

Wiskunde II(A)

Prof. dr. Vanmaele

Bachelor Economische Wetenschappen
Bachelor Toegepaste Economische Wetenschappen
Bachelor Toegepaste Economische Wetenschappen:
Handelsingenieur

Academiejaar 2019–2020



Wiskunde IIA

voor het tweede jaar Bachelor in de Economische Wetenschappen, in de
Toegepaste Economische Wetenschappen en in de Toegepaste Economische
Wetenschappen: Handelsingenieur

2019 – 2020

Voorwoord

... I have been fortunate in my association with many gifted students, who taught me in many ways the truth that mathematics is a language and a very universal language. Though imperfect in many ways it still provides an excellent tool for communicating economic ideas. It cannot generate economic intuition, but it can supplement and activate it. Modern economics has increasingly used mathematical concepts and methods. Tools of applied maths therefore become all the more important today to a modern student of economics ...

J.K. SENGUPTA in Applied Mathematics for Economics

Wiskunde is de taal geworden van de moderne analytische economie. Ze laat toe verbanden tussen economische grootheden en economische actoren onderling te kwantificeren.

Basiscursussen economie hebben slechts eenvoudige wiskundige technieken nodig, die uitvoerig zijn bestudeerd in Wiskunde I, om de beschouwde economische modellen te beschrijven en te analyseren. Dergelijke modellen zijn beperkt tot één of twee goederen in een wereld van vrije concurrentie, volledige informatie en geen onzekerheden. Cursussen micro- en macro-economie die dit basisniveau overstijgen, laten veel van deze vereenvoudigde onderstellingen vallen. Deze cursus Wiskunde II legt de nadruk op het hanteren van wiskundige begrippen en methoden in economische wetenschappen, en verschaft de nodige wiskundige achtergrondkennis om meer gesofistikeerde, meer realistische economische modellen te bestuderen. We zullen slechts een fractie zien van alle technieken die eventueel kunnen voorkomen als we ook denken aan cursussen econometrie, wiskundige economie, speltheorie, marktonderzoek, enz. Wel wordt de basis gelegd waarop gemakkelijk verder kan gebouwd worden om, indien nodig, ontbrekende wiskundige concepten te verwerven. In die zin wil deze cursus Wiskunde II ook een naslagwerk zijn en bevat een referentielijst met de voornaamste wiskundige basiswerken voor economen.

De aanpak van de cursus is zoals in de referentiewerken van Simon & Blume en van Chiang die internationaal de standaardwerken zijn voor cursussen wiskunde in een universitaire opleiding economische en toegepaste economische wetenschappen:

- Het is niet de bedoeling de wiskundige technieken aan te bieden als kookboekrecepten maar wel om aandacht te besteden aan de wiskundige ideeën en intuïtie ondersteund door grafische interpretaties.
- Wiskundige technieken worden niet aangebracht met en beperkt tot één specifiek voorbeeld, maar worden veralgemeend en de toepasbaarheid op andere gevallen wordt geïllustreerd.

Het inoefenen van de aangeleerde methode gebeurt aan de hand van de oefeningen in de bijhorende oefeningencursus.

- Aangezien wiskunde door jullie zal aangewend worden om beter inzicht te verwerven in economische structuren, wordt in elk hoofdstuk stilgestaan bij de economische motivatie van de aangebrachte wiskundige concepten en worden daarnaast economische toepassingen besproken.

De inhoud van Wiskunde II bouwt voort op de cursus Wiskunde I. We zullen het voornamelijk hebben over reële functies van *meerdere* veranderlijken en zullen het wiskundig instrumentarium daarvoor moeten veralgemenen en uitbreiden. Hierbij wordt steeds aandacht besteed aan de analogie met Wiskunde I.

De leerstof wordt gespreid over de twee semesters. De cursusnota's Wiskunde IIA bevatten de eerste vier hoofdstukken. De cursus Wiskunde IIB bevat de hoofdstukken vijf en zes. Voor de richting Handelsingenieur wordt Wiskunde IIB nog aangevuld met een afzonderlijk deel waarin een aantal specifieke thema's zoals vectorrekening, complexe getallen, dubbelintegralen en Laplacetransformaties besproken zullen worden.

Wat van jullie verwacht wordt in het kader van Wiskunde II komt in grote lijnen overeen met de eisen voor Wiskunde I en situeert zich op drie niveaus: *kennen*, *kunnen* en *toepassen*.

- Definities moeten jullie kennen. Om wiskundige begrippen op een correcte manier te hanteren moeten jullie weten wat deze begrippen betekenen. Waar toepasselijk kan een grafische weergave het kennen helpen bevorderen.
- Stellingen, formules, gevolgen, eigenschappen moeten jullie kennen en begrijpen (= kunnen), de achterliggende ideeën kunnen weergeven, begrijpen waarom bepaalde voorwaarden noodzakelijk zijn. Ook hier is een grafische interpretatie, waar toepasselijk, belangrijk evenals voorbeelden of tegenvoorbeelden en economische toepassingen.
- De resultaten uit stellingen, eigenschappen evenals methoden en formules moeten jullie kunnen gebruiken en toepassen.
- Het onderscheid kunnen maken tussen definities en praktische werkwijzen die aangereikt worden in eigenschappen en stellingen.
- Bewijzen, redeneringen en berekeningen moeten jullie kunnen opbouwen. Hierbij is het heel belangrijk dat alle overgangen kunnen verklaard worden en dat jullie inzien op welke manier de gevoerde argumentatie steunt op de gemaakte onderstellingen.
- Ook belangrijk is de samenhang en het inzicht hoe een resultaat voortbouwt op een vorig.

Daarnaast wordt van jullie verwacht op een zinvolle en correcte manier een volledig antwoord op een vraag te kunnen formuleren. Dat kan zowel in woorden zijn als in formulevorm.

Niet alle bewijzen die in de cursus opgenomen zijn zullen behandeld worden in de les. Een aantal zullen geselecteerd worden ofwel omdat het bewijs extra informatie levert over het resultaat van de stelling, ofwel omdat het een specifieke bewijsredenering betreft, ofwel om de

logica achter de wiskundige techniek te zien. Van enkele bewijzen wordt verwacht dat jullie de redenering zelf kunnen opbouwen.

De slides die in de hoorcolleges zullen gebruikt worden, zullen voor jullie beschikbaar gesteld worden op UFORA en dienen als een leidraad voor de lessen en als een samenvatting van de leerstof.

Het toepassen van de technieken wordt ingeoeft in de oefeningenlessen onder begeleiding van een assistent. De rekenmachine wordt hierbij een belangrijk instrument en wordt ook toegelaten op het examen.

Voor de praktische begeleiding moeten jullie zich wenden tot de assistent of tot mezelf. Daarnaast staat ook het discussieforum ter beschikking op UFORA.

De examenvorm is schriftelijk voor zowel de theorie als de oefeningen, en zal verder toegelicht worden tijdens de lessen. De drie aspecten “kennen, kunnen en toepassen” worden op het examen getest. De oefeningencursus is een collectie van examenvragen van voorgaande jaren en is in die zin representatief voor het oefeningexamen. Daarnaast is extra informatie en zijn voorbeeldexamenvragen te vinden op UFORA.

Ten slotte nog iets in verband met de gebruikte notaties in de cursus:

- Nieuwe begrippen zijn cursief of in het vet gezet.
- Matrices en vectoren staan in het vet om ze duidelijk te onderscheiden van reële getallen.
- $\stackrel{\text{not}}{=}$ staat voor notatie.
- Paragrafen voorafgegaan door het symbool $\diamond$ maken geen deel uit van de leerstof.
- Er wordt net zoals in Wiskunde I gebruik gemaakt van letters uit het Griekse alfabet:

α		alfa	ι		jota	σ	Σ	sigma
β		bèta	κ		kappa	τ		tau
γ	Γ	gamma	λ	Λ	lambda	υ	Υ	upsilon
δ	Δ	delta	μ		mu	ϕ, φ	Φ	phi
ϵ, ε		epsilon	ν		nu	χ		chi
ζ		zèta	ξ	Ξ	ksi	ψ	Ψ	psi
η		èta	π	Π	pi	ω	Ω	omega
θ, ϑ	Θ	thèta	ρ		rho			

Ik wil dit voorwoord afsluiten met een dankwoord aan alle personen die bijgedragen hebben aan het opstellen of typen van deze cursustekst. Daarnaast wil ik ook iedereen bedanken die errata in voorgaande versies hebben gemeld.

Ik ben me er van bewust dat deze versie nog niet helemaal foutvrij is en reken op de kritische en aandachtige lezers voor commentaren, suggesties en correcties.

Gent, 15 september 2019
Michèle Vanmaele

Inhoudsopgave

1	Inleidende begrippen	1.1
1.1	Punten en coördinaten	1.1
1.1.1	Driedimensionale Euclidische ruimte E^3	1.1
1.1.2	n -dimensionale Euclidische ruimte E^n , $n > 3$	1.2
1.2	Vectoren	1.3
1.3	Vectoralgebra	1.4
1.3.1	Optelling en aftrekking	1.4
1.3.2	Vermenigvuldiging met een scalair	1.6
1.4	Afstand tussen twee punten in E^n of $\mathbb{R}^n$	1.7
1.5	Het begrip bal of sfeer in $\mathbb{R}^n$	1.9
1.6	Parametervoorstelling van rechten en vlakken	1.10
1.6.1	Rechten	1.10
1.6.2	Vlakken	1.12
1.7	Verzamelingen	1.14
2	Functies van meerdere veranderlijken	2.1
2.1	Algemeenheden	2.1
2.1.1	Functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$	2.3
2.1.2	Functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$	2.4
2.2	Grafische voorstelling van functies	2.4
2.2.1	Grafiekoppervlak van een functie van twee variabelen	2.4
2.2.2	Niveaукrommen	2.7
2.3	Limieten en continuïteit	2.10
2.3.1	Limieten	2.10
2.3.2	Continuïteit	2.11

2.3.3	Voorbeelden van continue en discontinue functies	2.12
2.4	Partiële functies	2.13
2.4.1	Functies van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$	2.14
2.4.2	Functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$	2.17
2.5	Partiële afgeleiden	2.17
2.5.1	Partiële afgeleiden van eerste orde	2.18
2.5.2	Partiële afgeleiden van hogere orden	2.22
2.6	Kettingregels	2.25
2.6.1	Het geval $m=1$ en $n=2$	2.25
2.6.2	Het geval $m=2$ en $n=2$	2.30
2.6.3	Uitbreidingen	2.30
2.6.4	Directionele afgeleide of richtingsafgeleide	2.31
2.7	Totale differentiaal	2.37
2.7.1	Differentiaal van een functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$	2.37
2.7.2	Totale differentiaal van een functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$	2.41
2.7.3	Totale differentiaal van functies van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$	2.47
2.7.4	Toepassingen	2.49
2.7.5	Numerieke voorbeelden	2.51
2.8	Afleiden van impliciete functies	2.54
2.8.1	Impliciete functies	2.54
2.8.2	Berekening van (partiële) afgeleide van impliciete functies	2.56
2.9	Homogene functies	2.61
2.10	Economische toepassingen	2.64
2.10.1	Cobb-Douglas-productiefunctie	2.64
2.10.2	Partiële elasticiteiten voor functies van meerdere veranderlijken	2.65
3	Optimalisatie van functies van meerdere veranderlijken	3.1
3.1	Kwadratische vormen, definitie matrices en blokmatrices	3.1
3.1.1	Kwadratische vormen	3.2
3.1.2	Definitie kwadratische vormen	3.3
3.1.3	Blokmatrices	3.8
3.2	Definitie matrices en optimaliteit	3.11
3.3	Ongebonden extremum	3.16

3.3.1	Nodige voorwaarden voor een extremum	3.17
3.3.2	Voldoende voorwaarden	3.19
3.3.3	Economische toepassing: voorraadbeheer	3.24
3.4	Gebonden extremum	3.29
3.4.1	Extrema van $f(x, y)$ onder één gelijkheidrestrictie	3.30
3.4.2	Extrema van $f(x_1, \dots, x_n)$ onder één gelijkheidrestrictie	3.40
3.4.3	Extrema van $f(x_1, \dots, x_n)$ onder meerdere gelijkheidrestricties	3.42
3.4.4	Betekenis van de Lagrangemultiplicatoren	3.45
3.4.5	Extrema van $f(x, y)$ onder algemene nevenvoorwaarden	3.47
3.4.6	Voorbeelden	3.50
3.5	Toepassingen in de economie	3.52
3.5.1	Nutsmaximalisatie bij een gegeven budgetrestrictie	3.52
3.5.2	Optimalisatie van de Cobb-Douglas-productiefunctie onder een gegeven kostenrestrictie	3.53
4	Dynamische analyse: differentievergelijkingen.	4.1
4.1	Differenties van een functie	4.1
4.2	Algemene begrippen over differentievergelijkingen	4.2
4.3	Lineaire en niet-lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten	4.4
4.3.1	Eerste-orde lineaire vergelijkingen met constante storingsterm	4.5
4.3.2	Eerste-orde niet-lineaire differentievergelijkingen	4.19
4.3.3	Tweede-orde lineaire differentievergelijkingen met constante coëfficiënten	4.22
4.3.4	Hogere orde lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten	4.35
4.3.5	Economische toepassing	4.36

Lijst van figuren

1.1	De coördinaten van een punt P .	1.2
1.2	De verschuiving $(3, 2)$.	1.3
1.3	De optelling van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$.	1.5
1.4	De optelling van twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ is commutatief.	1.5
1.5	Meetkundige voorstelling van het verschil van twee vectoren.	1.6
1.6	Scalaire vermenigvuldiging in het vlak.	1.7
1.7	Afstand tussen twee punten P en Q in E^2 .	1.8
1.8	Afstand in drie dimensies	1.9
1.9	Parametervoorstelling van een rechte in $\mathbb{R}^2$.	1.11
1.10	Een vlak V in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong.	1.12
1.11	Parametervoorstelling van een vlak in $\mathbb{R}^3$ niet door de oorsprong.	1.13
2.1	Grafiekoppervlak van f	2.6
2.2	Bovenste helft van een boloppervlak	2.7
2.3	Een hoogtekaart.	2.8
2.4	Het nutsoppervlak.	2.9
2.5	De indifferentiekaart behorende bij het nutsoppervlak.	2.9
2.6	Isoquanten van een productiefunctie $Q = xy$.	2.10
2.7	Enkele paden (uit een oneindig aantal) om te naderen naar een punt in $\mathbb{R}^2$.	2.11
2.8	Grafiekoppervlak van de in de oorsprong discontinue functie f .	2.12
2.9	Projectie van $\text{def}(f)$ op de $\mathbf{x}$ -as respectievelijk op de $\mathbf{y}$ -as.	2.14
2.10	Definitieverzameling van de partiële functie $f_{x=a}$.	2.15
2.11	Definitieverzameling van de partiële functie $f_{y=b}$.	2.15
2.12	Grafiek van de partiële functie $f_{x=a}$.	2.16
2.13	Grafiek van de partiële functie $f_{y=b}$.	2.16

2.14	Raaklijn aan de grafiek van $f_{y=b}$ in het punt P .	2.20
2.15	Raaklijn aan de grafiek van $f_{x=a}$ in het punt P .	2.21
2.16	Het raakvlak in een punt P aan het grafiekoppervlak van f .	2.21
2.17	Doorsnede van (half) boloppervlak met vlak $x = 2y$.	2.29
2.18	Coördinatenstelsel op de rechte r .	2.32
2.19	Grafiek k van de samengestelde functie $F(t)$.	2.33
2.20	Gradiëntvector van f in (x_0, y_0) staat loodrecht op raaklijn aan niveaulijn $f(x, y) = k$ met niveau $k = f(x_0, y_0)$.	2.36
2.21	Verband tussen differentie en differentiaal.	2.38
2.22	Grafiek van de functie $100 + 200x - ax^2$ voor verschillende waarden van a .	2.39
2.23	Raaklijnen aan partiële functies voor $x = a$ en $y = b$.	2.45
2.24	Raakvlak aan grafiekoppervlak van f .	2.46
2.25	$f(2\mathbf{x}_i) = 2f(\mathbf{x}_i) = 2$ als f homogeen is van graad één en $f(\mathbf{x}_i) = 1$.	2.63
3.1	Grafieken van de functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = -x^2$.	3.4
3.2	Grafiek van de positief definitieve vorm $Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.	3.4
3.3	Grafiek van de negatief definitieve vorm $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$.	3.5
3.4	Grafiek van de indefiniete vorm $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.	3.5
3.5	Grafiek van de positief semidefiniete vorm $Q_4(x_1, x_2) = x_2^2$.	3.6
3.6	Grafiek van de negatief semidefiniete vorm $Q_5(x_1, x_2) = -x_2^2$.	3.6
3.7	Globaal en lokaal maximum van een functie f .	3.17
3.8	Rechte-zaagtand diagram van hoeveelheid voorraad.	3.26
3.9	Gebonden maximum van een functie f in $\mathbb{R}^2$.	3.30
3.10	Maximum van $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ onder de restrictie $2x + 2y - 1 = 0$.	3.32
3.11	Niveaукrommen met vergelijking $x^2 + y^2 = 1 - k^2$, $0 \leq k \leq 1$ en de nevenvoorwaarde $2x + 2y = 1$.	3.36
3.12	Niveaукrommen van $x^2 + y^2$ en de nevenvoorwaarde $(x - 1)^3 = y^2$.	3.37
3.13	Niveaукrommen van $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ en het toegelaten gebied bepaald door $2x + 2y \leq 1$, $x \geq 1/2$ en $y \leq 0$.	3.48
3.14	Toegelaten gebied en grafische bepaling van de oplossing	3.50
3.15	Verschuiving van de kostenrechte en de verzameling van optima.	3.55
3.16	Rotatie van de kostenrechte en de verzameling van optima.	3.56
3.17	Rotatie van de kostenrechte en de verzameling van optima.	3.56

4.1	Het oplossingspad volgens de waarden van a	4.12
4.2	De verschillende gebieden	4.18
4.3	Fasediagrammen	4.20
4.4	Fasediagram van een markt met prijsplafond.	4.22
4.5	Multiplicator-accelerator-model.	4.38

Ter inzage

Lijst van tabellen

2.1	Absolute en benaderde wijzigingen in het importniveau.	2.38
2.2	Absolute en benaderde wijzigingen volgens veranderende niet-lineariteit.	2.39
3.1	Gegevens voor het productieschema en de winstbepaling	3.49
4.1	Classificatie volgens de waarden van a	4.13
4.2	De verschillende soorten tijdpaden	4.18
4.3	Bespreking van het Samuelson model	4.39

Hoofdstuk 3

Optimalisatie van functies van meerdere veranderlijken

Economie is in essentie een “wetenschap van kiezen”. Om een economisch project uit te voeren, zoals bijvoorbeeld de productie van een bepaalde hoeveelheid output, zijn er verschillende alternatieve wegen. Een (of meerdere) van deze mogelijkheden is (zijn) echter meer gewenst dan de andere onder bepaalde criteria. Een optimalisatieprobleem oplossen is dus het beste alternatief kiezen op basis van deze criteria.

Een van de meest gebruikte criteria in de economie om een keuze te maken tussen alternatieven is het maximalisatiecriterium of het minimalisatiecriterium. We denken bijvoorbeeld aan het maximaliseren van de bedrijfswinst, van het consumentennut, van de groei van de economie van een regio, of aan het minimaliseren van de productiekosten. Economisch gezien zijn deze maximalisatie- en minimalisatieproblemen optimalisatievraagstukken omdat men streeft naar “het beste”. Zuiver wiskundig legt men niet het verband tussen maxima of minima en optimaliteit maar spreekt men van extrema of extreme waarden.

In dit hoofdstuk zullen we “ongebonden” en “gebonden” extrema bestuderen. We zullen de eerste orde en tweede orde voorwaarden opstellen en, waar mogelijk, nagaan of het een lokaal of een globaal extremum is.

3.1 Kwadratische vormen, definitie matrices en blokmatrices

Het eenvoudigste extremumvraagstuk om mee te starten is het extremeren van een kwadratische vorm. Kwadratische vormen zijn de eenvoudigste relaties na de affine functies en ze kunnen voorgesteld worden in matrixvorm. De studie van kwadratische vormen kan aldus teruggebracht worden tot de studie van (symmetrische) matrices. Bovendien worden de tweede orde condities om maxima van minima te onderscheiden in economische optimalisatievraagstukken uitgedrukt in termen van kwadratische vormen. Ten slotte is de doelfunctie (de te extremeren functie) in heel wat economische optimalisatieproblemen kwadratisch, zoals bijvoorbeeld bij minimalisatie van het risico in financiële vraagstukken waar risico gemeten wordt door de (kwadratische) variantie van de returns van de investeringen.

3.1.1 Kwadratische vormen

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Stelling 3.1.1 *De algemene kwadratische vorm*

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j$$

kan geschreven worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \dots & \frac{1}{2}a_{1n} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \dots & \frac{1}{2}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{1n} & \frac{1}{2}a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

of nog, als

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x},$$

met $\mathbf{A}$ een (unieke) symmetrische matrix.

Omgekeerd, is $\mathbf{A}$ een symmetrische matrix, dan is het reële functievoorschrift $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, zoals hierboven, een kwadratische vorm.

3.1.2 Definiete kwadratische vormen

Elke kwadratische vorm is nul in het punt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We zullen dus enkel specifieke kenmerken bij kwadratische vormen kunnen onderscheiden voor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. We concentreren ons nu op de vraag of $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een maximum, een minimum of geen van beide is voor een kwadratische vorm.

In Wiskunde I is gezien dat voor de kwadratische vorm in één variabele $y = ax^2$ er geldt (zie figuur ??):

$$a > 0 \Rightarrow [ax^2 \geq 0, \forall x \text{ en } ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

deze kwadratische vorm noemt men *positief definit* en $x = 0$ is een globaal minimum;

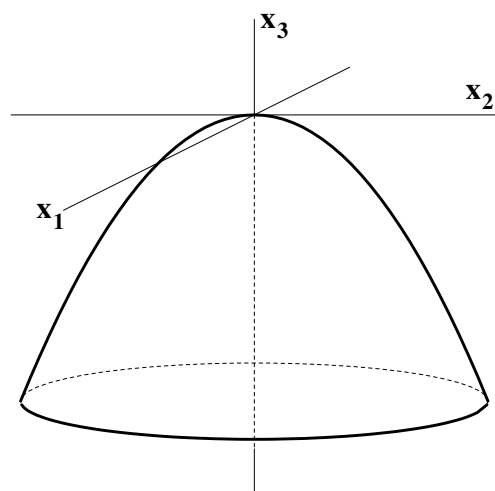
$$a < 0 \Rightarrow [ax^2 \leq 0, \forall x \text{ en } ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0]$$

deze kwadratische vorm noemt men *negatief definit* en $x = 0$ is een globaal maximum.

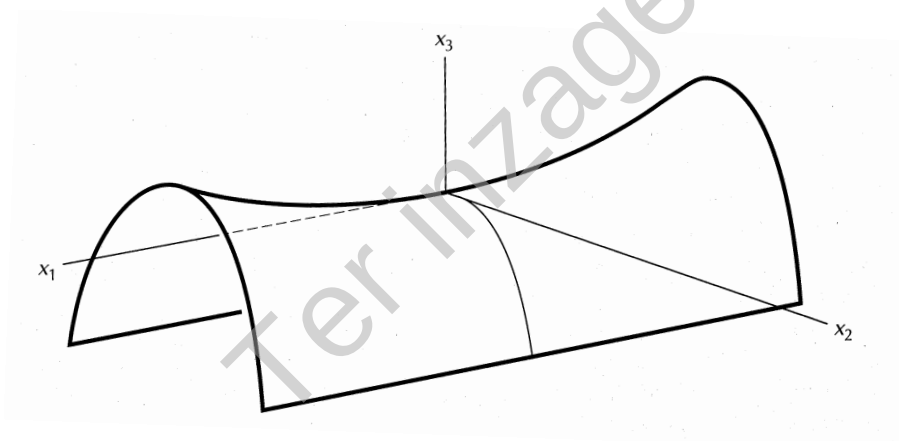
De kwadratische vorm $Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ in twee veranderlijken neemt waarden aan die strikt groter zijn dan nul als $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$. We noemen Q_1 *positief definit*. Meetkundige betekenis? Kwadratische vormen zoals $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ nemen overall strikt negatieve waarden aan behalve in de oorsprong en worden *negatief definit* genoemd. Meetkundige betekenis? Kwadratische vormen zoals $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ nemen zowel positieve als negatieve waarden aan, bijvoorbeeld $Q_3(1, 0) = 1$ en $Q_3(0, 1) = -1$, en worden *indefinit* genoemd. Deze kwadratische vormen zijn weergegeven in figuren ??–3.2.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage



Figuur 3.1: Grafiek van de functie Q_2 met $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ een negatief definitieve vorm.



Bron: C.P. Simon & L. Blume, Mathematics for Economists, W.W. Norton & Company, New York, 1994

Figuur 3.2: Grafiek van de functie Q_3 met $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ een indefiniete vorm.

Er bestaan nog twee gevallen (zie figuren ??-??):

- Een kwadratische vorm die altijd ≥ 0 en niet alleen in de oorsprong nul wordt maar ook in punten $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ noemt men *positief semidefinitief*. Bijvoorbeeld:

$$Q_4(x_1, x_2) = x_2^2 \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2)$$

$$\text{en } Q_4(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (x_1, 0) \quad \forall x_1.$$

- Een kwadratische vorm zoals $Q_5(x_1, x_2) = -x_2^2$ is altijd ≤ 0 en kan nul worden in punten die verschillen van de oorsprong. Zo'n kwadratische vorm noemt men *negatief semidefinitief*.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Merk op dat een positief (resp. negatief) definitie matrix bij definitie positief (resp. negatief) semidefinit is. Elke symmetrische matrix valt onder een van deze vijf categorieën.

Het is mogelijk om het definitief zijn van een kwadratische vorm $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ of van een symmetrische matrix $\mathbf{A}$ na te gaan aan de hand van de tekens van minoren van de matrix $\mathbf{A}$.

Definitie 3.1.1 De $(k \times s)$ -matrix die ontstaat door in de $(m \times n)$ -matrix $m - k$ rijen en $n - s$ kolommen te schrappen noemt men een **deelmatrix**.

Definitie 3.1.2 Beschouw een $(n \times n)$ -matrix $\mathbf{A}$. De k -de orde deelmatrix van $\mathbf{A}$ die men bekomt door de laatste $n - k$ rijen evenals de laatste $n - k$ kolommen te schrappen noemt men de k -de orde **leidende deelmatrix** van $\mathbf{A}$ en noteert men $\mathbf{A}_k$. De determinant van deze deelmatrix noemt men de k -de orde **leidende minor** van $\mathbf{A}$ en noteert men A_k voor $\det \mathbf{A}_k$.

Een $(n \times n)$ -matrix bezit n leidende deelmatrices. Bijvoorbeeld voor een (3×3) -matrix zijn de drie leidende minoren:

$$|a_{11}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Stelling 3.1.2 Zij $\mathbf{A}$ een **symmetrisch** $(n \times n)$ -matrix, dan geldt er:

- (a) $\mathbf{A}$ is positief definit als en slechts als alle n leidende minoren zijn (strikt) positief.
- (b) $\mathbf{A}$ is negatief definit als en slechts als de n leidende minoren op de volgende manier wisselen van teken:

$$\begin{aligned} A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad \dots, \quad A_n &\begin{cases} > 0 & \text{als } n \text{ even} \\ < 0 & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad (-1)^k A_k > 0, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

m.a.w. de k -de orde leidende minor heeft hetzelfde teken als $(-1)^k$.

- (c) Als minstens een k -de orde en van nul verschillende leidende minor van $\mathbf{A}$ niet voldoet aan (a) of (b) dan is $\mathbf{A}$ indefinit.

Als een van de leidende minoren nul is weten we dat de matrix $\mathbf{A}$ niet definit is, maar de matrix kan wel eventueel semidefinit zijn. Om dit te testen volstaan de leidende minoren niet meer. Men moet het teken van alle zogenaamde “hoofdminoren” nakijken.

Definitie 3.1.3 Zij $\mathbf{A}$ een $(n \times n)$ -matrix. Een $(k \times k)$ -deelmatrix van $\mathbf{A}$ die ontstaat door $n - k$ kolommen te schrappen, bijvoorbeeld de kolommen $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$, en $n - k$ rijen met dezelfde indices, namelijk de rijen $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$, noemt men een k -de orde **hoofddeelmatrix** van $\mathbf{A}$. De determinant van een $(k \times k)$ -hoofddeelmatrix noemt men een k -de orde **hoofdminor** van $\mathbf{A}$.

Merk op dat alle leidende minoren hoofdminoren zijn.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This part of the page is intentionally left blank.

Ter inzage

3.2 Definite matrices en optimaliteit

In de vorige paragraaf hebben we gezien dat het nagaan van het definitief zijn van een kwadratische vorm Q equivalent is met het nagaan of $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ een maximum of een minimum of geen extremum is voor de reële functie Q . Bijvoorbeeld, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is een *uniek globaal minimum* van

de kwadratische vorm Q als en slechts als Q is positief definit. Analoog, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is een *uniek globaal maximum* voor Q als en slechts als Q is negatief definit.

De karakterisatie van het definitief zijn in stelling 3.1.2 werkt enkel als het beschouwde extremumvraagstuk ongebonden is of m.a.w. geen restricties voor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bevat. Zijn er toch restricties dan moet de analyse aangepast worden.

Voorbeeld 3.2.1 De kwadratische vorm $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, gedefinieerd in $\mathbb{R}^2$ (zie figuur 3.2), is indefinit. De oorsprong is noch een minimum noch een maximum, het is een zogenaamd *zadelpunt*. Als we ons echter beperken tot punten op de $\mathbf{x}_1$ -as in het definitiegebied, m.a.w. we leggen de restrictie $x_2 = 0$ op, dan heeft $Q(x_1, 0) = x_1^2$ een strikt globaal minimum in $x_1 = 0$. Men zegt dat Q positief definit is voor punten in de (restrictie)verzameling $\{(x_1, x_2) \mid x_2 = 0\}$. Anderzijds, als we de voorwaarde $x_1 = 0$ opleggen en we Q enkel beschouwen voor punten op de $\mathbf{x}_2$ -as, dan is $x_2 = 0$ een globaal maximum voor $Q(0, x_2) = -x_2^2$. Q is dan negatief definit voor punten in de verzameling $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0\}$. Op de rechte $x_1 - 2x_2 = 0$ is $Q(2x_2, x_2) = 3x_2^2$ positief definit.

- ◇ In paragraaf 3.4 zullen we zien dat de tweede orde voorwaarde die toelaat om minima en maxima van elkaar te onderscheiden in een *gebonden* extremumvraagstuk (dit is een extremumvraagstuk met voorwaarden op de veranderlijken) een voorwaarde is op het definitief zijn van een kwadratische vorm beperkt tot een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

We bekijken het eenvoudigste geval: optimalisatie van een kwadratische vorm in twee variabelen:

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

beperkt tot de lineaire deelruimte

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0. \quad (3.2)$$

In voorbeeld 3.2.1 hebben we achtereenvolgens gewerkt met $\alpha = 0$, met $\beta = 0$ en met $\alpha = 1$ en $\beta = -2$.

Merk op dat we de coëfficiënt van x_1x_2 vermenigvuldigd hebben met een factor 2 voor de eenvoud van de corresponderende matrix.

De eenvoudigste manier om dit vraagstuk aan te pakken is x_1 oplossen uit (3.2) in termen van x_2 (als $\alpha \neq 0$) en de bekomen uitdrukking $x_1 = -\frac{\beta x_2}{\alpha}$ te substitueren in (3.1):

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{\beta x_2}{\alpha}, x_2\right) &= a\left(-\frac{\beta x_2}{\alpha}\right)^2 + 2b\left(-\frac{\beta x_2}{\alpha}\right)x_2 + cx_2^2 \\ &= \frac{a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2}{\alpha^2} x_2^2. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat Q positief definit is onder de voorwaarde (3.2) als en slechts als $a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2 > 0$ en negatief definit onder (3.2) als en slechts als $a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2 < 0$. We kunnen deze uitdrukking op een handiger manier noteren:

$$a\beta^2 - 2b\alpha\beta + c\alpha^2 = -\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & b \\ \beta & b & c \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This part of the page is intentionally left blank.

3.3 Ongebonden extremum

In deze paragraaf onderzoeken we de extrema van functies in meerdere variabelen zonder nevenvoorwaarden of restricties. We spreken van ongebonden extrema. Gebonden extrema komen aan bod in de volgende paragraaf.

De theorie voor extremumonderzoek van functies van één veranderlijke kan op eenvoudige wijze veralgemeend worden naar functies van meerdere veranderlijken.

Definitie 3.3.1 1. Een punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ heet een **(lokaal) maximum** van een functie f van n veranderlijken als

$$\exists r > 0 : \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}; r) \subseteq \text{def}(f) : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}).$$

Een punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ heet een **(lokaal) minimum** van een functie f van n veranderlijken als

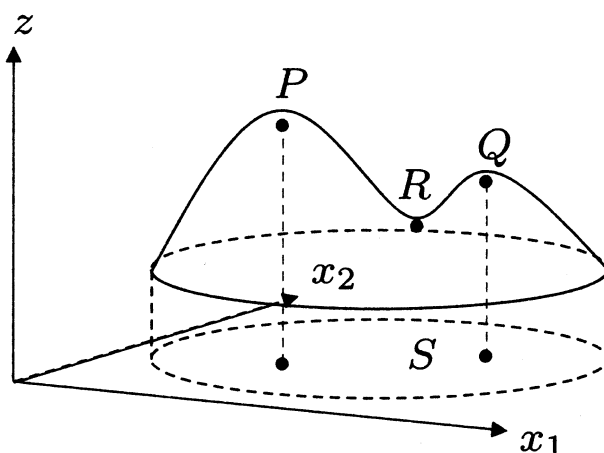
$$\exists r > 0 : \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}; r) \subseteq \text{def}(f) : f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}).$$

Als $\mathbf{a}$ een lokaal maximum of minimum is, noemen we dit ook een **lokaal extremum**.

2. Een punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ heet een **globaal maximum** van een functie f van n veranderlijken als $\forall \mathbf{x} \in \text{def}(f) : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$.

Een punt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ heet een **globaal minimum** van een functie f van n veranderlijken als $\forall \mathbf{x} \in \text{def}(f) : f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$.

Voor een anschouwelijke voorstelling in het geval $n = 2$ zie figuur 3.3 waarin P een globaal maximum is en Q een lokaal maximum is.



Bron: K. Sydsæter, A. Strøm & P. Berck, *Economists' Mathematical Manual*, 3^e editie, Springer, Berlin, 1999

Figuur 3.3: Globaal en lokaal maximum van een functie f .

3.3.1 Nodige voorwaarden voor een extremum

In Wiskunde I werd met behulp van de eerste afgeleide nagegaan welke punten in aanmerking komen om extrema te zijn. Punten waarin de eerste afgeleide nul wordt, noemt men kritische of stationaire punten. Voor functies in meerdere veranderlijken vertaalt zich dit naar de eerste orde partiële afgeleiden.

Stelling 3.3.1 Zijn $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ gedefinieerd in $\mathbf{a}$ en is $\mathbf{a}$ een (lokaal) extremum (d.i. maximum of minimum) van f dan geldt

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0. \end{cases}$$

Bewijs We geven het bewijs voor $n = 2$ en voor het geval van een lokaal maximum in (a, b) . Wegens de definitie 3.3.1 van lokaal maximum geldt er:

$$\exists r > 0 : \forall (x, y) \in B((a, b); r) \subseteq \text{def}(f) : f(x, y) \leq f(a, b).$$

In het bijzonder geldt er voor y gefixeerd op b :

$$\exists r > 0 : \forall (x, b) \in B((a, b); r) \subseteq \text{def}(f) : f(x, b) \leq f(a, b)$$

of nog, steunend op de definitie 2.4 van partiële functie:

$$\exists r > 0 : \forall x \in]a - r, a + r[: f_{y=b}(x) \leq f_{y=b}(a).$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Definitie 3.3.2 Zijn $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ gedefinieerd in een punt $\mathbf{a}$ in $\text{def}(f)$, dan is $\mathbf{a}$ een **stationair** of **kritisch punt** van f als

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = 0 \end{cases}.$$

Een stationair punt kan een lokaal extremum (maximum of minimum) zijn maar ook een zogenaamd *zadelpunt*, zie bijvoorbeeld het punt R in figuur 3.3 of de oorsprong in figuur 3.2. Gelet op voorgaande opmerkingen spreken we van een *zadelpunt* wanneer in elke open bal rond $\mathbf{a}$ in $\text{def}(f)$ punten bestaan die een kleinere functiewaarde opleveren dan $f(\mathbf{a})$ en punten die een grotere functiewaarde opleveren dan $f(\mathbf{a})$.

3.3.2 Voldoende voorwaarden

Om na te gaan of een stationair punt een maximum of een minimum of een *zadelpunt* is, hebben we voorwaarden nodig voor de tweede orde partiële afgeleiden. Hierbij wordt steeds ondersteld dat alle betrokken functies minstens tweemaal (continu) differentieerbaar zijn, zodat de stelling van Schwarz en Young geldt voor de tweede orde partiële afgeleiden.

We concentreren ons eerst op functies van twee veranderlijken.

Definitie 3.3.3 De **Hesse-matrix** of **Hessiaanse matrix** van een functie f is de (2×2) -matrix

$$\mathbf{D}^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

De determinant van de Hessiaanse matrix ($\det \mathbf{D}^2 f(x, y)$) noemt men de **Hessiaan**¹.

Gelet op de stelling van Schwarz en Young is deze matrix symmetrisch voor punten (x, y) waar de functie f en de partiële afgeleiden van f tot en met de tweede orde continu zijn.

In Wiskunde I gebruikt men het teken van de tweede orde afgeleide voor het onderzoek van extrema. Voor functies van meerdere veranderlijken gebruikt men het teken van de kwadratische vorm van de Hessiaanse matrix.

Stelling 3.3.2 Zijn f evenals de partiële afgeleiden van f minstens tot en met de tweede orde continu (m.a.w. f is tweemaal continu differentieerbaar) in een open bal met middelpunt (a, b) en is (a, b) een stationair punt van f , dan geldt:

¹De benaming Hessiaan wordt vaak ook gebruikt voor de matrix zelf. Uit de context moet blijken of de matrix of de determinant bedoeld wordt.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

(3) (a, b) is een zadelpunt van f als

$$\Delta f((a, b), (h, k)) \quad \text{wisselt van teken}$$

en dus, wegens definitie 3.1.2(e), als $\mathbf{D}^2 f(a, b)$ indefiniet is. $\square$

Aan de hand van de analytische karakterisatie van het definitief zijn van een matrix uit stelling 3.1.2 kunnen we de voorgaande stelling herformuleren.

Stelling 3.3.3 *Zijn f evenals de partiële afgeleiden van f minstens tot en met de tweede orde continu in een open bal met middelpunt (a, b) en is (a, b) een stationair punt van f , dan geldt:*

(1) (a, b) is een lokaal minimum van f als:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0 \quad \text{en} \quad \det \mathbf{D}^2 f(a, b) > 0;$$

(2) (a, b) is een lokaal maximum van f als:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0 \quad \text{en} \quad \det \mathbf{D}^2 f(a, b) > 0;$$

(3) (a, b) is een zadelpunt van f als:

$$\det \mathbf{D}^2 f(a, b) < 0;$$

Merk op dat voor $\det \mathbf{D}^2 f(a, b) = 0$ geen besluit kan genomen worden over het al dan niet bereiken van een lokaal extremum in (a, b) (zie voorbeelden ??).

Bovendien is voor $\det \mathbf{D}^2 f(a, b) > 0$ het teken van $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ hetzelfde als dat van $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$.

Om deze stelling te veralgemenen voeren we de analoge definitie in van definitie 3.3.3 voor functies van n veranderlijken.

Definitie 3.3.4 *De Hessiaanse matrix van een functie f is de $(n \times n)$ -matrix*

$$\mathbf{D}^2 f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

De determinant van de Hessiaanse matrix ($\det \mathbf{D}^2 f(\mathbf{x})$) noemt men de Hessiaan².

²De benaming Hessiaan wordt vaak ook gebruikt voor de matrix zelf. Uit de context moet blijken of de matrix of de determinant bedoeld wordt.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

- (2) De functie f met $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$ bereikt in $(2, -1)$ een (lokaal) minimum en $f(2, -1) = -1$. Immers,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + 2y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y &= 3 \\ x &= -2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3y &= 3 \\ x &= -2y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

en

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

zodat

$$H_1(2, -1) = 2 > 0 \quad \text{en} \quad H_2(2, -1) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

waaruit het gestelde.

- (3) De functie f met $f(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$ heeft twee stationaire punten, namelijk $(1, 1)$ en $(-1, -1)$, die beide zadelpunten zijn. Immers,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y - \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot x & \cdot (-y) \\ \cdot y & \cdot x \end{vmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \end{aligned}$$

en

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	in $(1, 1)$ en $(-1, -1)$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1 + \frac{2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$	0
	2

This part of the page is intentionally left blank.

Ter inzage

3.3.3 Economische toepassing: voorraadbeheer

We stellen een model op voor *discontinue* bevoorrading waarbij voorraadtekorten kunnen optreden. Dit model wordt in de Engelstalige literatuur geklasseerd onder de *EOQ models*, wat staat voor “Economic Order Quantity models”.

3.3.3.1 Hypothesen en notaties

Het model van voorraadbeheer van een economisch goed gedurende een periode T gaat uit van de volgende hypothesen:

- de gevraagde hoeveelheid per tijdseenheid is constant over de periode, en men stelt door D de totale gevraagde hoeveelheid over die periode voor;
- de kosten c_1 per bestellingsorder zijn onafhankelijk van de bestelde hoeveelheid en de bestelde hoeveelheid is constant per bestellingsorders en wordt gegeven door q ;
- de beheerskosten zijn recht evenredig met de voorraad en met de tijdsduur; men stelt door c_2 de kosten per eenheid voorraad over de periode T voor;
- de kosten door voorraadtekort zijn recht evenredig met het tekort en met de tijdsduur; men stelt door c_3 de kosten per eenheid voorraadtekort over de periode T voor;
- andere kosten worden niet in het model opgenomen;
- er is geen wachttijd voor het uitvoeren van de bestellingsorders en de bestelde hoeveelheid wordt op één tijdstip geleverd, namelijk op het tijdstip van het plaatsen van het order.

Verder worden nog volgende notaties gebruikt

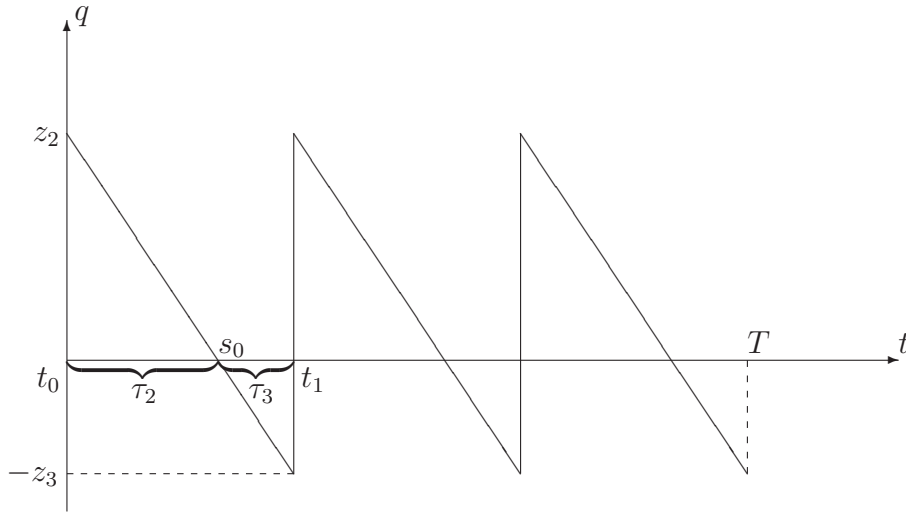
- z_2 : de maximale hoeveelheid in voorraad;
- z_3 : de maximale hoeveelheid voorraadtekort;
- τ_2 : de tijdsduur “goederen in voorraad” per cyclus;
- τ_3 : de tijdsduur “voorraadtekort” per cyclus.

3.3.3.2 Het model

We zoeken de optimale bestelhoeveelheid q zo dat de totale kosten (som van bestelkosten, beheerskosten en kosten wegens voorraadtekort) over de periode T minimaal zijn.

Het is duidelijk dat

- $q = z_2 + z_3$;
- $\frac{D}{q} = \frac{D}{z_2 + z_3}$: aantal bestellingsorders over de periode T , dit is gelijk aan het aantal verbruiksperiodes;
- $\frac{q}{D}T = \frac{z_2 + z_3}{D}T = \tau_2 + \tau_3$: tijdsduur van een cyclus tussen twee bestellingsorders of de lengte van een verbruiksperiode.



Figuur 3.4: Rechte-zaagtand diagram van hoeveelheid voorraad.

Als t de tijd voorstelt, en q de hoeveelheid goed in voorraad, dan kan men dit voorraadmodel voorstellen in een (t, q) -coördinatenstelsel. De grafiek van q is een “rechte-zaagtand”-diagram zoals bij de discontinue bevoorrading zonder voorraadtekort (zie Wiskunde I), zie figuur 3.4. In elk besteltijdstip t_k is de grafiek een verticaal lijnstuk dat $(t_k, -z_3)$ met (t_k, z_2) verbindt; in de verbruiksperiode $[t_k, t_{k+1}]$ is de grafiek een dalend lijnstuk dat (t_k, z_2) verbindt met $(t_{k+1}, -z_3)$. Dit lijnstuk snijdt de tijdsas in het punt $(s_k, 0)$. De periode met voorraad τ_2 correspondeert met het interval $[t_k, s_k]$ en de periode met voorraadtekort τ_3 met $[s_k, t_{k+1}]$.

Wegens de constante vraag en eigenschappen van evenredigheden geldt er:

$$\frac{\tau_2}{z_2} = \frac{\tau_3}{z_3} = \frac{\tau_2 + \tau_3}{z_2 + z_3}. \quad (3.4)$$

De *bestelkosten* over de periode T bedragen:

$$c_1 \frac{D}{z_2 + z_3}. \quad (3.5)$$

Voor de berekening van de *beheerskosten* merken we op dat:

- op elk besteltijdstip de maximale voorraad z_2 is;
- deze voorraad z_2 gedurende τ_2 a rato van de vraag wordt afgebouwd tot de voorraad nul is;
- daarna gedurende τ_3 een periode met voorraadtekort volgt, waarna een volgende bestelling en meteen de volgende levering gebeurt, zodat de maximale hoeveelheid voorraad opnieuw z_2 is en de cyclus zich herhaalt tot het einde van de periode T .

Om de totale hoeveelheid voorraad aanwezig gedurende de ganse periode T te berekenen voeren we een schaalwijziging door op de tijdsas, namelijk we nemen T als eenheid. De totale hoeveelheid voorraad is dan de som van oppervlakten van driehoeken met basis $\frac{\tau_2}{T}$ en hoogte z_2 . De

periode telt $\frac{D}{z_2 + z_3}$ bestellingen. Dus de som bestaat uit

$$\frac{D}{z_2 + z_3} = \frac{T}{\tau_2 + \tau_3}$$

driehoeken. Derhalve bedragen de beheerskosten voor de ganse periode T :

$$c_2 \frac{1}{2} z_2 \frac{\tau_2}{T} \frac{T}{\tau_2 + \tau_3} = c_2 \frac{1}{2} z_2 \frac{\tau_2}{\tau_2 + \tau_3} = c_2 \frac{z_2^2}{2(z_2 + z_3)} \quad (3.6)$$

waarbij in de laatste gelijkheid rekening werd gehouden met (3.4).

De *kosten wegens voorraadtekort* worden op analoge manier als de beheerskosten bekomen als de som van de oppervlakten van $\frac{T}{\tau_2 + \tau_3}$ driehoeken met basis $\frac{\tau_3}{T}$ en hoogte z_3 :

$$c_3 \frac{1}{2} z_3 \frac{\tau_3}{T} \frac{T}{\tau_2 + \tau_3} = c_3 \frac{1}{2} z_3 \frac{\tau_3}{\tau_2 + \tau_3} = c_3 \frac{z_3^2}{2(z_2 + z_3)} \quad (3.7)$$

De *totale kostenfunctie* is dan de som van de kosten (3.5), (3.6) en (3.7):

$$K(z_2, z_3) = \frac{2c_1 D + c_2 z_2^2 + c_3 z_3^2}{2(z_2 + z_3)} \quad (3.8)$$

3.3.3.3 De oplossing

De stationaire punten zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial z_2}(z_2, z_3) = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial z_3}(z_2, z_3) = 0. \end{cases}$$

We berekenen deze eerste orde partiële afgeleiden op impliciet wijze namelijk door eerst het functievoorschrift in (3.8) impliciet te schrijven

$$(z_2 + z_3)K(z_2, z_3) = c_1 D + \frac{1}{2} c_2 z_2^2 + \frac{1}{2} c_3 z_3^2,$$

vervolgens beide leden partieel af te leiden naar z_2 en z_3 rekening houdend dat K een functie is van z_2 en z_3

$$K(z_2, z_3) + (z_2 + z_3) \frac{\partial K}{\partial z_2}(z_2, z_3) = c_2 z_2 \quad (3.9)$$

$$K(z_2, z_3) + (z_2 + z_3) \frac{\partial K}{\partial z_3}(z_2, z_3) = c_3 z_3 \quad (3.10)$$

en ten slotte op te lossen naar de eerste orde partiële afgeleiden. Aldus bekomen we:

$$\frac{\partial K}{\partial z_2}(z_2, z_3) = \frac{c_2 z_2 - K(z_2, z_3)}{z_2 + z_3} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial K}{\partial z_3}(z_2, z_3) = \frac{c_3 z_3 - K(z_2, z_3)}{z_2 + z_3} \quad (3.12)$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

stationair punt:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z_2^2}(z_2^*, z_3^*) = \frac{c_2}{z_2^* + z_3^*}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z_3^2}(z_2^*, z_3^*) = \frac{c_3}{z_2^* + z_3^*}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z_2 \partial z_3}(z_2^*, z_3^*) = 0.$$

Hieruit volgt via de Hessiaanse matrix van K en het feit dat de kosten c_1, c_2 evenals de hoeveelheden z_2^*, z_3^* positieve grootheden zijn:

$$H_1(z_2^*, z_3^*) = \frac{c_2}{z_2^* + z_3^*} > 0 \quad \text{en} \quad H_2(z_2^*, z_3^*) = \frac{c_2 c_3}{(z_2^* + z_3^*)^2} \stackrel{??}{=} \frac{c_2^2 c_3^2}{2c_1 D(c_2 + c_3)} > 0,$$

zodat (z_2^*, z_3^*) inderdaad een minimum oplevert voor de kostenfunctie.

De bestelkosten in het minimum bedragen

$$c_1 \frac{D}{z_2^* + z_3^*} = \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 D}{2(c_2 + c_3)}} = \frac{1}{2} K(z_2^*, z_3^*),$$

dit is de helft van de minimale totale kosten, gelet op (??). De beheerskosten in het minimum bedragen

$$c_2 \frac{(z_2^*)^2}{2(z_2^* + z_3^*)} = \frac{c_3}{c_2 + c_3} \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 D}{2(c_2 + c_3)}},$$

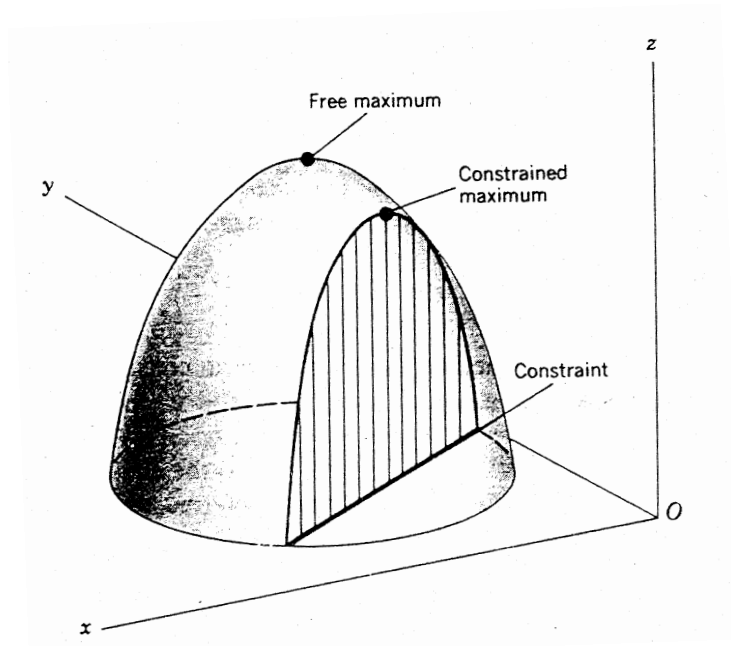
terwijl de kosten wegens voorraadtekort in het minimum gelijk zijn aan

$$c_3 \frac{(z_3^*)^2}{2(z_2^* + z_3^*)} = \frac{c_2}{c_2 + c_3} \sqrt{\frac{c_1 c_2 c_3 D}{2(c_2 + c_3)}}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat in het minimum de som van de beheerskosten en van de kosten wegens voorraadtekort gelijk is aan de bestelkosten in het minimum en dat in het minimum de verhouding van de beheerskosten tot de kosten wegens voorraadtekort gelijk is aan $\frac{c_3}{c_2}$.

3.4 Gebonden extremum

Economie wordt vaak gedefinieerd als de studie van de optimale allocatie van schaarse goederen. Het woord “optimaal” wijst op een optimalisatieprobleem. Het woord “schaars” onderstelt dat de beslissingsvariabelen in dit optimalisatieprobleem niet willekeurig alle waarden kunnen aannemen maar dat ze beperkt worden door een aantal voorwaarden. Zo is bijvoorbeeld de consumptie van een gebruiker beperkt door zijn/haar inkomen; de productie in een bedrijf is beperkt door



Bron: A.C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3e editie, McGraw-Hill, Singapore, 1984.

Figuur 3.5: Gebonden maximum van een functie f in $\mathbb{R}^2$.

de kosten en de beschikbaarheid van de nodige inputs. Het is dus duidelijk dat gebonden optimalisatieproblemen op natuurlijke wijze voorkomen in de economie. Wiskundig geformuleerd hebben we een *doelfunctie* f in meerdere variabelen die we wensen te extremeren (minimaliseren of maximaliseren) waarbij de variabelen, ook de beslissingsvariabelen genoemd, aan een aantal restricties of nevenvoorwaarden moeten voldoen. Deze restricties kunnen gelijkheden zijn maar ook ongelijkheden.

3.4.1 Extrema van $f(x, y)$ onder één gelijkheidrestrictie

3.4.1.1 Herleiden tot een ongebonden extremumvraagstuk

Om extrema te bepalen van

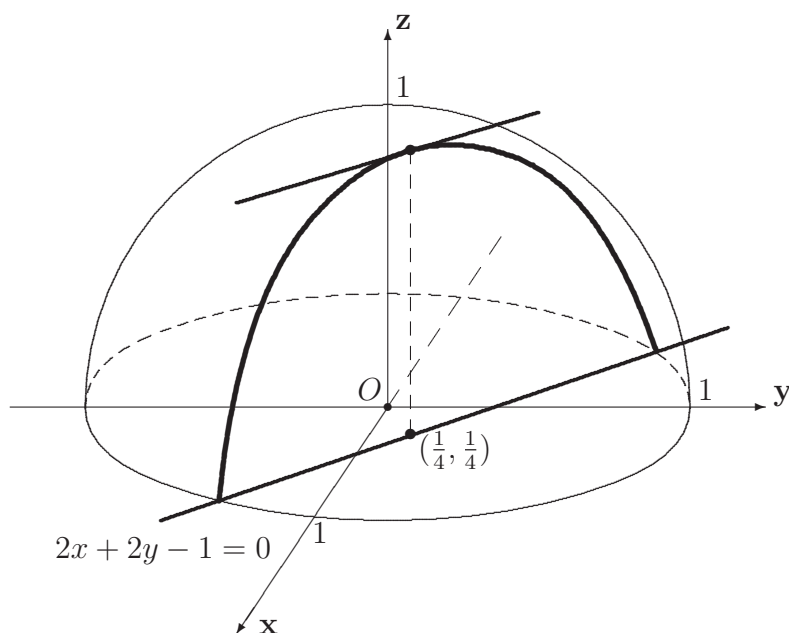
$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

wanneer moet voldaan zijn aan de nevenvoorwaarde $G(x, y) = 0$ (zie figuur 3.5), kan men proberen één van de onbekenden x of y uit $G(x, y) = 0$ op te lossen in functie van de andere onbekende. Hierdoor wordt het gebonden extremumvraagstuk herleid tot een ongebonden extremumvraagstuk voor een functie van één veranderlijke.

Onderstel dat $g, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$, de functie is die op impliciete wijze beschreven wordt door $G(x, y) = 0$. In dat geval kan het gestelde probleem herleid worden tot het bepalen van de extrema van de samengestelde functie $F, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = f(x, g(x))$, van één veranderlijke.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage



Figuur 3.6: Maximum van $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ onder de restrictie $2x + 2y - 1 = 0$.

met

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{2} - x.$$

Het vraagstuk is herleid tot het maximaliseren van F . Daartoe zoeken we eerst de stationaire punten van F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\frac{1}{2} - 2x}{\sqrt{1 - x^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}} = 0 \\ \iff \frac{1}{2} - 2x &= 0 \iff x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

We onderzoeken vervolgens het teken van de tweede afgeleide van F genomen in $x = \frac{1}{4}$. Voor-
eerst merken we op dat

$$F'(x) = \frac{\frac{1}{2} - 2x}{F(x)}$$

zodat

$$F''(x) = \frac{F(x)(-2) - \left(\frac{1}{2} - 2x\right) F'(x)}{F(x)^2}$$

This part of the page is intentionally left blank.

3.4.1.2 Multiplicatorenmethode van Lagrange

De multiplicatorenmethode van Lagrange bestaat erin een *hulpfunctie* van Lagrange (ook Lagrangefunctie of Lagrangeaan genoemd) L te vormen:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda G(x, y) \quad \text{met } \lambda \text{ Lagrangemultiplicator,}$$

en de stationaire punten van deze functie als functie van de drie veranderlijken x , y en λ te bepalen door oplossen van het stelsel:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (S^*) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

De volgende eigenschap garandeert dat deze techniek stationaire punten van f oplevert.

Stelling 3.4.1 Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ en $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto G(x, y)$ twee differentieerbare functies in twee variabelen. Veronderstel dat (a, b) een inwendig punt is van $\text{def}(f)$, dat een extremum bepaalt voor f waarbij voldaan is aan de voorwaarde $G(x, y) = 0$ en waarbij bovendien

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}(a, b), \frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \right) \neq (0, 0),$$

dan bestaat er juist één getal λ^* in $\mathbb{R}$ zodat (a, b, λ^*) een stationair of kritisch punt is van

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda G(x, y).$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Deze λ^* voldoet aan (3.20).

Een **meetkundige interpretatie** van deze stelling volgt uit betrekking (??), die we kunnen herschrijven als

$$\boxed{-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial G}{\partial y}(a,b)}}.$$

Gelet op §2.8.2.2 drukt deze relatie uit dat voor een gebonden extremum de helling van de niveaukromme van f door (a,b) gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(a, g(a))$ aan de grafiek van $g(x)$ impliciet bepaald door de voorwaarde $G(x, y) = 0$. (Deze laatste richtingscoëfficiënt is eveneens gelijk aan de helling van de niveaukromme van G door (a,b) met niveau 0.) Bijgevolg valt de raaklijn aan de niveaukromme van f in het punt (a,b) samen met de raaklijn aan de grafiek van de nevenvoorwaarde in dat punt, of anders gezegd, de niveaukromme van f en de grafiek van g raken elkaar in het punt (a,b) .

De inwendige punten van $\text{def}(f)$ die een extremum van f bepalen behoren tot de oplossingenverzameling van het stelsel (S^*) (??). Men moet nog nagaan of het inderdaad om extrema handelt, en zo ja, om maxima of minima.

Punten die tot de rand van $\text{def}(f)$ behoren moeten apart behandeld worden, net zoals stationaire punten van G , dit zijn punten waar, naast $G = 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Voorbeelden 3.4.1

- (1) We hernemen het extremumvraagstuk uit voorbeeld ?? aan de hand van de multiplicatiomethode van Lagrange. De stationaire punten van

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} + \lambda(2x + 2y - 1)$$

worden gevonden door het stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

op te lossen. We vinden één stationair punt

$$x^* = \frac{1}{4}, \quad y^* = \frac{1}{4}, \quad \lambda^* = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{7}{8}}} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{8}{7}}.$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This part of the page is intentionally left blank.

3.4.1.3 Voldoende voorwaarden voor extrema

Bij ongebonden extremumvraagstukken stonden de voldoende voorwaarden voor extrema in verband met het definitief zijn van bepaalde kwadratische vormen. De tweede orde condities voor gebonden extremumvraagstukken staan nauw in verband met het definitief zijn van de kwadratische vorm van de Hessiaanse matrix van de Lagrangeaan L beperkt tot een lineaire ruimte (zie ook §3.2). Deze lineaire ruimte is de raaklijn aan het toegelaten gebied, beschreven door $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) = 0\}$, in het stationair punt (a, b) van de doelfunctie f . Deze raaklijn wordt bepaald door alle vectoren $\mathbf{v}$ die vertrekken vanuit het punt met eerste coördinaten (a, b) en die voldoen aan $\mathbf{D}G(a, b) \cdot \mathbf{v} = 0$. Dit laatste is een lineaire voorwaarde in $\mathbf{v}$.

Om na te gaan of een stationair punt van f , $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$, onderworpen aan de restrictie $G(x, y) = 0$ een extremum is, zullen we de *veralgemeende* Hessiaanse matrix van L gebruiken. De veralgemeende Hessiaanse matrix van L , notatie $\mathbf{H}^*$, is op te vatten

- als de Hessiaanse matrix van L , zie definitie 3.3.3, als functie van de veranderlijken λ, x, y (in deze volgorde), m.a.w. $\mathbf{H}^*(x, y, \lambda) = \mathbf{D}^2 L(\lambda, x, y)$:

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

ofwel, equivalent daarmee,

- als de Hessiaanse matrix $\mathbf{D}_x^2 L(x, y, \lambda)$ van L als functie van x en y , bovenaan en links gerand met de elementen $\frac{\partial G}{\partial x}$ en $\frac{\partial G}{\partial y}$:

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{D}G(x, y) \\ \mathbf{D}G(x, y)^T & \mathbf{D}_x^2 L(x, y, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Stelling 3.4.2 Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ en $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto G(x, y)$ twee C^2 -differentieerbare functies in twee variabelen. Veronderstel dat (a, b) een inwendig punt is van $\text{def}(f)$ dat een extremum bepaalt voor f waarbij voldaan is aan de voorwaarde $G(x, y) = 0$, waarbij bovendien

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}(a, b), \frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \right) \neq (0, 0).$$

Veronderstel verder dat $\lambda^* \in \mathbb{R}$ zodat (a, b, λ^*) een stationair punt is van

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda G(x, y),$$

met veralgemeende Hessiaanse matrix $\mathbf{H}^*$.

Als $\det \mathbf{H}^*(a, b, \lambda^*) < 0$, dan is (a, b) een lokaal minimum van f onder de restrictie $G(x, y) = 0$.

Als $\det \mathbf{H}^*(a, b, \lambda^*) > 0$, dan is (a, b) een lokaal maximum van f onder de restrictie $G(x, y) = 0$.

Bewijs Zonder aan de algemeenheid te schaden onderstellen we dat $\frac{\partial G}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

Zij g de functie in x die impliciet gedefinieerd wordt door $G(x, y) = 0$.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Voorbeeld 3.4.2 We vervolgen het extremumvraagstuk uit voorbeeld ?? en voorbeelden 3.4.1 (1). We bepalen of het stationair punt $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ van f onder de beschouwde restrictie een minimum of een maximum via de tweede orde voorwaarden.

Men kan narekenen dat

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{y^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 1}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

zodat

$$\mathbf{H}^*\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{8}{7}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -\frac{15\sqrt{8}}{2\sqrt{7^3}} & -\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{7^3}} \\ 2 & -\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{7^3}} & -\frac{15\sqrt{8}}{2\sqrt{7^3}} \end{pmatrix}.$$

Uit $\det \mathbf{H}^* = 8\sqrt{\frac{8}{7}} > 0$, volgt er dat f in $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ een maximum bereikt onder de gegeven restrictie.

3.4.2 Extrema van $f(x_1, \dots, x_n)$ onder één gelijkheidsrestrictie

Beschouw twee C^2 -differentieerbare functies in n variabelen:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \\ G &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto G(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Veronderstel dat $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ een inwendig punt is van $\text{def}(f)$ dat een extremum bepaalt voor f waarbij voldaan is aan de voorwaarde $G(x_1, \dots, x_n) = 0$ en waarbij

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \neq (0, \dots, 0),$$

dan bestaat er juist één getal $\lambda^* \in \mathbb{R}$ zodat $(\mathbf{a}, \lambda^*)$ een stationair punt is van de hulpfunctie van Lagrange

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda G(x_1, \dots, x_n).$$

Deze stationaire punten van L worden gevonden als oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

We kunnen dit nog compact als volgt noteren:

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{DG}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{DG}(\mathbf{x})^T & \mathbf{D}_x^2 L(\mathbf{x}, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Als $\mathbf{D}_x^2 L(\mathbf{a}, \lambda^*)$ de Hessiaanse matrix van L met betrekking tot $\mathbf{x}$ genomen in het stationair $(\mathbf{a}, \lambda^*)$ positief definit (resp. negatief definit) is voor alle vectoren $\mathbf{v}$ die voldoen aan $\mathbf{DG}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ dan is $\mathbf{a}$ een lokaal minimum (resp. maximum) van f onder de gegeven m restricties.

Het definitief zijn kan nagegaan worden aan de hand van de leidende hoofdminoren zoals beschreven in stelling ??.

Voorbeeld 3.4.3 Om de grootste waarde van $f(x, y, z) = 10 - x^2 - y^2 - z^2$ te bepalen als $x - 4y - 2z = -5$ en $x + y + z = 3$, zoeken we de stationaire punten van de Lagrangefunctie L met

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 10 - x^2 - y^2 - z^2 + \lambda(x - 4y - 2z + 5) + \mu(x + y + z - 3)$$

als oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} -2x + \lambda + \mu = 0 \\ -2y - 4\lambda + \mu = 0 \\ -2z - 2\lambda + \mu = 0 \\ x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Dit is een lineair stelsel met vijf vergelijkingen in de vijf onbekenden x, y, z, λ en μ . Gauss-Jordaneliminatie levert

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

waauit we de unieke oplossing kunnen aflezen:

$$x = y = z = 1 \quad \lambda = 0 \quad \mu = 2.$$

De tweede orde partiële afgeleiden van L naar x, y en z zijn:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} = 0,$$

en de eerste orde afgeleiden van de restricties:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial G_1}{\partial y} &= -4, & \frac{\partial G_1}{\partial z} &= -2 \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial G_2}{\partial y} &= 1, & \frac{\partial G_2}{\partial z} &= 1, \end{aligned}$$

zodat de gerande Hessiaanse matrix van L geëvalueerd in het stationair punt gegeven wordt door:

$$\mathbf{H}^*(1, 1, 1, 0, 2) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

We moeten het teken van de laatste $n - m = 3 - 2 = 1$ leidende hoofdminoren controleren, te beginnen bij de leidende hoofdminor van de orde $2m + 1 = 5$. In dit geval is dit dus het teken van de determinant van de gerande Hessiaanse matrix:

$$\det \mathbf{H}^*(1, 1, 1, 0, 2) = -76 < 0.$$

Vermits voor $m = 2$, $(-1)^m = +1$ en $(-1)^{m+1} = -1$, is $(1, 1, 1)$ een maximum van f onder de gegeven nevenvoorwaarden en de functiewaarde bedraagt $f(1, 1, 1) = 7$.

3.4.3 Betekenis van de Lagrangemultiplicatoren

We illustreren de betekenis van de Lagrangemultiplicator aan de hand van het extremumvraagstuk uit voorbeeld ???. Daartoe stellen we de volgende vraag:

Hoe wordt het maximum beïnvloed als we de rechte $2x + 2y - 1 = 0$ evenwijdig aan zichzelf verschuiven?

De familie rechten evenwijdig aan de rechte $2x + 2y - 1 = 0$ wordt beschreven door

$$2x + 2y + \alpha = 0 \quad \text{met parameter } \alpha \in \mathbb{R}.$$

We optimaliseren vervolgens de gegeven doelfunctie f onder de restrictie $2x + 2y + \alpha = 0$. Analoog als in voorbeelden 3.4.1 (1) vinden we via de multiplicatorenmethode van Lagrange dat f een maximum bereikt onder deze restrictie in het punt $\left(-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\alpha}{4}\right)$ met

$$f\left(-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{8}}$$

en met als bijhorende waarde voor de multiplicator

$$\lambda^* = \frac{-\frac{\alpha}{8}}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{8}}}.$$

Hieruit blijkt duidelijk dat zowel het punt waarin f een extremum bereikt onder de gegeven restrictie als de optimale functiewaarde en de bijhorende waarde voor de multiplicator van Lagrange afhangen van de parameter α of m.a.w. afhangen van de ligging van de rechte. Stel

$$f^*(\alpha) = f\left(-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{8}}.$$

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

3.4.4 Extrema van $f(x, y)$ onder algemene nevenvoorwaarden

We hernemen het voorbeeld ?? maar met aangepaste restricties, namelijk

Optimaliseer de functie f gegeven door

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

onder de restricties

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 \leq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ y \leq 0. \end{cases}$$

Dit gebonden extremumvraagstuk is meer algemeen in de zin dat de restricties ongelijkheidsrestricties zijn in tegenstelling tot de tot nu toe beschouwde gelijkheidsrestricties.

In het geval van een extremumonderzoek van bijvoorbeeld een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$ waarbij voldaan moet zijn aan de ongelijkheid $G(x, y) \leq 0$ zou men als volgt te werk kunnen gaan. Men beperkt eerst het definitiegebied van f tot het gebied waarin $G(x, y) < 0$ en bepaalt hierin niet-gebonden extrema. Daarna spoort men afzonderlijk de extrema van f op onder de nevenvoorwaarde $G(x, y) = 0$. Wanneer er echter meerdere ongelijkheidsrestricties zijn, is deze splitsing niet handig. We herleiden daarom het probleem met ongelijkheden naar een probleem waarbij alle nevenvoorwaarden gelijkheden zijn. Als een gebonden extremumvraagstuk zogenaamde gemengde nevenvoorwaarden heeft in de zin dat sommige nevenvoorwaarden gelijkheden zijn en andere ongelijkheden, volgt men ook deze werkwijze.

We illustreren dit aan de hand van bovenstaand voorbeeld.

De nevenvoorwaarde $2x + 2y - 1 \leq 0$ kan via de introductie van een nieuwe variabele u omgezet worden in de gelijkheid $2x + 2y - 1 + u^2 = 0$. Analoog wordt $x \geq \frac{1}{2}$ omgezet in $x - v^2 - \frac{1}{2} = 0$ en $y \leq 0$ in $y + w^2 = 0$. Daarna zoekt men de stationaire punten van de Lagrangefunctie L met

$$L(x, y, u, v, w, \lambda, \mu, \nu) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \lambda(2x + 2y - 1 + u^2) + \mu(x - v^2 - \frac{1}{2}) + \nu(y + w^2).$$

Hierbij geeft elke voorwaarde

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2\lambda u = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v} = -2\mu v = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial w} = 2\nu w = 0,$$

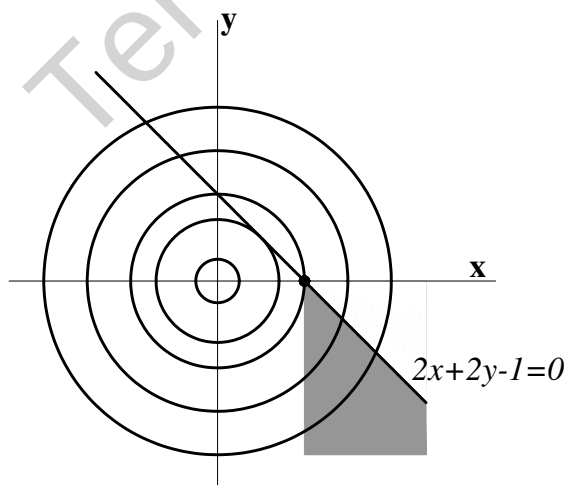
aanleiding tot een opsplitsing in twee deelstelsels:

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad u = 0, \quad \mu = 0 \quad \vee \quad v = 0, \quad \nu = 0 \quad \vee \quad w = 0.$$

Als een extra ingevoerde variabele (zoals u , v en w) nul is betekent dit dat de nevenvoorwaarde een gelijkheid is of m.a.w. bindend is.

In totaal moet men dus 2^3 of 8 deelstelsels onderzoeken op oplossingen. Een aantal ervan kunnen strijdig zijn.

In dit voorbeeld is het mogelijk door een redenering gesteund op de grafische voorstelling van de niveaukrommen van f en van het zogenaamde toegelaten gebied (het gebied waarin aan alle nevenvoorwaarden voldaan is) te besluiten dat $(\frac{1}{2}, 0)$ een maximum is van f onder de gegeven nevenvoorwaarden, zie figuur 3.7.



Figuur 3.7: Niveaukrommen van $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ en het toegelatengebied bepaald door $2x + 2y \leq 1$, $x \geq 1/2$ en $y \leq 0$.

We beperken ons hier tot het gegeven basisidee om ongelijkheden om te vormen tot gelijkheden en verwijzen naar de literatuur voor een uitvoerige studie van dergelijke extremumvraagstukken.

We gaan wel nog even dieper in op de grafische oplossing van een type gebonden extremumvraagstukken onder algemene nevenvoorwaarden, namelijk *lineaire programmeringsproblemen*, afgekort als LP. Dit zijn optimalisatieproblemen waarbij zowel de doelfunctie f als de restricties lineaire functies zijn van de (beslissings)variabelen. In het geval er slechts twee veranderlijken zijn is het mogelijk om een grafische voorstelling te maken van het toegelaten gebied om aldus via de niveaukrommen van f tot een besluit te komen.

Het bepalen van het productieschema van twee goederen dat een maximale winst oplevert in de veronderstelling dat alle geproduceerde eenheden kunnen verkocht worden is een typisch lineair programmeringsprobleem. We beschouwen het volgende voorbeeld:

Een onderneming produceert twee producten X en Y en gebruikt hiervoor twee grondstoffen.

	product X	product Y	beschikbare hoeveelheid
grondstof 1	15	10	2400
grondstof 2	15	30	2400
winstbijdrage	45	60	

Tabel 3.1: Gegevens voor het productieschema en de winstbepaling

Tabel 3.1 geeft de hoeveelheden grondstoffen nodig om één eenheid van deze producten te bekommen, evenals de beschikbare hoeveelheden van deze grondstoffen en de winstbijdrage per eenheid (in EUR).

Verder wordt, rekening houdend met de vraag, een beperking opgelegd op het aantal te produceren eenheden van beide producten, namelijk 100 voor product X en 50 voor product Y .

Noemen we x het aantal eenheden van product X en y het aantal eenheden van product Y , dan kan dit probleem vertaald worden als het volgende lineaire programmeringsprobleem:

maximaliseer de doelfunctie: $f : (x, y) \mapsto 45x + 60y$

onder de restricties: $15x + 10y \leq 2400$

$15x + 30y \leq 2400$

$x \leq 100$

$y \leq 50$

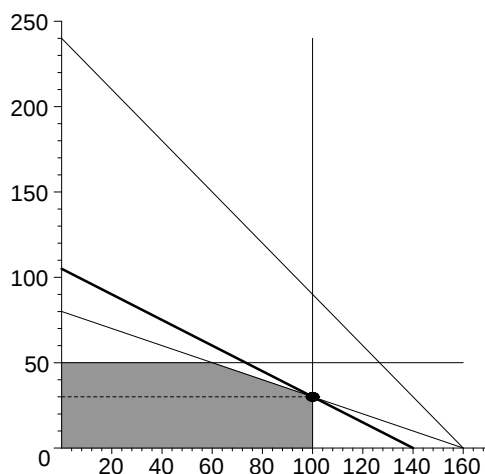
$x \geq 0, y \geq 0.$

We lossen dit LP in twee variabelen grafisch op door het toegelaten gebied gevormd door de ongelijkheden te schetsen. Het toegelaten gebied is in dit geval een convexe veelhoek, zie figuur 3.8. Vervolgens bepalen we de niveaukrommen die in dit geval evenwijdige rechten zijn met als vergelijking de doelfunctie gelijk aan een constante, namelijk

$$45x + 60y = c.$$

Het is duidelijk dat voor een maximalisatieprobleem we op zoek zijn naar de rechte waarvoor deze constante c het grootst is. Voor het beschouwde maximalisatieprobleem levert de rechte

die het verst van de oorsprong gelegen is, maar nog steeds een snijpunt heeft met het toegelaten gebied het gewenste productieschema. Dit snijpunt is het hoekpunt $(100, 30)$ en de gezochte maximale waarde van de doelfunctie is bijgevolg 6300 en wordt bereikt door 100 eenheden X en 30 eenheden Y te produceren.



Figuur 3.8: Toegelaten gebied en grafische bepaling van de oplossing

In het algemeen kan men de volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 3.4.1 *Als een LP een oplossing heeft, dan is er een oplossing in een hoekpunt van het toegelaten gebied.*

3.4.5 Voorbeelden

(1) Gevraagd:

Extremeer de doelfunctie f met $f(x, y) = 5x^2 - xy + 6y^2$ onder de restrictie $x + 2y = 24$.

Oplossing:

hulpfunctie van Lagrange: $L(x, y, \lambda) = 5x^2 - xy + 6y^2 + \lambda(x + 2y - 24)$

stationaire punten: $(x^*, y^*, \lambda^*) = (6, 9, -51)$ is oplossing van het stelsel:

$$\begin{cases} 10x - y + \lambda = 0 \\ -x + 12y + 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

de gerande Hessiaan in dit stationair punt:

$$\det \mathbf{H}^*(6, 9, -51) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 12 \end{vmatrix} = -56 < 0$$

waaruit volgt dat het stationair punt $(6, 9)$ een minimum is van f onder de gegeven restrictie en $f(6, 9) = 612$.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

3.5 Toepassingen in de economie

3.5.1 Nutsmaximalisatie bij een gegeven budgetrestrictie

De multiplicatorenmethode van Lagrange kan gebruikt worden om een nutsfunctie U met

$$U(q_1, q_2) = q_1 q_2$$

te maximaliseren bij een gegeven budgetrestrictie zoals

$$15q_1 + 5q_2 = 150.$$

In het algemeen wordt dit probleem voor het geval waarbij het ganse budget gespendeerd wordt aan twee goederen als volgt geformuleerd:

$$\text{maximaliseer } U(q_1, q_2) \quad \text{als} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = y$$

waarbij p_i de prijs per eenheid voorstelt van het i -de goed en q_i de hoeveelheid die men hiervan in bezit heeft, terwijl y het budget voorstelt.

Om oplossingen te vinden voor dit gebonden extremumvraagstuk, zoeken we stationaire punten van de Lagrangefunctie L met

$$L(q_1, q_2, \lambda) = U(q_1, q_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2).$$

Hiertoe moet voldaan zijn aan de voorwaarden

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2} - \lambda p_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \end{cases}$$

wat impliceert dat in het bijzonder

$$\lambda = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial q_2}}{p_2}, \quad (3.14)$$

de zogenaamde tweede wet van Gossen.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

3.5.2 Optimalisatie van de Cobb-Douglas-productiefunctie onder een gegeven kostenrestrictie

Beschouw de Cobb-Douglas-productiefunctie $P(K, L) = bK^\alpha L^\beta$ (zoals in §2.10.1) en onderstel dat de kostprijs per eenheid kapitaal p_K bedraagt en de kostprijs per eenheid arbeid p_L . We wensen de productie te optimaliseren onder de kostenrestrictie

$$p_K K + p_L L = k.$$

Dit gebonden extremumvraagstuk lossen we op met behulp van de multiplicatorenmethode van Lagrange. De hulpfunctie van Lagrange $\mathcal{L}$ wordt beschreven door:

$$\mathcal{L}(K, L, \lambda) = P(K, L) + \lambda(p_K K + p_L L - k).$$

Het stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{\partial P}{\partial K} + \lambda p_K = \alpha \frac{P}{K} + \lambda p_K = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial L} + \lambda p_L = \beta \frac{P}{L} + \lambda p_L = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_K K + p_L L - k = 0 \end{cases}$$

heeft het stationair punt

$$(K^*, L^*) = \left(\frac{\alpha k}{(\alpha + \beta)p_K}, \frac{\beta k}{(\alpha + \beta)p_L} \right)$$

als enige oplossing.

De functiewaarde in dit stationair punt noteren we P^* , m.a.w.

$$P^* = P(K^*, L^*) = b \left(\frac{k}{\alpha + \beta} \right)^{\alpha + \beta} \left(\frac{\alpha}{p_K} \right)^\alpha \left(\frac{\beta}{p_L} \right)^\beta.$$

Dit stationair punt is een maximum aangezien de gerande Hessiaan in dit punt strikt positief is:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{H}^*(K^*, L^*, \lambda^*) &= \begin{vmatrix} 0 & p_K & p_L \\ p_K & \alpha(\alpha - 1) \frac{P^*}{(K^*)^2} & \alpha\beta \frac{P^*}{K^* L^*} \\ p_L & \alpha\beta \frac{P^*}{K^* L^*} & \beta(\beta - 1) \frac{P^*}{(L^*)^2} \end{vmatrix} \\ &= \alpha\beta P^* \left[\frac{1 - \alpha}{\beta} \left(\frac{p_L}{K^*} \right)^2 + 2 \frac{p_K p_L}{L^* K^*} + \frac{1 - \beta}{\alpha} \left(\frac{p_K}{L^*} \right)^2 \right] > 0 \end{aligned}$$

waarbij rekening is gehouden met $0 < \alpha < 1$ en $0 < \beta < 1$.

We voeren vervolgens een *sensitiviteitsanalyse* uit, namelijk we bestuderen hoe het optimum wijzigt ten gevolge van een wijziging van een van de parameters p_K , p_L , k in de kostenrestrictie $p_K K + p_L L = k$. Deze restrictie is grafisch een rechte die de K -as snijdt in $(\frac{k}{p_K}, 0)$ en de L -as in $(0, \frac{k}{p_L})$.

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

This page is intentionally left blank.

Ter inzage

Bibliografie

- CHIANG A.C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3de editie, McGraw-Hill, 1984.
- DE SCHEPPER A., *Inleiding tot differentiaalvergelijkingen*, Garant, Leuven, 2001.
- DHRYMES P.J., *Mathematics for Econometrics*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- GOULT R.J., *Applied Linear Algebra*, Ellis Horwood Ltd, Chichester, 1978.
- GUERRIEN B., *Algèbre Linéaire pour Economistes*, 4de editie, Economica, Paris, 1997.
- HEAL G., HUGHES G. & TARLING R., *Linear Algebra and Linear Economics*, The MacMillan Press, Londen, 1974.
- HEALY M.J.R., *Matrices for Statistics*, 2de editie, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- KLEIN M.W., *Mathematical Methods for Economics*, Addison Wesley, Reading, 1998.
- OSTASZEWSKI A., *Mathematics in Economics. Models and Methods*, Blackwell Publishers, Oxford, 1993.
- SEARLE S.R. & HAUSMAN W.H., *Matrix Algebra for Business and Economics*, John Wiley & Sons, 1970.
- SIMON C.P. & BLUME L., *Mathematics for Economists*, W.W. Norton & Company, New York, 1994.
- SYDSÆTER K., STRØM A. & BERCK P., *Economists' Mathematical Manual*, Springer-Verlag, Berlijn, 1999.
- VERHEYEN P., *Wiskunde en Economie*, Garant, Leuven, 1999.
- WEBER J.D., *Mathematical Analysis, Business and Economic Applications*, Harper and Row, New York, 1976.

Wiskunde IIA

Oefeningen en oplossingen

voor het tweede jaar Bachelor in de Economische Wetenschappen, in de
Toegepaste Economische Wetenschappen en in de Toegepaste Economische
Wetenschappen: Handelsingenieur

2019 – 2020

3 Optimalisatie van functies van meerdere veranderlijken

Oefening 3.1

Gegeven zijn de volgende symmetrische matrices:

$$1. \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Bepaal het definitief zijn van deze matrices.

Oefening 3.2

Gegeven zijn de volgende kwadratische vormen:

$$1. Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$2. Q_2(x_1, x_2) = -4x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$3. Q_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_2$$

Ga het definitief zijn van deze kwadratische vormen na.

Oefening 3.3

Bepaal de definitieverzameling en geef een volledig extremumonderzoek (zadelpunten, minima, maxima) van de volgende functies bepaald door:

$$1. f(x, y) = xy - (x^2 + y)^2$$

$$2. f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

$$3. f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$$

This page is intentionally left blank.

This page is intentionally left blank.

This page is intentionally left blank.

This page is intentionally left blank.

Oefening 3.19

Een marketingbedrijf heeft uitgerekend dat indien een firma een bedrag x (in 10 000 EUR) spendeert aan relatiegeschenken voor grote klanten en een bedrag y (in 10 000 EUR) aan kleinere klanten, de firma een extra omzet kan verwachten die gegeven wordt door:

$$S(x, y) = \frac{40x}{5 + x} + \frac{20y}{10 + y}.$$

1. Stel de winstfunctie op voor de bijkomende winst ten gevolge van de extra omzet.
2. Onderstel dat een firma over een budget van 250 000 EUR beschikt, bepaal dan de bedragen x en y opdat de winst maximaal zou zijn. Bepaal de maximale winst.

Oefening 3.20

De hoeveelheid q die van een zeker product kan gemaakt worden, hangt af van de hoeveelheden q_A en q_B die van twee grondstoffen A en B gebruikt worden. Het verband tussen deze hoeveelheden wordt beschreven door de vergelijking

$$q = 10 - \frac{1}{q_A} - \frac{1}{q_B}.$$

Een eenheid van grondstof A kost 1 geldeenheid, en een eenheid van grondstof B kost 4 geldeenheden. Bepaal de verkoopprijs om een maximale winst te maken van 72 geldeenheden.

Oefening 3.21 Tweede examenperiode 2010-2011

Gegeven:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, \quad G(x, y) = x^2 + y^2 - b, \quad b \in \mathbb{R}_0^+.$$

Gevraagd:

1. Bepaal in functie van b de mogelijke extremale punten van f die voldoen aan het gebonden extremumvraagstuk onder de nevenvoorwaarde $G(x, y) = 0$.
2. Beschouw het punt $P(2, a)$ met $a \in \mathbb{R}$.
 - (a) Bereken a en b zodat het punt $P(2, a)$ een stationair punt is van f onder de nevenvoorwaarde $G(x, y) = 0$.
 - (b) Stel met de gevonden waarde van b de nevenvoorwaarde grafisch voor.
 - (c) Leg aan de hand van Figuur 3.1 uit waarom je voor de gevonden waarden van a en b een extremaal punt bereikt.
 - (d) Bereken met behulp van de veralgemeende Hessiaanse matrix voor een extremaal punt $P(2, a)$ naar keuze of dit punt een minimum, een maximum, een buigpunt of een zadelpunt is.

This page is intentionally left blank.

3 Optimalisatie van functies van meerdere veranderlijken

Oefening 3.1

1. Berekening van de leidende minoren levert:

$$A_1 = 2 > 0 \quad \text{en} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Bijgevolg is de matrix positief-definiet.

2. Berekening van de leidende minoren levert:

$$B_1 = -3 < 0 \quad \text{en} \quad B_2 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

De matrix is indefiniet.

3. Berekening van de leidende minoren levert:

$$C_1 = 1 > 0, \quad C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{en} \quad C_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -25 < 0.$$

De matrix C is indefiniet vanwege C_3 .

4. Berekening van de leidende minoren levert:

$$D_1 = 1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -10 < 0 \quad \text{en} \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 65 > 0.$$

Bijgevolg is de matrix indefiniet.

Oefening 3.2

1. De matrix die bij deze kwadratische vorm hoort, wordt gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad A_1 = 1 > 0 \quad \text{en} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Bijgevolg is de matrix A indefiniet en dus is de geassocieerde kwadratische vorm $Q_1(x_1, x_2)$ indefiniet.

2. De matrix die bij deze kwadratische vorm hoort, wordt gegeven door:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{met} \quad B_1 = -4 < 0 \quad \text{en} \quad B_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

De matrix $\mathbf{B}$ is negatief-definiet en de geassocieerde kwadratische vorm $Q_2(x_1, x_2)$ is dus ook negatief-definiet.

3. De matrix die bij deze kwadratische vorm hoort, wordt gegeven door:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{met } C_1 = 1 > 0, \quad C_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{en} \quad C_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

De matrix $\mathbf{C}$ is indefiniet en de geassocieerde kwadratische vorm $Q_3(x_1, x_2, x_3)$ is ook indefiniet.

Oefening 3.3

Voor alle gegeven functies is $\text{def}(f) = \mathbb{R}^2$.

1. De kritische punten van de functie f met $f(x, y) = xy - (x^2 + y)^2$ voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - 4x(x^2 + y) = 0 & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2(x^2 + y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Vermenigvuldigen we (2) met $2x$ en trekken we dit resultaat af van de eerste vergelijking dan vinden we $y = 2x^2$. Substitutie hiervan in (2) levert $x - 6x^2 = 0$ en dus $x = 0$ of $x = \frac{1}{6}$. We besluiten dat $(0, 0)$ en $(\frac{1}{6}, \frac{1}{18})$ de enige kritische punten zijn van f . Berekening van de Hessiaan levert

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4(x^2 + y) - 8x^2 & 1 - 4x \\ 1 - 4x & -2 \end{vmatrix}.$$

Uit $H_1(0, 0) = 0$ en $H_2(0, 0) = -1 < 0$ volgt er dat $(0, 0)$ een zadelpunt is voor f met $f(0, 0) = 0$.

In het kritisch punt $(\frac{1}{6}, \frac{1}{18})$ geldt er $H_1(\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) = -\frac{5}{9} < 0$ en $H_2(\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) = 1 > 0$, waaruit we kunnen besluiten dat f een (lokaal) maximum bereikt in $(\frac{1}{6}, \frac{1}{18})$ met $f(\frac{1}{6}, \frac{1}{18}) = \frac{1}{432}$.

This page is intentionally left blank.