

## 1.7 Het boloppervlak

**Definitie 1.7.1.** Een boloppervlak met middelpunt  $m$  en straal  $R$  is de verzameling van alle punten die op vaste afstand  $R$  van  $m$  liggen.

$$\{p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d(p, m) = R\}$$

**Cartesische vergelijking**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \quad \text{met } m(x_0, y_0, z_0)$$

Een vergelijking van de tweede graad in  $x$ ,  $y$  en  $z$  stelt een boloppervlak (of de ledige verzameling) voor als de coëfficiënten van  $xy$ ,  $yz$  en  $zx$  gelijk zijn aan 0 en als de coëfficiënten van  $x^2$ ,  $y^2$  en  $z^2$  gelijk zijn en verschillend van 0.

■ **Voorbeeld 1.9** Bepaal middelpunt en straal van  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 8y - 16z + 23 = 0$ .

Omzetting van de vergelijking:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + \frac{23}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{1}{4}$$

Middelpunt  $m(1, -1, 2)$ , straal  $R = \frac{1}{2}$ .

**Eigenschap 1.7.1**

- (1) Is  $p$  een punt van de bol met middelpunt  $m$ , dan staat de rechte  $mp$  loodrecht op het raakvlak (en dus ook elke raaklijn) in  $p$  aan de bol.
- (2) Zijn  $p_1$  en  $p_2$  punten van de bol met middelpunt  $m$ , dan behoort  $m$  tot het middelloodvlak van  $[p_1, p_2]$ .

■ **Voorbeeld 1.10** Bepaal raakvlak en normaal in het punt  $p(1, 1, 0)$  aan de bol

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y = 2.$$

De vergelijking van het boloppervlak is gelijkwaardig met:  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4$

Middelpunt van de bol:  $m(-1, 1, 0)$ .

Uit eigenschap (1) volgt:  $\vec{pm} \perp$  raakvlak in  $p$ .

$\Rightarrow$  De normaalvector van het raakvlak:  $\{-2, 0, 0\} // \{1, 0, 0\}$

Raakvlak:  $x = 1$

Normaal:  $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

■ **Voorbeeld 1.11** Bepaal de vergelijking van het boloppervlak door de punten  $o(0, 0, 0)$ ,  $a(3, 5, -4)$ ,  $b(3, 3, 0)$  en  $c(0, 4, -4)$ .

Uit eigenschap (2) volgt dat het middelpunt het snijpunt is van de middelloodvlakken van drie lijnstukken bepaald door de vier punten. De straal is de afstand van één van de punten tot het middelpunt.

Middelloodvlak van  $[oa]$ :

- midden van  $[oa]$ :  $m_1 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -2)$
- richtingsvector van  $oa$ :  $\vec{u}_1 = \{3, 5, -4\}$
- middelloodvlak gaat door  $m_1$  en heeft normaalvector  $\vec{u}_1$ :  $\alpha_1 : 3x + 5y - 4z = 25$

Middelloodvlak van  $[ob]$ :

– door  $m_2(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ , met normaalvector  $\vec{u}_2\{3, 3, 0\} // \{1, 1, 0\}$ :  $\alpha_2 : x + y = 3$

Middelloodvlak van  $[oc]$ :

– door  $m_3(0, 2, -2)$ , met normaalvector  $\vec{u}_3\{0, 4, -4\} // \{0, 1, -1\}$ :  $\alpha_3 : y - z = 4$

Middelpunt  $m$  van de bol is het snijpunt van  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ :

$$\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 25 \\ x + y = 3 \\ y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow m(3, 0, -4)$$

Straal:  $R = d(o, m) = 5$

Vergelijking van het boloppervlak door de 4 punten:  $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 25$ .

## 1.8 De cirkel in de ruimte

### 1.8.1 Middelpunt en straal van de cirkel

De vergelijking van de cirkel  $C$  kan men bijvoorbeeld bekomen als snijlijn van een bol  $B$  met een vlak  $\alpha$ :

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

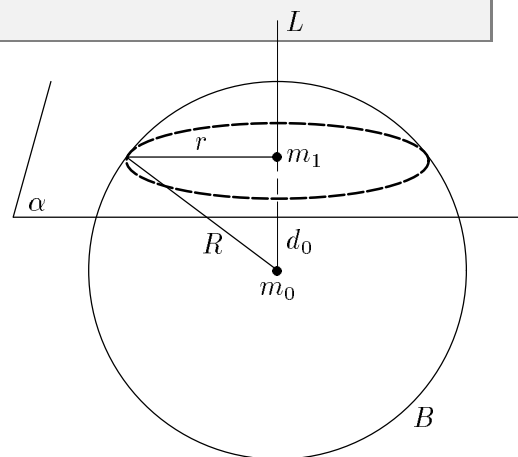
Dit stelsel is niet uniek!

Middelpunt van de cirkel:

Bepaal de rechte  $L$  door het middelpunt  $m_0(x_0, y_0, z_0)$  van de bol  $B$  loodrecht op het vlak  $\alpha$ . Het middelpunt  $m_1$  van de cirkel is het snijpunt van  $L$  en  $\alpha$ .

Straal van de cirkel:

Bepaal de afstand  $d_0$  van  $m_0$  tot  $\alpha$ . Uit de stelling van Pythagoras volgt de straal van de cirkel:  $r = \sqrt{R^2 - d_0^2}$ .



■ **Voorbeeld 1.12** Bepaal middelpunt en straal van de cirkel:  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 4z + 4 = 0 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

De bol heeft middelpunt  $m_0(4, 3, 2)$  en straal  $R = 5$  omdat

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 4z + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$$

De rechte  $L$  door  $m_0$ , loodrecht op  $\alpha$ :  $\frac{x - 4}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 2}{2}$

Het snijpunt van  $L$  en  $\alpha$ :

$$\begin{cases} x = 2k + 4 \\ y = k + 3 \\ z = 2k + 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(2k + 4) + (k + 3) + 2(2k + 2) = 3 \Leftrightarrow 9k = -12$$

Middelpunt van de cirkel:  $m_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

De afstand  $d_0$  van  $m_0$  tot  $\alpha$ :

$$d_0 = d(m_0, \alpha) = \frac{|8 + 3 + 4 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 4$$

De straal van de cirkel:  $r = \sqrt{25 - 16} = 3$

### 1.8.2 Cirkel door drie niet-collineaire punten

Bepaal het vlak  $\alpha$  door de 3 punten.

Bepaal de middelloodvlakken  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  van 2 lijnstukken bepaald door de 3 punten. Neem een willekeurig punt  $m_0$  op de snijlijn van  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ , en bereken de afstand  $R$  van  $m_0$  tot één van de 3 punten.

De cirkel wordt bepaald door het stelsel gevormd door de vergelijking van het vlak  $\alpha$  en de bol met middelpunt  $m_0$  en straal  $R$ .

! Kiezen we  $m_0$  in het vlak  $\alpha$  (m.a.w.  $m_0$  het snijpunt van de 3 vlakken  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ ), dan zijn  $m_0$  en  $R$  tevens het middelpunt en de straal van de cirkel.

■ **Voorbeeld 1.13** Bepaal de cirkel door de punten  $a(0, 1, 0)$ ,  $b(-1, 1, 0)$  en  $c(0, 1, 1)$ .

$$\text{Vlak } \alpha \text{ door } a, b \text{ en } c: \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Middelloodvlak  $\alpha_1$  van  $[ab]$ :

door  $m_1(-\frac{1}{2}, 1, 0)$  met normaalvector  $\vec{n}_1 = \{1, 0, 0\}$ :  $x = -\frac{1}{2}$

Middelloodvlak  $\alpha_2$  van  $[ac]$ :

door  $m_2(0, 1, \frac{1}{2})$  met normaalvector  $\vec{n}_2 = \{0, 0, 1\}$ :  $z = \frac{1}{2}$

Een punt van de snijlijn van  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$ :  $m_0(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

De straal van de bol is:  $R = |m_0a| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\text{De cirkel: } \begin{cases} y = 1 \\ (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

! Het snijpunt van  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  en  $\alpha_2$  is  $m(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$  en is tevens het middelpunt van de cirkel.

## 1.9 Classificatie van tweedegraadsoppervlakken in de ruimte

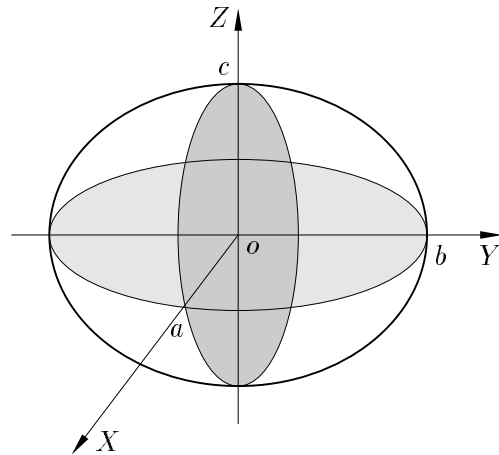
Bij de classificatie wordt enkel de standaardvorm vermeld. Na rotatie of translatie is elke tweedegraadsvergelijking naar deze vorm herleidbaar.

De snijkromme van een oppervlak met een coördinaatvlak noemt men een **doorgang**. De snijkromme van een oppervlak met een vlak evenwijdig met één van de coördinaatvlakken noemt men een **niveaulijn**.

### 1.9.1 De ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1. Het middelpunt is  $o$ . De halve assen zijn  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
2. De drie doorgangen zijn ellipsen.
3. Zijn 2 van de drie getallen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  gelijk dan heeft men een omwentelingsellipsoïde. Is bv.  $a = c$ , dan is dit de omwentelingsellipsoïde die ontstaat door wentelen van de ellips  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  in het  $XY$ -vlak om de  $Y$ -as.
4. Is  $a = b = c$  dan is de ellipsoïde een bol.

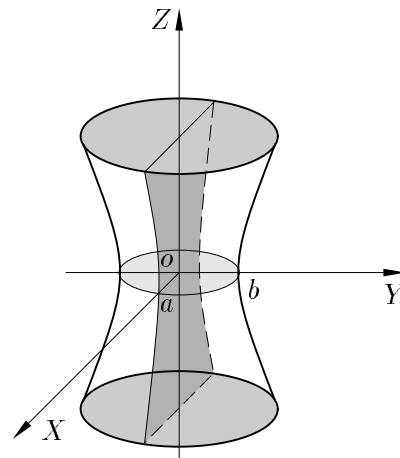


### 1.9.2 De hyperboloïde

#### De eenbladige hyperboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

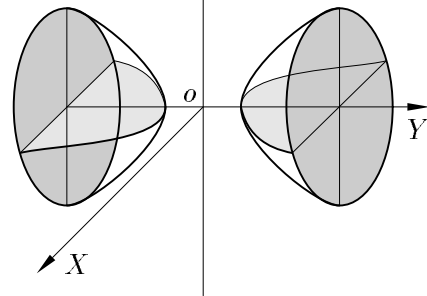
1. Het middelpunt is  $o$ . De halve assen zijn  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
2. Twee van de drie doorgangen zijn hyperbolen, de derde doorgang is een ellips.
3. Is  $a = b$ , dan is dit de omwentelingshyperboloïde die ontstaat door wentelen van de hyperbool  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  in het  $YZ$ -vlak om de  $Z$ -as.



**De tweebladige hyperboloïde**

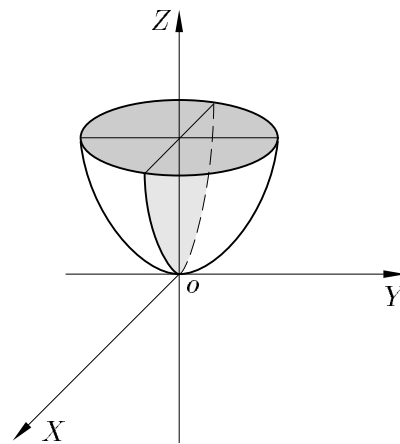
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1. Het middelpunt is  $o$ . De halve assen zijn  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .
2. Twee van de drie doorgangen zijn hyperbolen, de derde doorgang is ledig. De niveaulijnen parallel met deze derde doorgang zijn ellipsen (of ledig).
3. Is  $a = c$ , dan is dit de omwentelingshyperboloïde die ontstaat door wentelen van de hyperbool  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  in het  $XY$ -vlak om de  $Y$ -as.

**1.9.3 De paraboloiden****De elliptische paraboloiden**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$$

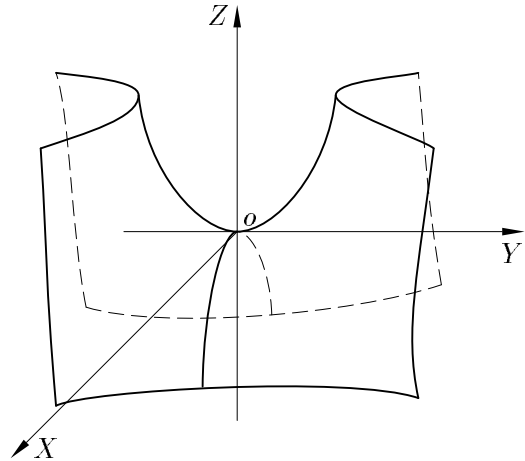
1. De top is  $o$ .
2. Twee van de drie doorgangen zijn parabolen, de derde doorgang is de oorsprong. Niveaulijnen parallel met deze derde doorgang zijn ellipsen.
3. Is  $a = b$ , dan is dit de omwentelingsparaboloiden die ontstaat door wentelen van de parabool  $\frac{y^2}{b^2} = 2cz$  in het  $YZ$ -vlak om de  $Z$ -as.



**De hyperbolische parabolöide**

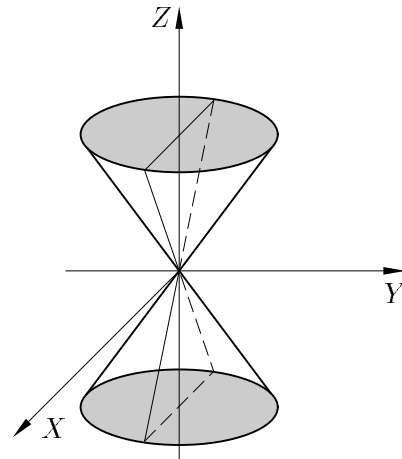
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 2cz$$

1. Twee van de drie doorgangen zijn parabolen, de derde doorgang bestaat uit twee rechten. Niveaulijnen parallel met deze derde doorgang zijn hyperbolen.
2. Dit oppervlak wordt ook een **zadeloppervlak** genoemd. De oorsprong is het **zadelpunt**.

**1.9.4 De kegel**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- ! Twee van de drie doorgangen vormen een rechtepaar, de derde doorgang is de oorsprong. Niveaulijnen parallel met deze derde doorgang zijn ellipsen. Niveaulijnen evenwijdig aan de eerste twee doorgangen zijn hyperbolen.

**1.9.5 Het cilinderoppervlak****De hyperbolische cilinder**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1. De beschrijvende van dit cilinderoppervlak zijn evenwijdig met de Z-as.
2. De niveaulijnen verkregen door doorsneden loodrecht op de Z-as zijn hyperbolen.

**De elliptische cilinder**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1. De beschrijvende van dit cilinderoppervlak zijn evenwijdig met de Z-as.
2. De niveaulijnen verkregen door doorsneden loodrecht op de Z-as zijn ellipsen.

**De parabolische cilinder**

$$x^2 = 2cy$$

1. De beschrijvende van dit cilinderoppervlak zijn evenwijdig met de Z-as.
2. De niveaulijnen verkregen door doorsneden loodrecht op de Z-as zijn parabolen.

**1.9.6 Ontaarde gevallen**

Tweedegraadsvergelijkingen ontaarden soms in één of meerdere eerstegraadsvergelijking.

**■ Voorbeeld 1.14 .**

1.  $x^2 = 9$  : twee evenwijdige vlakken
2.  $x^2 - y^2 = 0$  : twee vlakken
3.  $x^2 + y^2 = 0$  : de Z-as
4.  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  : de oorsprong

**1.10 Coördinatenstelsels in de ruimte****1.10.1 Cartesische coördinaten (Ca.Co.)**

Beschouw een vast punt  $o$  en een rechtshandige orthonormale basis  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ .

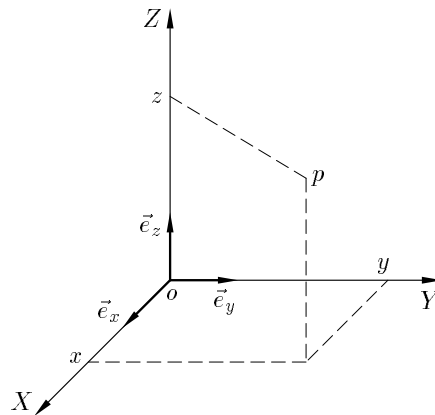
Elk punt  $p$  wordt op ondubbelzinnige wijze bepaald door zijn plaatsvector

$$\vec{op} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Het punt  $p$  heeft coördinaten  $(x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \vec{op} \text{ heeft componenten } \{x, y, z\}$$

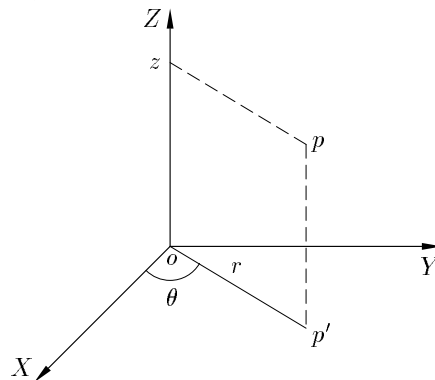
We noemen  $(x, y, z)$  de **cartesische** coördinaten van een punt.

**1.10.2 Cilindercoördinaten (Ci.Co.)**

Bepaal de loodrechte projectie  $p'$  van het punt  $p$  op het  $XY$ -vlak. Het punt  $p'$  wordt op ondubbelzinnige wijze bepaald door de poolcoördinaten  $(r, \vartheta)$  van het punt  $p'$  in het  $XY$ -vlak en de  $z$ -coördinaat van het punt  $p$ .

We noemen  $(r, \vartheta, z)$

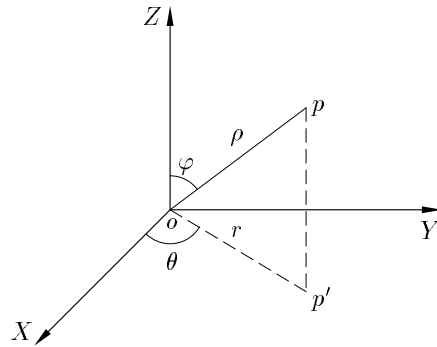
de **cilindercoördinaten** van een punt.



1.10.3 Bolcoördinaten

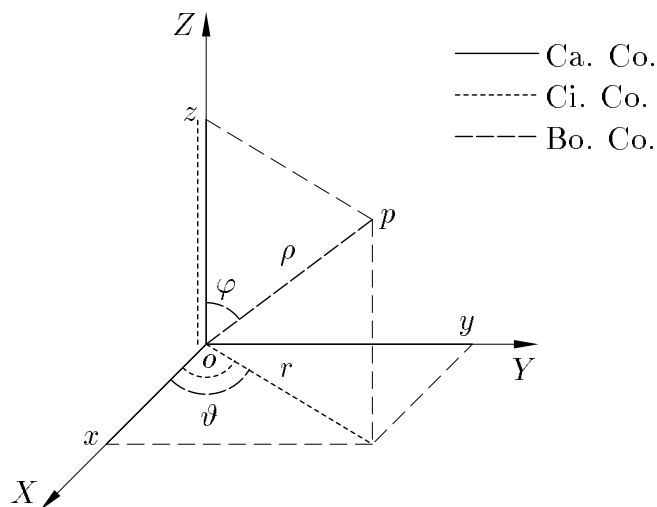
Bepaal de loodrechte projectie  $p'$  van het punt  $p$  op het  $XY$ -vlak. Het punt  $p$  wordt op on-dubbelzinnige wijze bepaald door de afstand  $\rho$  van  $o$  tot  $p$  ( $\rho \geq 0$ ), de poolhoek  $\vartheta$  van het punt  $p'$  in het  $XY$ -vlak en de hoek  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ) tussen de  $Z$ -as en de voerstraal  $op$ .

We noemen  $(\rho, \vartheta, \varphi)$  de **bolcoördinaten** van een punt.



1.10.4 Omzettingsformules

	Ca.Co. $(x, y, z)$	Ci.Co. $(r, \vartheta, z)$	Bo.Co. $(\rho, \vartheta, \varphi)$
Ca.Co. $(x, y, z)$		$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\vartheta = 'Bgtg \left(\frac{y}{x}\right)'$ $z = z$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vartheta = 'Bgtg \left(\frac{y}{x}\right)'$ $\varphi = 'Bgtg \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)'$
Ci.Co. $(r, \vartheta, z)$	$x = r \cos \vartheta$ $y = r \sin \vartheta$ $z = z$		$\rho = \sqrt{z^2 + r^2}$ $\vartheta = \vartheta$ $\varphi = 'Bgtg \left(\frac{r}{z}\right)'$
Bo.Co. $(\rho, \vartheta, \varphi)$	$x = \rho \sin \varphi \cos \vartheta$ $y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta$ $z = \rho \cos \varphi$	$r = \rho \sin \varphi$ $\vartheta = \vartheta$ $z = \rho \cos \varphi$	



- **Voorbeeld 1.15** Bepaal Ci.Co. en Bo.Co. van het punt met Ca.Co.  $p_1(-1, 0, -\sqrt{3})$ .  
 Bepaal Ca.Co. en Bo.Co. van het punt met Ci.Co.  $p_2(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 0)$ .  
 Bepaal Ca.Co. en Ci.Co. van het punt met Bo.Co.  $p_3(1, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ .

	$p_1$	$p_2$	$p_3$
Ca.Co. $(x, y, z)$	$(-1, 0, -\sqrt{3})$	$(2, -2, 0)$	$(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$
Ci.Co. $(r, \vartheta, z)$	$(1, \pi, -\sqrt{3})$	$(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, 0)$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{1}{2})$
Bo.Co. $(\rho, \vartheta, \varphi)$	$(2, \pi, \frac{5\pi}{6})$	$(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(1, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$

- **Voorbeeld 1.16** Bepaal de vergelijking in Ci.Co. en in Bo.Co. van:

1. de eenbladige hyperboloïde:  $4x^2 + 4y^2 = 4z^2 + 1$

Ci.Co.:  $4r^2 = 4z^2 + 1 \Leftrightarrow 4r^2 - 4z^2 = 1$

Bo.Co.:  $4r^2 - 4z^2 = 1 \Leftrightarrow 4\rho^2 \sin^2 \varphi - 4\rho^2 \cos^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow 4\rho^2 \cos 2\varphi + 1 = 0$

2. de kegel:  $3(x^2 + y^2) = z^2$

Ci.Co.:  $3r^2 = z^2$

Bo.Co.:  $3r^2 = z^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{z^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$  of  $\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$