

7 Kinematica van een punt

DOELSTELLINGEN:

- De basisbegrippen positie, verplaatsing, snelheid en versnelling introduceren;
- Beschrijven van de beweging van een puntmassa in de ruimte, in een vlak en langsheen een rechte lijn;
- Beschrijven van de beweging van een puntmassa langsheen een kromme baan;
- Bespreken van gekoppelde beweging van twee puntmassa's;
- Behandelen van de relatieve beweging van twee verschillende puntmassa's met translerende assenstelsels.

VERWIJZING NAAR HANDBOEK DYNAMICA (RC Hibbeler, 13^{de} editie):

- Hoofdstuk 1

7.1 Inleiding

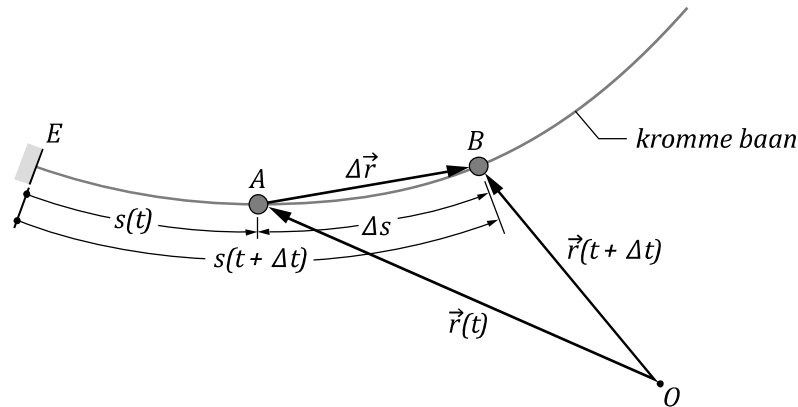
Kinematica is het geometrisch beschrijven van de beweging van puntmassa's, lichamen en mechanismen, los van de krachten en koppels die gepaard gaan met deze beweging. Met de invloed van krachten of koppels wordt pas rekening gehouden in het tweede deel van de dynamica, nl. de kinetica.

Dit hoofdstuk start met de begrippen positie, snelheid en versnelling en vertelt hoe deze grootheden in verband staan met elkaar. Meer specifiek worden één-, twee- en driedimensionale bewegingen van een punt geformuleerd met behulp van cartesische en kromlijnige coördinaten.

Verder in het hoofdstuk wordt relatieve kinematica van puntmassa's bestudeerd, een onderwerp dat tegelijk de basis vormt voor de studie van de kinematica van starre lichamen (zie hoofdstuk 9).

7.2 Vectoren en scalaires

Veronderstel een puntmassa die op een willekeurige kromme baan in de ruimte beweegt. Op tijdstip t bereikt het positie A en even later, op tijdstip $t+\Delta t$, bereikt het positie B. In deze cursus worden twee manieren toegelicht waarmee de positie in functie van de tijd van deze puntmassa kan beschreven worden en die als basis zullen dienen om tal van formules omtrent snelheid en versnelling te verklaren.



Figuur 7-1: Kinematische grootheden bij een puntmassa die zich verplaatst op een kromme baan. A en B verwijzen naar 2 posities van deze puntmassa op twee verschillende tijdstippen t en $t+\Delta t$.

7.2.1 Kinematica m.b.v. de positievector

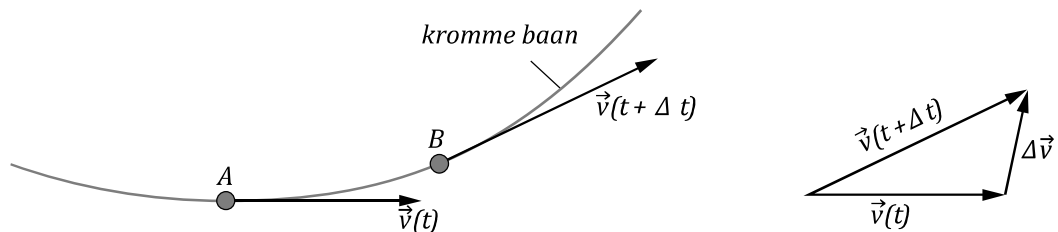
De kinematica van een punt kan worden bestudeerd aan de hand van de plaatsvector $\vec{r}(t)$ die verandert in de tijd (Figuur 7-1). Concreet wil dit zeggen dat de (bijvoorbeeld cartesische) componenten van deze vector functie zijn van de tijd.

De ogenblikkelijke snelheidsvector wordt gedefinieerd als de verandering van de plaatsvector met de tijd:

$$\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad [7-1]$$

met $\Delta \vec{r}$ de verplaatsing die de puntmassa in een tijdsinterval Δt heeft ondergaan:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \quad [7-2]$$



Figuur 7-2: Snelheidsvectoren van een puntmassa op een kromme baan, getekend op twee verschillende tijdstippen t en $t+\Delta t$. De snelheidsvector is steeds rakend aan de baan.

Verder in de cursus wordt aangetoond dat $\Delta \vec{r}$ rakend komt te liggen aan de baan van zodra $\Delta t \rightarrow 0$. Ook de snelheidsvector is dus altijd rakend aan de baan.

Het verschil tussen twee snelheidsvectoren ter plaatse van A en B wordt gegeven door:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) \quad [7-3]$$

De ogenblikkelijke versnelling wordt nu gedefinieerd als:

$$\vec{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad [7-4]$$

Het is best mogelijk dat ook de versnelling nog functie van de tijd is, zodat nog verdere afgeleiden, verschillend van nul, bestaan. Bij de studie van o.a. nokkenmechanismen zal men ook gebruik maken van de vector $\vec{j}(t)$, de ruk genoemd (eng: jerk). In deze cursus beperken we ons evenwel tot de afgeleiden snelheid en versnelling.

Bij het definiëren van de begrippen positie, snelheid en versnelling werd tot nog toe geen melding gemaakt van een assenstelsel. Om beweging volledig te beschrijven hebben we echter nood aan zo'n assenstelsel. In deze cursus wordt hoofdzakelijk gebruik gemaakt van de klassieke cartesische coördinaten, en sporadisch van poolcoördinaten.

7.2.2 Kinematica m.b.v. afstand langs de baan

De tijdsafhankelijke beweging van de puntmassa kan eveneens beschreven worden aan de hand van de baancoördinaat $s(t)$, die de positie weergeeft van het punt, gemeten langsheen de baan (Figuur 7-1). Op de baan kiest men een zin voor $s(t)$, waardoor de beweging in de ene of de andere zin kan worden vastgelegd. De positie correspondeert dus met de lengte van de baan tussen een gekozen referentiepunt E en de puntmassa zelf. De verandering van lengte Δs , gemeten langsheen de kromme baan, is gelijk aan:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \quad [7-5]$$

Bij deze zienswijze wordt geen gebruik gemaakt van vectoren, enkel van scalaires.

De keuze om te werken met baancoördinaten enerzijds of met plaatsvectoren anderzijds hangt onder meer af van de beschikbare gegevens in het vraagstuk en de voorkeur van de persoon die het probleem oplost. De methode met de baancoördinaten wordt wel vaker geadviseerd wanneer de vorm van de baan van bij het begin van de probleemstelling gekend is (bv. puntmassa die een cirkelbaan met gekende straal volgt), terwijl de zienswijze met de plaatsvectoren mogelijk handiger is wanneer de vorm van de baan berekend of gereconstrueerd moet worden (bv. vorm van een paraboolbaan die moet gevonden worden).

De volgende paragraaf bouwt verder op de vectormethode, waarin de vectoren meer specifiek worden voorgesteld met de welgekende cartesische coördinaten. Er wordt gestart met de meest algemene driedimensionale beweging, om vervolgens stelselmatig te vereenvoudigen naar de zeer vaak voorkomende ééndimensionale, rechtlijnige beweging.

7.3 Cartesische coördinaten

7.3.1 Beweging in de ruimte

Figuur 7-3 toont de baan die puntmassa P volgt in een cartesisch assenstelsel. De positie \vec{r} van P, ten opzichte van de oorsprong van het assenstelsel, is tijdsafhankelijk en wordt gegeven door:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad [7-6]$$

met $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$, de scalaire, tijdsafhankelijke coördinaten van deze puntmassa. De snelheidsvector en versnellingsvector worden berekend via de kettingregel en zijn gegeven door respectievelijk:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z \quad [7-7]$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y + a_z(t)\vec{e}_z$$

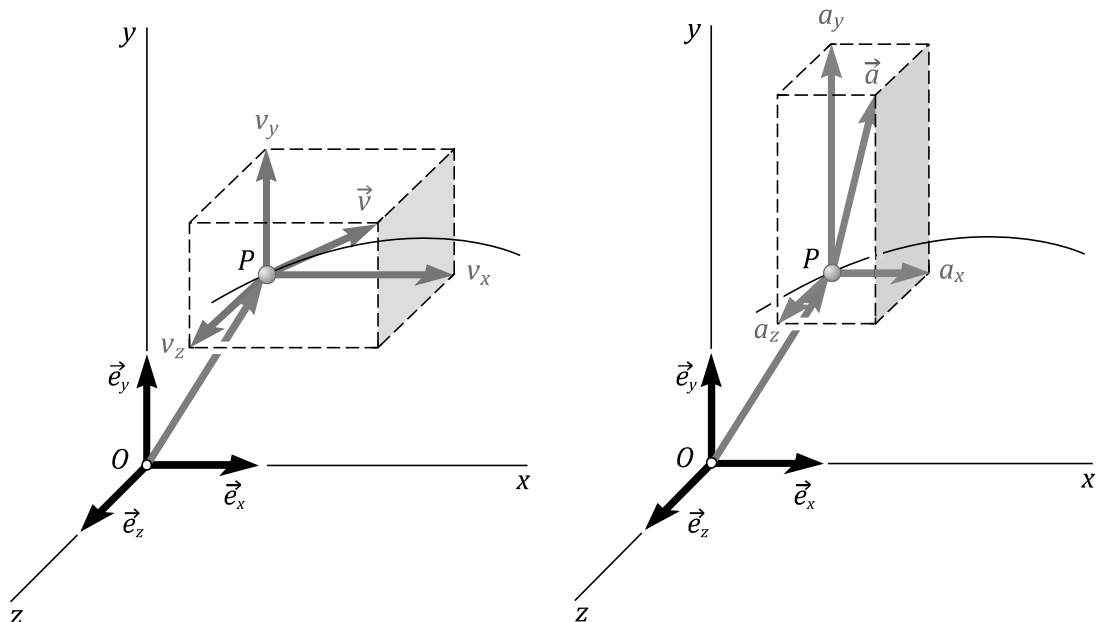
Hierbij geldt dat:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \text{ en } v_y = \frac{dy(t)}{dt} \text{ en } v_z = \frac{dz(t)}{dt} \quad [7-8]$$

en

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} \text{ en } a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} \text{ en } a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} \quad [7-9]$$

De grootte van deze snelheidsvector en versnellingsvector kan gemakkelijk gevonden worden via de formule van Pythagoras, gezien de drie componenten per definitie loodrecht op elkaar staan.



Figuur 7-3: Snelheid en versnelling in cartesische componenten. De snelheidsvector is steeds rakend aan de baan. Bij de versnellingsvector is dit niet zo.

7.3.2 Beweging in het vlak

In het geval dat een puntmassa zich voortbeweegt in een vlak (bijvoorbeeld het xy-vlak, $z=0$), wordt bovenstaande theorie vereenvoudigd tot twee dimensies. De positie, snelheid en versnelling van P worden dan gegeven door:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \\ \vec{v}(t) &= v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y \\ \vec{a}(t) &= a_x(t)\vec{e}_x + a_y(t)\vec{e}_y\end{aligned}$$

Hierbij geldt dat:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} \text{ en } v_y = \frac{dy(t)}{dt} \quad [7-11]$$

De hoek θ , die de helling aangeeft van de snelheidsvector, wordt bepaald via:

$$\tan(\theta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx} \quad [7-12]$$

De laatste gelijkheid toont aan dat snelheidsvector volgens de raaklijn aan de baan ligt.

7.3.3 Beweging volgens één as

Tal van toepassingen in de natuurkunde en mechanica voldoen aan een ééndimensionale beweging, op te vatten als het meest eenvoudige geval van de willekeurige driedimensionale kinematica. Veronderstel dat de bewegingsas overeenstemt met de x-as van het assenstelsel, waardoor $y=0$ en $z=0$. Enkel de componenten volgens de x-as resteren, waardoor de kinematica kort kan worden beschreven met:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\vec{e}_x \\ \vec{v}(t) &= v(t)\vec{e}_x \\ \vec{a}(t) &= a(t)\vec{e}_x\end{aligned} \quad [7-13]$$

Hierbij geldt dat:

$$\begin{aligned}v(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx(t)}{dt} \\ a(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dv(t)}{dt}\end{aligned} \quad [7-14]$$

Merk op dat bij de snelheid en versnelling het subscript x vaak niet meer expliciet vermeld wordt.

Beide uitdrukkingen in [7-14] zijn direct bruikbaar om snelheid en versnelling te berekenen wanneer de positie van het punt gekend is in functie van de tijd. De praktijk leert echter dat situaties waarbij $x(t)$ gegeven is, nauwelijks voorkomen. Eerder zal bijvoorbeeld vanuit een gekende versnelling gevraagd worden om de positie $x(t)$ van een punt te vinden. Daarvoor worden de bovenstaande uitdrukkingen herschreven onder de vorm van differentiaalvergelijkingen:

$$dv(t) = a(t)dt \quad [7-15]$$

$$dx(t) = v(t)dt$$

Het oplossen van deze korte differentiaalvergelijkingen via wiskundige integratie laat ons toe de positie $x(t)$ te vinden, vertrekkende van een opgegeven $a(t)$. Dit wordt hieronder geïllustreerd bij twee eenvoudige situaties, één met $a(t) = 0$ en één met $a(t) = a_c = \text{constant}$.

7.3.3.1. Eénparig rechtlijnige beweging

Beschouw een punt dat zich op het tijdstip $t = 0$ in x_0 bevindt en een snelheid v_0 heeft. Indien $a(t) = 0$, zal

$$v(t) = v_0 \quad [7-16]$$

Bij deze éénparige beweging is de snelheid v_0 constant. Na één tijdsintegratie volgt hieruit:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt = x_0 + v_0(t - t_0) \quad [7-17]$$

7.3.3.2. Eénparig veranderlijke rechtlijnige beweging

Bij een éénparig veranderlijke beweging is de versnelling constant: $a(t) = a_c$. Via integratie vinden we de corresponderende uitdrukkingen voor snelheid en positie.

Snelheid als een functie van tijd:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a_c dt = v_0 + a_c(t - t_0) \quad [7-18]$$

Plaats als een functie van tijd:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_c(t - t_0)^2 \quad [7-19]$$

Een andere vergelijking die nuttig kan zijn, wordt afgeleid via eliminatie van de tijd uit de twee uitdrukkingen in [7-14]:

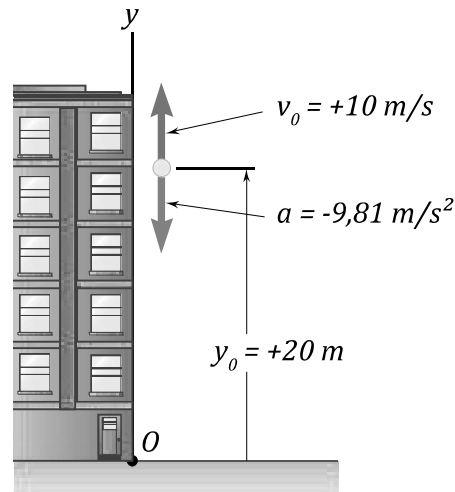
$$a_c \cdot dx = v \cdot dv \quad [7-20]$$

De oplossing van deze differentiaaluitdrukking levert de snelheid v als functie van de positie s :

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0) \quad [7-21]$$

7.3.3.3. Vrije val zonder luchtweerstand

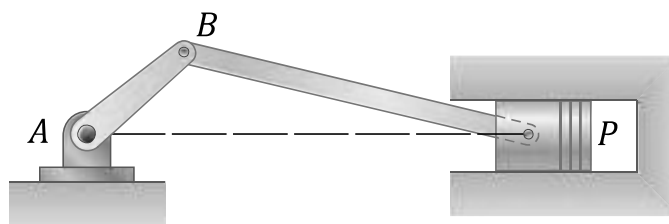
Een klassiek voorbeeld van een éénparig veranderlijke beweging is de vrije val, waarbij een puntmassa een verticale beweging maakt, en daarbij onderhevig is aan de neerwaarts gerichte, constante zwaartekrachtversnelling $a = -9,81 \text{ m/s}^2$.



Voorbeeldoefening 7-1: Een bal wordt verticaal omhoog gegooid vanuit een raam op 20 m hoogte. Bepaal (a) de snelheid en hoogte van de bal op elk tijdstip t , (b) de maximale hoogte die de bal zal behalen, alsook het tijdstip waarop, en (c) het tijdstip waarop de bal de grond zal raken, en de snelheid die hij op dat moment bezit. Teken ook de grafieken van $v(t)$ en $y(t)$. [Antwoord: (a) $v(t) = 10 - 9,81t$ en $y(t) = 20 + 10t - 4,905t^2$ (b) $y_{\max} = 25,1$ m op $t = 1,019$ s (c) $t = 3,28$ s met $v = 22,2$ m/s]

Merk op dat:

- Zeker niet alle rechtlijnige bewegingen gekenmerkt zijn door een constante versnelling. In situaties waarin de versnelling niet constant is (bv. het kruk-drijfstangmechanisme in Figuur 7-4) mogen de formules van de éénparig veranderlijke beweging uiteraard niet worden gebruikt. Ook bij een valbeweging met luchtweerstand mogen de formules van de éénparige veranderlijke rechtlijnige beweging niet worden toegepast.
- Het gebruik van $x(t)$ is veelal voorbehouden voor een rechte, horizontaal gelegen baan. Wanneer we te maken hebben met een verticale, rechte baan zijn $y(t)$ en $z(t)$ gebruikelijker.



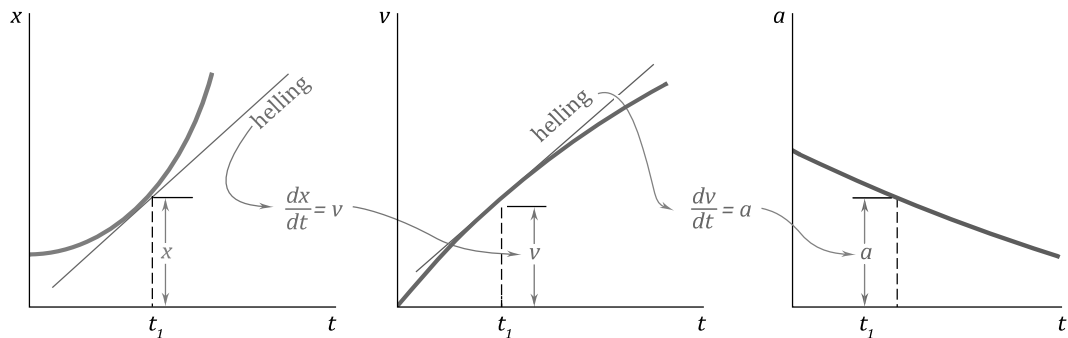
Figuur 7-4: Kruk-drijfstangmechanisme: punt P volgt een rechte baan.

7.3.3.4. Grafische methoden

In sommige situaties kunnen de positie, snelheid en versnelling op een rechte baan niet worden beschreven met kant-en-klaar analytische functies, maar zijn ze opgebouwd uit meerdere verschillende functies, of zijn ze het resultaat van bijvoorbeeld meetdata. In dat geval helpt het om voorgaande theorie omtrent positie, snelheid en versnelling ook grafisch te kunnen interpreteren. Dergelijke grafische methoden geven bijkomend inzicht in het verband tussen deze grootheden.

Belangrijk om weten is dat op elk ogenblik t geldt:

- $v(t)$ = helling van de $x(t)$ curve
- $a(t)$ = helling van de $v(t)$ curve



Figuur 7-5: Grafisch verband tussen plaats, snelheid en versnelling bij een rechtlijnige beweging. De helling van de curve correspondeert met de tijdsafgeleide.

Ook de integratietechnieken die gebruikt werden om stapsgewijs $x(t)$ te vinden uit $a(t)$, kunnen grafisch geïnterpreteerd worden. Daarbij kan gebruikt gemaakt worden van volgende principes:

- De toename in snelheid in een bepaald tijdsinterval is gelijk aan de oppervlakte onder de $a(t)$ curve tijdens dit tijdsinterval;
- De toename in de plaatscoördinaat in een bepaald tijdsinterval is gelijk aan de oppervlakte onder de $v(t)$ curve tijdens dit tijdsinterval.

7.3.3.5. Superpositie van rechtlijnige bewegingen

Een bijzondere categorie van bewegingen ontstaat wanneer de beweging analytisch kan opgevat worden als een superpositie van (twee of drie) rechtlijnige bewegingen, die onderling onafhankelijk zijn van elkaar. Dit is het geval wanneer de componenten van de versnelling kunnen geschreven worden onder de vorm van:

$$\begin{aligned} a_x &= f_x(v_x, x, t) & [7-22] \\ a_y &= f_y(v_y, y, t) \\ a_z &= f_z(v_z, z, t) \end{aligned}$$

Soms zegt men dat de bewegingsvergelijkingen in x , y en z -richting dan ontkoppeld zijn van elkaar, waardoor de integratietechnieken die in paragraaf 7.3.3.1 werden gebruikt, op elk van de drie richtingen afzonderlijk kunnen worden toegepast. De 'beweging van een projectiel' of 'de schuine worp' kan op die manier behandeld worden.

Beschouw een projectiel dat gelanceerd wordt met een beginsnelheid v_0 onder een hoek α , zonder rekening te houden met luchtweerstand. We kiezen in het vlak een assenstelsel Oxy . Neem aan dat het projectiel wordt afgevuurd vanuit een punt met coördinaat (x_0, y_0) . De baan van het projectiel wordt nu als volgt bepaald.

De projectie van de bewegingsvergelijking (tweede wet van Newton) op de x -as en y -as levert:

$$\begin{aligned} a_x(t) &= 0 & [7-23] \\ a_y(t) &= -g \end{aligned}$$

Een eerste tijdsintegratie van [7-23] levert de snelheidscomponenten in x- en y-richting:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) &= -gt + v_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad [7-24]$$

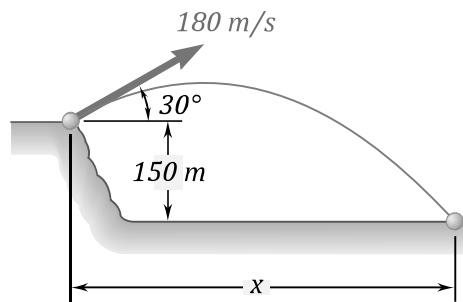
Een tweede tijdsintegratie levert de x- en y-coördinaat (d.w.z. de plaats) van het projectiel op als functie van de tijd:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0(\cos \alpha)t + x_0 \\ y(t) &= -g \frac{t^2}{2} + v_0(\sin \alpha)t + y_0 \end{aligned} \quad [7-25]$$

Dit zijn de parametervergelijkingen. Wanneer de oorsprong van het assenstelsel wordt gelegd op de plaats waar het projectiel wordt afgevuurd, zal $x_0 = 0$ en $y_0 = 0$. Dan vindt men door eliminatie van t uit bovenstaande vergelijkingen een bijkomende (maar niet onafhankelijke) uitdrukking:

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x \quad [7-26]$$

die de vorm van de baan die het projectiel volgt, beschrijft: een parabool met zijn symmetrie-as evenwijdig aan de y-as.



Voorbeeldoefening 7-2: Een projectiel wordt afgevuurd met een beginsnelheid van 180 m/s vanop een hoogte van 150 m onder een hoek van 30°. Bepaal (a) de horizontale afstand x en (b) de maximale hoogte die bereikt door het projectiel. De luchtweerstand mag verwaarloosd worden. [Antwoord: (a) $x = 3100$ m en (b) $h_{\max} = 563$ m boven de grond]

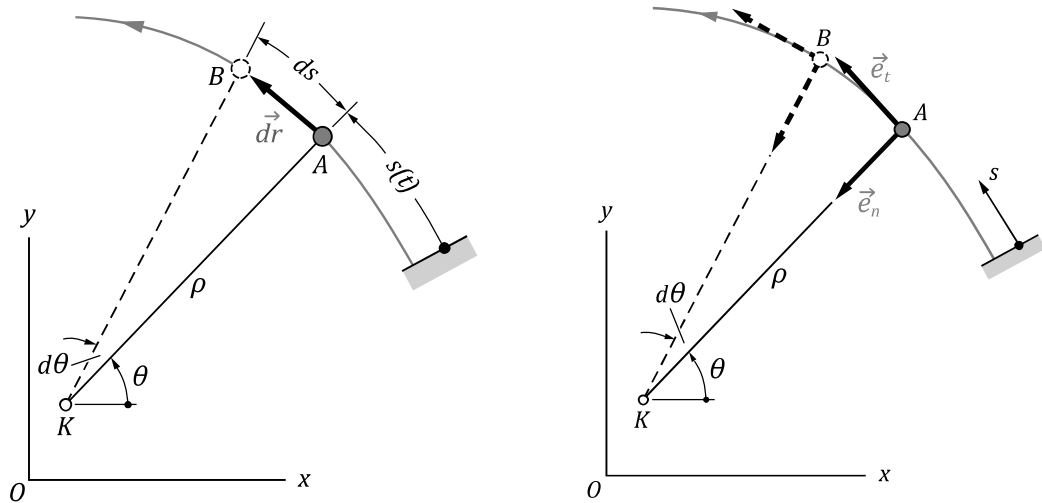
7.4 Normale en tangentiële coördinaten

7.4.1 Geometrische beschrijving

Baancoördinaten steunen op het feit dat een willekeurige kromme baan geen cirkelvormige baan is, maar dat het mogelijk is om een baan te benaderen met aaneensluitende, korte segmenten waarvan de kromming (met kromtestraal ρ) op continue wijze verandert van punt tot punt.

Wanneer gebruik gemaakt wordt van baancoördinaten op een kromme baan, kunnen snelheid en versnelling ook ontbonden worden in zogenaamde tangentiële en normale componenten.

Beschouw een puntmassa die beweegt op een kromme baan en waarvan de positie steeds bepaald wordt door een coördinaat $s(t)$. Als de puntmassa beweegt van A naar B tijdens een infinitesimaal interval dt , beschrijft het een boog met lengte ds en kromtestraal ρ .



Figuur 7-6: Links: geometrische beschrijving, Rechts: eenheidsvectoren. K is het kromtemiddelpunt. Dit is het middelpunt van de cirkel die lokaal het beste aansluit bij de kromme baan. De straal van deze cirkel is de kromtestraal ρ .

Men noemt het kromtemiddelpunt K van een vlakke kromme de limietstand van het snijpunt van de normalen aan de kromme in twee naburige punten A en B. Dit punt ligt veelal in het eindige (bv. bij een cirkel). Het kromtemiddelpunt is het middelpunt van de cirkel die plaatselijk het best de kromme benadert. De kromtestraal van de kromme in het beschouwde punt is dan de afstand van deze samenvallende punten tot de kromme.

In de wiskunde toont men aan dat voor een baan beschreven door $y(x)$, de kromtestraal ρ in een punt op deze baan gegeven wordt door:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2} = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{y''} \quad [7-27]$$

of

$$\rho = \frac{[1 + (dx/dy)^2]^{3/2}}{d^2x/dy^2} = \frac{(1 + (x')^2)^{3/2}}{x''} \quad [7-28]$$

als de baan beschreven wordt met een functie $x(y)$. Kennis van de kromtestraal van de baan zal noodzakelijk blijken om de theorie uit de volgende paragrafen te kunnen toepassen.

De twee eenheidsvectoren die op de figuur staan afgebeeld, zijn van groot belang in de verdere redeneringen:

- De tangentiële eenheidsvector \vec{e}_t is rakend aan de baan en gericht volgens de toenemende s -coördinaat;
- De normale eenheidsvector \vec{e}_n staat loodrecht op de baan (en dus ook loodrecht op de eenheidsvector \vec{e}_t) en is steeds gericht naar het kromtemiddelpunt K.

7.4.2 Snelheid en versnelling

Hierna worden de snelheids- en versnellingsvector geschreven door gebruik te maken van dit nieuwe assenstelsel met de tangentiële eenheidsvector \vec{e}_t en de normale eenheidsvector \vec{e}_n .

7.4.2.1. Snelheid

De snelheid wordt gedefinieerd als:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad [7-29]$$

waarbij Δs een stukje van de afgelegde weg van de puntmassa voorstelt. $\Delta \vec{r}$ wordt ook de koorde genoemd. Men kan grafisch aantonen dat:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = 1 \cdot \vec{e}_t \quad [7-30]$$

Deze eenheidsvector ligt rakend aan de baan in de als positief gekozen zin. We bekomen dus:

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \vec{e}_t = v \vec{e}_t \quad [7-31]$$

De scalar $v = ds/dt$ geeft hier de verandering van de afgelegde weg met de tijd, en kan een positieve (als s toeneemt) en een negatieve waarde (als s daalt) aannemen. De snelheidsvector is, zoals eerder aangetoond, gelegen volgens de raaklijn aan de baan van de puntmassa.

7.4.2.2. Versnelling

De versnelling van het puntmassa wordt per definitie gegeven door:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \vec{e}_t) \quad [7-32]$$

Zowel de grootte als de richting van deze vector zijn tijdsafhankelijk, waardoor de productregel moet toegepast worden:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} \quad [7-33]$$

Merk hierbij op dat \vec{e}_t ook varieert in functie van de tijd (Figuur 7-7), waardoor zijn tijdsafgeleide verschilt van nul.

Met de steun van Figuur 7-7 en kennis van de eigenschappen van gelijkvormige driehoeken, vinden we:

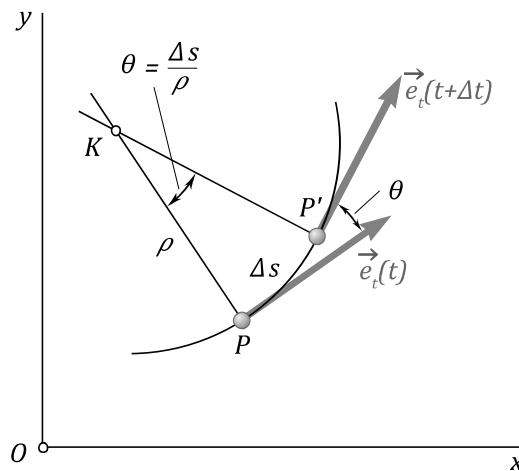
$$\vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t) = \frac{\Delta s}{\rho} \vec{e}_n \quad [7-34]$$

zodat

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{e}_t(t + \Delta t) - \vec{e}_t(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t} \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_n}{\rho} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{\rho} \vec{e}_n \quad [7-35]$$

Men concludeert uiteindelijk dat:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad [7-36]$$

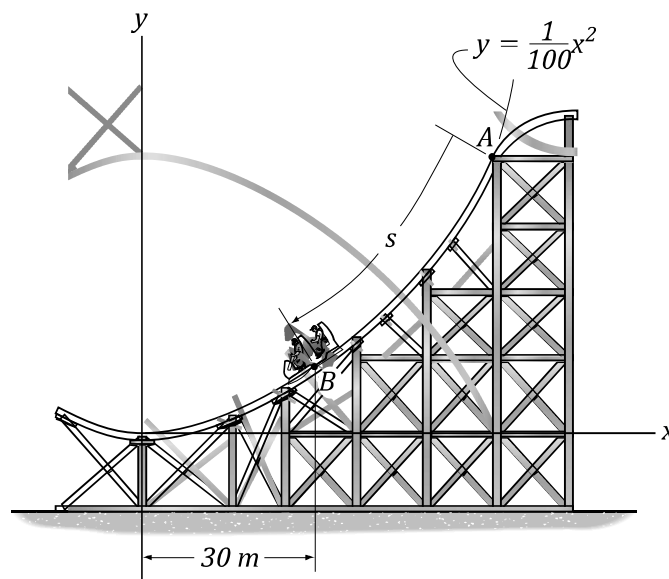


Figuur 7-7: De tijdsafgeleide van de tangentiële eenheidsvector verschilt van nul en is gericht naar het kromtemiddelpunt K.

Vergelijking [7-36] toont dat de versnelling van een punt dat een vlakke kromme doorloopt, steeds kan worden ontbonden in twee componenten, die tegelijk ook fysisch de oorzaak van versnelling verklaren. De twee scalaire componenten zijn:

- $a_t = \frac{dv}{dt}$ gericht volgens de raaklijn, met een positieve (in de bewegingsrichting) of negatieve (tegen de bewegingsrichting) waarde;
- $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ gericht volgens de normale, steeds naar het kromtemiddelpunt toe. De waarde is steeds positief.

Deze twee componenten geven de verandering van grootte, respectievelijk de richtingsverandering van de snelheidsvector weer.



Voorbeeldoefening 7-3: Een rollercoaster heeft een snelheid van 25 m/s bij punt B en deze snelheid neemt toe met 3 m/s². Bepaal de grootte van de versnelling van de rollercoaster [Antwoord: a = 8,43 m/s²]

OPMERKING: Via de kettingregel vinden we:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot v \quad [7-37]$$

Waaruit volgt

$$a_t \cdot ds = v \cdot dv \quad [7-38]$$

Deze differentiaalvergelijking kan vervolgens opgelost te worden door het linkerlid en rechterlid te integreren. Dit principe is volledig analoog aan wat werd gezien bij de rechte beweging (formule [7-20]). Merk wel op dat in [7-38] gebruik gemaakt wordt van de tangentiële component van de versnelling.

7.4.3 Speciale gevallen

7.4.3.1. Eénparige beweging

Wanneer een punt op éénparige wijze ($v = \text{constant}$) een kromme doorloopt, verandert de grootte van de snelheid niet, wel haar richting. Men concludeert dat $a_t = dv/dt = 0$. Er blijft wel een normale versnellingscomponent met grootte $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ over. De versnellingsvector wordt dan:

$$\vec{a}(t) = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \quad [7-39]$$

7.4.3.2. Rechte baan

Wanneer een punt een rechte baan doorloopt, heeft de versnelling geen normale component, gezien de kromtestraal oneindig groot is. De versnellingsvector wordt dan:

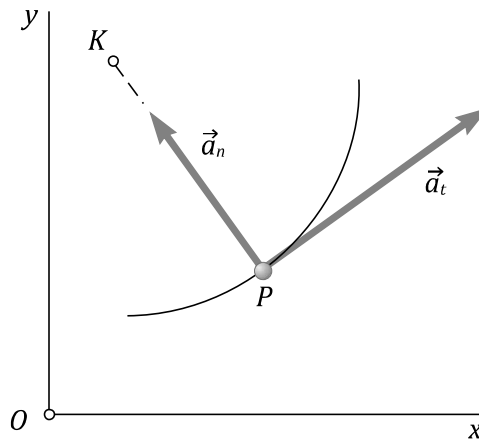
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t \quad [7-40]$$

Merk hier tevens op dat de theorie die behandeld werd onder 7.3.3, ook kon uitgelegd worden als ware het een specifiek geval van werken met baancoördinaten.

7.4.3.3. Cirkelbaan

Wanneer het punt een cirkel met straal R doorloopt, is de normale component naar het middelpunt van de cirkel gericht en gelijk aan $a_n = \frac{v^2}{R}$. De versnellingsvector wordt dan:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \quad [7-41]$$

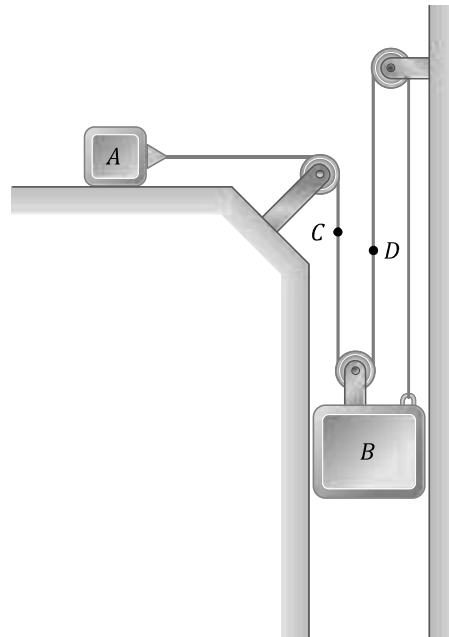


Figuur 7-8: Normale en tangentiële component van de versnelling van een puntmassa op een cirkelbaan. De totale versnelling wordt berekend als vectorsom van beide versnellingscomponenten.

7.5 Gekoppelde en relatieve beweging

7.5.1 Gekoppelde (afhankelijke) beweging

In sommige situaties hangt de beweging van een puntmassa rechtstreeks af van de beweging van een andere puntmassa, bijvoorbeeld wanneer twee puntmassa's fysiek verbonden zijn met elkaar door middel van een (niet rekbare) kabel, die eventueel over één of meerdere katrollen wordt gehangen. In dat geval dienen wiskundige verbanden gevonden worden tussen de coördinaten van de twee puntmassa's, waaruit het verband tussen de beide snelheden en versnellingen kan worden gehaald. Deze methode wordt geïllustreerd aan de hand van onderstaand voorbeeld.

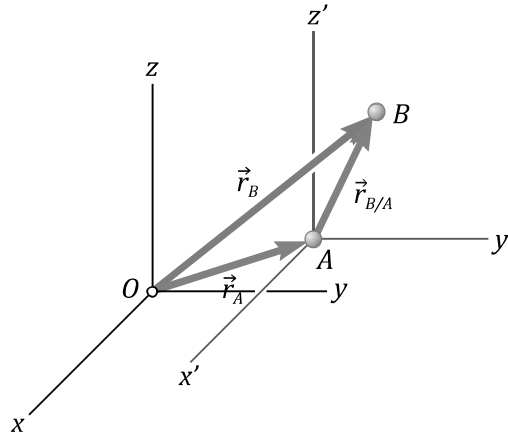


Voorbeeldoefening 7-4: A beweegt naar links met een constante snelheid van 6 m/s. Bepaal (a) de snelheid van blok B, (b) de snelheid van touwdeel D en (c) de relatieve snelheid van touwdeel C ten opzichte van D. [Antwoord: (a) 2 m/s naar boven, (b) 2 m/s naar beneden (c) 8 m/s naar boven].

7.6 Relatieve beweging

7.6.1.1. Achtergrond

In voorgaande paragrafen hebben we de beweging van een punt beschouwd t.o.v. een vast (absoluut) assenstelsel, en op basis daarvan absolute snelheden en versnellingen gedefinieerd. Het zijn ook net deze absolute grootheden die later in deze cursus gebruikt zullen worden in de 2^{de} wet van Newton, en de energiemethoden beschreven in hoofdstuk 8.



Figuur 7-9: Relatieve beweging van B ten opzichte van A.

Figuur 7-9 toont twee puntmassa's A en B die elk een baan volgen. \vec{r}_A is de plaatsvector van A in het absoluut assenstelsel $Oxyz$. \vec{r}_B is de plaatsvector van B in het absoluut assenstelsel. De positie van B t.o.v. A wordt aangegeven met de plaatsvector $\vec{r}_{B/A}$. De positie van het punt B in het absolute stelsel kan bijgevolg geschreven worden als:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A} \quad [7-42]$$

Eén maal afleiden naar de tijd levert:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \quad [7-43]$$

Waarbij de relatieve snelheid gegeven wordt door:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} \quad [7-44]$$

Nogmaals afleiden levert:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \quad [7-45]$$

Met de relatieve versnelling genoteerd als:

$$\vec{a}_{B/A} = \frac{d\vec{v}_{B/A}}{dt} \quad [7-46]$$

7.6.1.2. Translerend assenstelsel

Soms is het evenwel aangewezen om relatieve beweging te beschrijven vanuit een assenstelsel dat beweegt met een andere puntmassa. In wat volgt beschrijft het bewegend assenstelsel $Ax'y'z'$ een translatie t.o.v. het absoluut assenstelsel $Oxyz$.

In dit translaterende assenstelsel zijn de coördinaten van B gelijk aan x' , y' en z' . De relatieve plaatsvector $\vec{r}_{B/A}$ is dan:

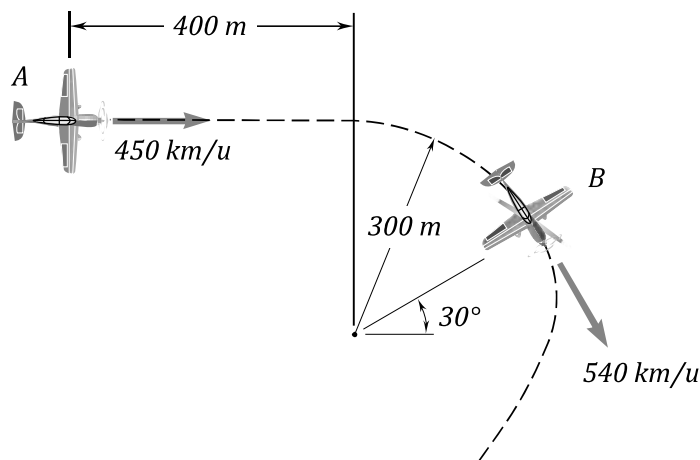
$$\vec{r}_{B/A} = x' \vec{e}_x + y' \vec{e}_y + z' \vec{e}_z \quad [7-47]$$

De relatieve snelheid en relatieve versnelling van B worden verkregen door afleiden naar de tijd:

$$\vec{v}_{B/A} = \frac{dx'}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy'}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz'}{dt} \vec{e}_z \quad [7-48]$$

$$\vec{a}_{B/A} = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{e}_z$$

We concluderen dat de twee vergelijkingen uit [7-48] de snelheid en versnelling weergeven van B zoals die ervaren wordt door een (niet-roterende) waarnemer die meebeweegt met puntmassa A.



Voorbeeldoefening 7-5: De snelheid van vliegtuig A neemt toe met 8 m/s^2 . Vliegtuig B vliegt op dezelfde hoogte als A, in een cirkel met straal 300 m. Zijn snelheid neemt af met 3 m/s^2 . Bepaal de snelheid en de versnelling van B ten opzichte van A [Antwoord: $v_{B/A} = 501 \text{ km/u}$ en $a_{B/A} = 82,2 \text{ m/s}^2$].

7.7 Kennis- en conceptvragen

- Hoe definieer je de begrippen plaatsvector, snelheidsvector en versnellingsvector? Wat is het verband tussen deze drie begrippen?
- Wat is een rechtlijnige beweging?
- Wat is een éénparige en een éénparig veranderlijke beweging?
- Welke soort beweging is een valbeweging zonder luchtweerstand? Leid een formule af die de plaats (hoogte) in functie van de tijd weergeeft.
- Teken een kruk-drijfstaangmechanisme. Welke soort beweging maakt de zuiger?
- Wanneer gebruik je bij een beweging op een kromme baan bij voorkeur (a) cartesische coördinaten (b) normale en tangentiële coördinaten?
- Wat betekent 'tangentieel' en 'normaal'? Geef telkens een synoniem.

- Wat is een kromtecirkel, kromtemiddelpunt en een kromtestraal? Hoe bereken je deze laatste? Wat is de fysische betekenis ervan? Waarom hebben we deze waarde soms nodig in de kinematica?
- Wat wordt verstaan onder een gekoppelde beweging?
- Indien de versnelling van een puntmassa op een rechte baan negatief blijkt te zijn, wil dit altijd zeggen dat de puntmassa aan het vertragen is? Leg uit.
- Waarom is het nuttig om een snelheidsvector te kennen en niet enkel de grootte van de snelheid?
- Waarom is het nuttig om een versnellingsvector te kennen en niet enkel de grootte van de versnelling?
- Geef een analytische uitdrukking voor de verticale valbeweging met luchtweerstand. Wat is het begrip terminale snelheid?
- Van welke vectorvergelijking start men om de beweging van een projectiel zonder luchtweerstand te beschrijven?
- Als persoon A een tennisbal 2 maal verder kan werpen dan persoon B, betekent dit dat hij dan ook twee maal zo hard kan werpen? Leg uit.
- De beweging van een projectiel (zonder luchtweerstand) blijkt onafhankelijk te zijn van de massa. Waarom is het dan zoveel gemakkelijker om een tennisbal van 57 gram 20 meter ver te gooien dan een loden bal van 5 kg met hetzelfde formaat (ook al hebben beide hetzelfde formaat).
- In veel toepassingen wordt het effect van luchtweerstand verwaarloosd. Is dit altijd gerechtvaardigd. Wanneer zal luchtweerstand in realiteit wel een belangrijke impact hebben? Geef een aantal praktische voorbeelden.
- Hoe bepaal je de positie van het kromtemiddelpunt (wanneer de baan gekend is)?
- Toon volledig aan dat een versnellingsvector van een punt dat beweegt op een kromme baan de vectorsom is van een tangentiële component en een normale component.
- Waar wordt bij een normale werpbeweging de grootste en kleinste snelheid en versnelling bereikt (zonder luchtweerstand)?
- Hoe ziet de beweging van een projectiel eruit met luchtweerstand? Bestaan er analytische oplossingen voor?
- Is het vanuit fysisch oogpunt ook zinvol om de versnelling af te leiden naar de tijd? Zo ja, bestaat er een naam voor dit begrip? Ken je toepassingen?