

REEKSEN

①

• reik $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = L$ (reeksom)

$\Leftrightarrow s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} L$
(rij der partiële sommen)

benaming: de reeks convergeert

• noodige voor

$a_m \rightarrow 0$ voor $m \rightarrow +\infty$
algemene term

• onderzoek van de convergentie? via stellingen

ST: $\sum_{m=1}^{+\infty} |a_m| \text{ CONVR} \Rightarrow \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \text{ CONVR}$ (2)

noddoende rwe
geen nodige rwe

VB1 $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \text{ CONVR}$

dus $\left[\begin{array}{l} \bullet \sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m^2} \text{ CONVR} \text{ (reeds gekend via Leibniz)} \\ \bullet 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \dots \text{ CONVR} \end{array} \right.$

VB2

$\sum_{m=1}^{+\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{m} \text{ CONVR}$ hoewel $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \text{ DIV}$

benaming

(3)

• $\sum_{m=1}^{+\infty} |a_m|$ CONV, dan $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ ABS CONV

• $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ CONV, dan $\sum_{m=1}^{+\infty} |a_m|$ DIV
betrekkelijk CONV

VB

• $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2}$ ABS CONV

• $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$ BETREKKEK CONV

• oef : ? $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$

ST: vergelijkingstest
stel $\begin{cases} a_m, b_m > 0 \\ a_m \leq b_m \end{cases}$

$\forall m \geq M$
zekere startwaarde

• als $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ CONV, dan $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ CONV

convergente
majorante

• als $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ DIV, dan $\sum_{m=1}^{+\infty} b_m$ DIV

divergente
minorante

VP $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{m}}$ DIV want $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m}$ DIV
en $\sqrt{m} \leq m \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} \geq \frac{1}{m}$

ST: (convergentietest van d'Alembert)

(5)

beschouw $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$

stel

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \text{vast getal}}}{c} < 1, \text{ dan } \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \text{ ABS CONV } (*) \\ \bullet \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| \geq 1, \text{ dan } \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \text{ DIV} \end{array} \right. \quad \text{voor } m \geq M$$

want $a_m \not\rightarrow 0$
(voldoet niet aan nodige voor)

merk op: er ontbreekt een geval! nl.

$$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| < 1 \text{ en } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$$

inductie, beschouw

(6)

• $\sum_{m=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{m}}_{a_m}$, dan $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{m}{m+1} < 1$
en $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$

DIV

• $\sum_{m=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{m^2}}_{a_m}$, dan $\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{m^2}{(m+1)^2} < 1$
en $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$

CONV

dus: in dat geval geen algemeen besluit mogelijk!

B van (*)

(7)

$$* |a_{n+1}| \leq r |a_n|$$

$$* |a_{n+2}| \leq r |a_{n+1}| \leq r^2 |a_n|$$

$$* |a_{n+3}| \leq r |a_{n+2}| \leq r^3 |a_n|$$

!

Dus

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| = \underbrace{\sum_{m=0}^{M-1} |a_m|}_{\text{eindig}} + \underbrace{\sum_{m=M}^{+\infty} |a_m|}_{?}$$

met

$$\sum_{m=M}^{+\infty} |a_m| = |a_M| + |a_{M+1}| + \dots$$

$$\leq |a_M| (1 + r + r^2 + r^3 + \dots)$$

conv. majorante

ABS
CONV

alternatieve formulering van d'Alembert

(8)

ST beschouw $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$

en $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|$

als

- $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| < 1$: ABS CONV
- $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| > 1$: DIV
- $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = 1$: geen besluit
verder onderzoek nodig

