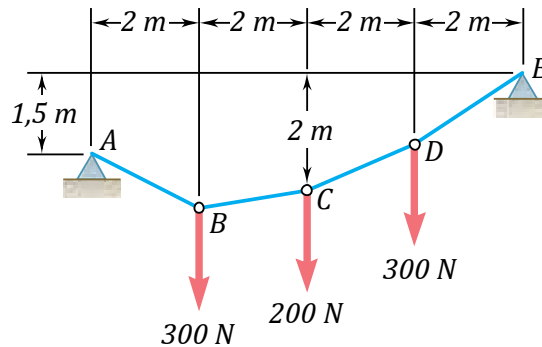


Voorbeeldoefening 4-7: Bepaal de componenten van de krachten die inwerken op elk van de staven in deze draagconstructie. [Antwoord: $R_H = 1800 \text{ N}$, $A_x = 0$, $A_y = 1800 \text{ N}$, $B_x = 0$, $B_y = 1200 \text{ N}$, $C_x = 0$, $C_y = 3600 \text{ N}$, $E_x = 0$ en $E_y = 600 \text{ N}$].

4.6.3 Kabels met puntlasten

In de volgende redenering wordt uitgegaan van een volkomen flexibele, massaloze en niet rekbare kabel, die met een aantal puntkrachten wordt belast. In dit geval neemt de kabel de vorm aan van een aantal rechte lijnsegmenten, die allemaal onderhevig zijn aan een trekkracht die constant is binnen het lijnsegment en gelegen is in de richting van dat lijnsegment. Een kabel die opgehangen wordt op twee punten en die belast wordt met n puntlasten heeft in totaal vier onbekende reactiekrachten (twee aan elk steunpunt) en $n+1$ onbekende trekkrachten in de lijnsegmenten. Om tot een oplossing te komen kunnen we gebruik maken van $2n$ evenwichtsvergelijkingen ter hoogte van elke knooppunt. De laatste, noodzakelijke vergelijking kan men verkrijgen indien de lengte van de kabel gekend is, of wanneer de zakking ter hoogte van één van de puntlasten gegeven is. Een mogelijke oplossingsmethode wordt geïllustreerd aan de hand van onderstaand vraagstuk.

Complexere situaties, waarbij rekening wordt gehouden met de massa van de kabel zelf, of met een verdeelde belasting die aangrijpt op de kabel (zoals bij hoogspanningsmasten of hangbruggen), worden in deze cursus niet behandeld.



Voorbeeldoefening 4-8: Bepaal de componenten van de reactiekrachten in A en E.
 [Antwoord: $R_{A,x} = -800 \text{ N}$, $R_{A,y} = 251 \text{ N}$, $R_{E,x} = 800 \text{ N}$ en $R_{E,y} = 550 \text{ N}$]

4.7 Kennis- en conceptvragen

- Wat zijn in de statica de basisevenwichtsvoorwaarden van een voorwerp? Wat is de fysische betekenis van deze evenwichtsvoorwaarden?
- Wanneer schrijft men de basisevenwichtsvoorwaarden in vectorvorm? Wanneer in scalaire vorm?
- Wat wordt bedoeld met een vrijlichaamschets (VLS) of vrijlichaamdiagram? Welke informatie moet er minstens op een VLS staan?
- Waarom moet er steeds een VLS getekend worden?
- Wat is een steunpuntsreactie, een reactiekracht en een reactiemoment?
- Som een viertal vaak voorkomende types steunpunten op in twee dimensies en in drie dimensies.
- Welke reactiekrachten en reactiemomenten veroorzaken deze steunpunten en waarom?
- In welke richting teken je een reactiekracht wanneer deze op voorhand niet gekend is?
- Teken een voorbeeld van een hyperstatische constructie.
- Teken een voorbeeld van een isostatische constructie.
- Teken een voorbeeld van een instabiele isostatische constructie.
- Teken een voorbeeld van een hypostatische constructie.
- Wat zijn de essentiële kenmerken van een vakwerk?
- Leg in woorden uit hoe de knooppuntmethode en de snedemethode werken. Wanneer gebruik je best welke methode?
- Wat is een essentieel verschil tussen een vakwerk en de andere constructies?