

# WAll: integratie in 3D

H. De Bie

Universiteit Gent

Integralen over intervallen in  $\mathbb{R}^3$

Integralen over algemenere gebieden

Overgaan op nieuwe veranderlijken in 3D  
Verband met substitutieregels in 1D?

Hoe passen we de theorie aan voor intervallen in  $\mathbb{R}^3$ ?

Zij  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  een gesloten interval in  $\mathbb{R}^3$ .

## Definitie

Zij  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .

*Een partitie  $\mathcal{P}$  van  $I$  is elke verzameling van  $mnp$  intervallen*

$$I_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

*waarbij*

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_m = b_1$$

$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{j-1} < y_j < \dots < y_n = b_2$$

$$a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{k-1} < z_k < \dots < z_p = b_3.$$

Maat voor grootte interval:

$$\text{diam } I_{ijk} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}.$$

### Definitie

Zij  $\mathcal{P}$  een partitie van  $I$  in  $\mathbb{R}^3$ . De norm van  $\mathcal{P}$  is

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{i,j,k} (\text{diam } I_{ijk}).$$

### Definitie

Zij  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd op  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ .  
De **Riemann som** van  $f$  met de gelabelde partitie  $\mathcal{P}_c$  van  $I$  is

$$S(f, \mathcal{P}_c) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p f(c_{ijk}) V_{ijk},$$

waarbij  $V_{ijk} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$ .

## Drievoudige integraal

### Definitie

De functie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  is (Riemann) integreerbaar over  $I$  als er een getal  $L$  bestaat zodat voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $\delta(\epsilon)$  kan worden gevonden waarvoor

$$|S(f, \mathcal{P}_c) - L| < \epsilon$$

voor elke gelabelde partitie  $\mathcal{P}_c \in \mathbf{P}$  met norm  $\|\mathcal{P}_c\| < \delta(\epsilon)$ .

$L$  is dan de (Riemann) integraal van  $f$  over  $I$ . Notatie:

$$\int_I f(x, y, z) dV \quad \text{of} \quad \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz.$$

Blijft gelden:

- ▶ eigenschappen integreerbare functies
- ▶ integraal over unie intervallen = som integralen

## Stelling (Praktisch)

Zij  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  integreerbaar over  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  en zij  $(y, z) \mapsto f(x, y, z)$  integreerbaar over  $I_{y,z} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$  voor elke  $x \in [a_1, b_1]$ . Dan is

$$x \mapsto \iint_{I_{y,z}} f(x, y, z) dydz$$

integreerbaar over  $[a_1, b_1]$  en er geldt:

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a_1}^{b_1} \left[ \iint_{I_{y,z}} f(x, y, z) dy dz \right] dx.$$

Analoog

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{I_{y,z}} \left[ \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

plus alle andere mogelijke herschikkingen.

## Hoe integreren over meer ingewikkelde gebieden?

$\implies$  we beschouwen gebieden  $G$  in  $\mathbb{R}^3$

- ▶ die begrensd zijn
- ▶ waarvan de rand  $\partial G$  bestaat uit een eindig aantal projecteerbare oppervlakken

## Definitie

Zij  $G$  zo een gebied en zij  $I$  een interval met  $G \subset I$ .

Zij  $f$  een functie die begrensd is in  $G$ .

Dan is  $f$  integreerbaar over  $G$  als de functie  $f^*$

$$(x, y, z) \mapsto f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \forall (x, y, z) \in G \\ 0, & \forall (x, y, z) \in I \setminus G \end{cases}$$

integreerbaar is over  $I$ .

Notatie

$$\int_G f(x, y, z) dV = \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz := \int_I f^*(x, y, z) dV.$$

## Volume van een willekeurig gebied $G$

### Definitie

Zij  $G$  een gebied zoals hierboven beschreven.

De functie  $f(x, y, z) = 1, \forall (x, y, z) \in G$  is integreerbaar over  $G$ .

De integraal er van over  $G$  is het volume van  $G$ :

$$V_G = \int_G 1 dV.$$

## Opsplitsen van integratiegebied

### Stelling

Zij  $f$  integreerbaar over  $G \subset \mathbb{R}^3$ .

Stel dat  $G$  door een eindig aantal projecteerbare oppervlakken in twee deelgebieden  $G_1$  en  $G_2$  wordt verdeeld. Dan

$$\int_G f(x, y, z) dV = \int_{G_1} f(x, y, z) dV + \int_{G_2} f(x, y, z) dV.$$

## Uitwerken integralen in $\mathbb{R}^3$ :

### Definitie

Zij  $G \subset \mathbb{R}^3$  gegeven door

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in G_{xy}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), \\ \varphi_1, \varphi_2 \text{ continu in } G_{xy}\}$$

met  $G_{xy}$  begrensd en de rand van  $G_{xy}$  bestaand uit een eindig aantal projecteerbare krommen. Dan is  $G$  XY-projecteerbaar.

### Stelling

Zij  $G$  een XY-projecteerbaar gebied. Zij  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continu in  $G$ . Dan is

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{G_{xy}} \left[ \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

Analoge stellingen voor XZ- en YZ-projecteerbare gebieden

## Stelling

Zij  $G \subset \mathbb{R}^3$  gegeven door

$$G = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, (y, z) \in G_x\}$$

met  $G_x \subset \mathbb{R}^2$  begrensd en de rand van  $G_x$  bestaat uit een eindig aantal projecteerbare krommen.

Zij verder  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  continu in  $G$ . Dan is

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \iint_{G_x} f(x, y, z) dy dz \right] dx.$$

## Voorbeelden:

- ▶ Integreer  $f(x, y, z) = z^2$  over een cilinder met straal 1, as de Z-as, en afgesneden door  $z = \pm a$
- ▶ Integreer  $f(x, y, z) = xz$  over het gebied in het eerste octant ingesloten tussen twee vlakken:

$$\begin{aligned} z &= 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 1 \end{aligned}$$

## Middelwaardestelling

1D: als  $f$  continu is op  $[a, b]$ , dan bestaat er  $c \in [a, b]$  met

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

Blijft geldig in hogere dimensie.

Stel  $f, g$  continu:

- ▶ er bestaat een punt  $(c_1, c_2) \in G \subset \mathbb{R}^2$  met

$$\iint_G f(x, y)dx dy = f(c_1, c_2)A_G$$

- ▶ er bestaat een punt  $(c_1, c_2, c_3) \in G \subset \mathbb{R}^3$  met

$$\iiint_G g(x, y, z)dx dy dz = g(c_1, c_2, c_3)V_G$$

$\implies$  Zeer handig om bovengrens van integraal te bepalen

## Stabiliteit van de integraal:

De integraal van een functie is stabiel tov wijzigingen van de functie in een eindig aantal:

- ▶ 1D: punten
- ▶ 2D: krommen
- ▶ 3D: oppervlakken

in het gebied van integratie

## Toepassing: massa en massamiddelpunt

MMP van een gebied  $G$  in de ruimte met massadichtheid  $\rho(x, y, z)$

$$x_{MMP} = \frac{\iiint_G x\rho(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_G \rho(x, y, z)dx dy dz}$$

$$y_{MMP} = \frac{\iiint_G y\rho(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_G \rho(x, y, z)dx dy dz}$$

$$z_{MMP} = \frac{\iiint_G z\rho(x, y, z)dx dy dz}{\iiint_G \rho(x, y, z)dx dy dz}$$

Totale massa:

$$\iiint_G \rho(x, y, z)dx dy dz$$

Soms kan gebied  $G$  vlotter beschreven worden met behulp van een ander coördinatensysteem.

- ▶ Hoe?
- ▶ Cilindercoördinaten
- ▶ Sferische coördinaten

## in 3D

Stel

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

waarbij  $G$  het beeld is van  $G'$  in de  $OUVW$ -ruimte.

### Stelling

*Zij  $(\varphi, \psi, \chi)$  een transformatie die  $G'$  op  $G$  afbeeldt (van klasse  $C_1$  en injectief verondersteld, met uitzondering van een eindig aantal projecteerbare oppervlakken). Dan*

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

## Verband met substitutieregels in 1D?

Indien  $\varphi$  strikt monotoon is, dan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt.$$

$\varphi$  is een bijectie tussen een interval  $[\alpha, \beta]$  en het interval  $[a, b]$ .

## Verband met substitutieregels in 1D?

Indien  $\varphi$  strikt monotoon is, dan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t) dt.$$

$\varphi$  is een bijectie tussen een interval  $[\alpha, \beta]$  en het interval  $[a, b]$ .

- ▶ Als  $\varphi$  stijgend, dan  $\varphi^{-1}(a) = \alpha$  en  $\varphi^{-1}(b) = \beta$
- ▶ Als  $\varphi$  dalend, dan  $\varphi^{-1}(a) = \beta$  en  $\varphi^{-1}(b) = \alpha$ .

Dus:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \left| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right| dt$$

## Cilindercoördinaten

Stel

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

waarbij

- ▶  $r > 0$  de voerstraal
- ▶  $\varphi \in [0, 2\pi[$  de poolhoek

Jacobiaanse determinant

$$\boxed{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r}$$

Voorbeeld:  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  over cilinder met straal 1

## Sferische coördinaten

Stel

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

waarbij

- ▶  $r > 0$  de voerstraal
- ▶  $\theta \in [0, \pi]$  de hoek met de positieve  $Z$ -as
- ▶  $\varphi \in [0, 2\pi[$

Jacobiaanse determinant

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

Voorbeeld: volume bal met straal 1

## Eindopmerkingen:

- ▶ ook andere coördinatenstelsels mogelijk
- ▶ inoefenen zeer belangrijk
- ▶ hoofdstuk 7 bevat veel uitgewerkte voorbeelden
- ▶ hoofdstuk 8 (oneigenlijke integralen): niet te kennen, wel mooie moeilijkere oefeningen