WISKUNDE voor bedrijfskundigen II
Oefeningenbundel

Bachelor of Science in de handelswetenschappen
Schakelprogramma tot Master of Science in de handelswetenschappen
Universiteit Gent

Academiejaar 2019-2020

Inhoudsopgave

Opgaven

Hoofdstuk 1

Bepaalde en oneigenlijke integralen

Oefening 1.1. Bereken de volgende bepaalde integralen.

1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_2^{4} t^2 \, \mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_e^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

4) $\displaystyle\int_1^{5} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{1} x(3x^2+4)^3 \, \mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$

7) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

8) $\displaystyle\int_{-1}^{2} t \sin\frac{\pi t^2}{4} \, \mathrm{d}t$

9) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, \mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int_0^{2\tan\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2} \quad (\alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[)$

11) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$

12) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$

13) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x| \, \mathrm{d}x$

14) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin|x| \, \mathrm{d}x$

15) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \sqrt{x^2+x^4} \, \mathrm{d}x$

16) $\displaystyle\int_{\tan\alpha}^{\tan\beta} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \quad (\alpha, \beta \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[)$

17) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 \, \mathrm{d}x$

18) $\displaystyle\int_t^{2t} (t+z) \, \mathrm{d}z$

19) $\displaystyle\int_2^{1} \frac{x^2-1}{x^4} \, \mathrm{d}x$

20) $\displaystyle\int_3^{6} \left(x^{-2} + \frac{1}{x^{-2}}\right) \mathrm{d}x$

21) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^3}$

22) $\displaystyle\int_1^{5} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \mathrm{d}x$

23) $\displaystyle\int_5^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)}\,\mathrm{d}t$

24) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}x$

25) $\displaystyle\int_a^{2a} x\sqrt[3]{a+x}\,\mathrm{d}x$

26) $\displaystyle\int_{16}^{25} \frac{5x+9}{(x-9)^2}\,\mathrm{d}x$

Oefening 1.2. Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door

1) de rechten met vergelijkingen $y = x - 2$, $y = 0$, $x = 0$ en $x = 2$.
2) de parabool met vergelijking $y = x^2 - 4x + 5$ en de rechten met vergelijkingen $y = 0$, $x = 1$ en $x = 4$.
3) de parabool met vergelijking $y = -2x^2 + 5x - 4$, de Y-as, de X-as en de rechte met vergelijking $x = 3$.
4) de rechten met vergelijkingen $y = 3x + 7$, $y = 0$, $x = 1$ en $x = -3$.

Oefening 1.3. Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door

1) $y = \dfrac{x^2-4}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 2 \quad \text{en} \quad x = 4$
2) $y = x^2, \quad y = x \quad \text{en} \quad y = 2x$
3) $y = x^{99}, \quad x = -1, \quad x = 1 \quad \text{en} \quad y = -\frac{1}{2}x$
4) $y^2 = 2x \quad \text{en} \quad y = x - 4$
5) $y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 2 \quad \text{en} \quad x = 2$
6) $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{en} \quad x = b \quad (b > a > 0)$
7) $y^2 = x + 1 \quad \text{en} \quad y^2 = -x + 1$

Oefening 1.4. Bepaal het consumenten- en producentensurplus bij marktevenwicht en bij

1) $p = 0{,}09q^2$ (aanbod), $\quad p = 300 - 0{,}03q^2$ (vraag)
2) $q = p - 1$ (aanbod), $\quad q = \dfrac{60}{p} - 5$ (vraag)

Oefening 1.5. Bepaal de Gini-coëfficiënt bij de volgende Lorenz-functies:

1) $L(x) = \dfrac{2x}{3-x}$
2) $L(x) = 1 - \sqrt[3]{(1-x)^2}$

Oefening 1.6. Bereken de volgende oneigenlijke integralen.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$

7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Oefening 1.7. Voor welke waarden van de parameter $m \in \mathbb{R}$ is de volgende oneigenlijke integraal convergent?

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^m} \quad (a > 0)$$

Oefening 1.8. Voor welke waarden van de parameter $m \in \mathbb{R}_0^+$ is de volgende oneigenlijke integraal convergent?

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^m}} \quad (a > 0)$$

Oefening 1.9. De levensduur van een apparaat wordt gemeten door een continue stochastische variabele met dichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{5}e^{-(1/5)x}$, waarbij x staat voor de levensduur in maanden.

1) Wat is de kans dat de levensduur van het apparaat tussen de 10 en 15 maanden ligt?
2) Wat is de kans dat het apparaat defect raakt binnen de 8 maanden?
3) Wat is de kans dat het apparaat meer dan 1 jaar probleemloos blijft functioneren?
4) Wat is de kans dat het apparaat ooit zal falen?

Oefening 1.10. De wachttijd aan het loket van een bepaalde bank is een continue stochastische variabele met dichtheidsfunctie $f(x) = \frac{1}{4}e^{-x/4}$, waarbij x de wachttijd in minuten voorstelt. Bepaal de kans dat een klant minstens T minuten moet wachten aan het loket van deze bank.

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijkingen

Oefening 2.1. Ga na welke van de volgende vergelijkingen differentiaalvergelijkingen met gescheiden veranderlijken zijn. Los deze op.

1) $(1+x^2)y' + xy = 0$

2) $xy\ \mathrm{d}x + (x-y)\ \mathrm{d}y = 0$

3) $y' + 2y = 3x - 2$

4) $y^2\ \mathrm{d}x - (1-x)\ \mathrm{d}y = 0$

5) $y' = \sqrt{1-y^2}$

6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{dx} = \dfrac{\cos^2 y\ \tan y}{1+x^2}$

7) $2(y+3)\ \mathrm{d}x + xy\ \mathrm{d}y = 0$

8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}$

9) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\ \cot x = 0$

10) $\mathrm{d}y = y^{-1}x^4(y^2+1)\ \mathrm{d}x$

11) $y' = 3xy \qquad \text{met } y = 3 \text{ als } x = 0$

12) $(1+x^2)y' = y^2 \qquad \text{met } y = -\frac{4}{\pi} \text{ als } x = 1$

Oefening 2.2. Stel $K(t)$ de waarde van een kapitaal op tijdstip t. Dit kapitaal groeit in de tijd evenredig met de grootte van het kapitaal. Wetende dat de evenredigheidsfactor gelijk is aan r (> 0) en dat het beginkapitaal gelijk is aan K_0, bepaal $K(t)$.

Oefening 2.3. Stel $p(t)$ de eenheidsprijs op tijdstip t van een product. Voor dit product is er een constant aanbod A_0 en een lineaire vraagcurve $q(t) = a - bp(t)$ $(b > 0)$. De prijsverandering in de tijd is evenredig met het verschil tussen de vraag en het aanbod. Wetende dat de prijs op tijdstip $t = 0$ gelijk is aan p_0, bepaal $p(t)$ en de limietprijs.

Oefening 2.4. De marginale prijs $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ is evenredig met de prijs p. Bepaal de prijs-vraagvergelijking $p = p(q)$ als men weet dat er geen vraag is bij een prijs van 80 en dat er 8 eenheden gevraagd worden bij een prijs van 50.

Oefening 2.5. Een onderneming beschikt over een zekere kapitaalstock. De verandering van die stock in de tijd bestaat enerzijds uit een constante toename gelijk aan b (evenredig met de bruto investeringen), anderzijds uit een afname evenredig met de stock. Wetende dat op tijdstip $t = 0$ het kapitaal gelijk is aan K_0, bepaal de kapitaalstock $K(t)$ op tijdstip t en bespreek de evolutie.

Oefening 2.6. Bepaal alle vraagcurves $q = D(p)$ met constante elasticiteit ε.

Oefening 2.7. Een nieuwe drank wordt gelanceerd in een populatie van 20 miljoen potentiële gebruikers van deze drank. Zij $N(t)$ het aantal gebruikers (in miljoen) na t weken. De verandering van $N(t)$ in de tijd is evenredig met het aantal potentiële gebruikers dat na t weken de drank nog niet heeft gebruikt. Bespreek de evolutie van $N(t)$, wetende dat $N(0) = 0$ en dat na 20 weken het aantal gebruikers 4 miljoen bedraagt.

Oefening 2.8. Aan een universiteit met 50.000 studenten blijkt het aantal studenten met een welbepaalde beltoon op hun mobieltje een logistisch groeipatroon te volgen. Definieer $y(t)$ als het aantal studenten (in tienduizenden) die de beltoon gebruiken, t weken na het tijdstip van de eerste observatie. Bij de eerste observatie hadden 500 studenten de beltoon op hun mobieltje. Er is ook vastgesteld dat het maximale groeitempo gelijk is aan 10 studenten extra per week. Aan welke randvoorwaardeprobleem voldoet $y(t)$?

Oefening 2.9. Aan een bepaalde opleiding met 4000 studenten, bespreekt het faculteitsbestuur plannen om de opleidingsduur uit te breiden. Na afloop van de vergadering verspreiden twee studentenvertegenwoordigers het nieuws naar hun achterban. Onmiddellijk daarna zijn er 10 studenten op de hoogte van de plannen. Zij $y(t)$ het aantal studenten op de hoogte, t dagen na het verspreiden van het nieuws. Onderstel dat de relatieve groei van dat aantal recht evenredig is met de proportie studenten nog niet op de hoogte. Hoeveel studenten zullen er op de hoogte zijn wanneer de maximale aangroeisnelheid bereikt wordt? Hoeveel groter is deze maximale aangroeisnelheid in vergelijking met de initiële aangroeisnelheid?

Oplossingen

Hoofdstuk 1

Bepaalde en oneigenlijke integralen

Oefening 1.1.

1) 2
2) $\frac{56}{3}$
3) -1
4) $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$
5) $\frac{715}{8}$
6) $\frac{1}{2}$
7) $\frac{\pi}{2}$
8) $\frac{2+\sqrt{2}}{\pi}$
9) 0
10) $\frac{\alpha}{2}$
11) $\frac{\pi}{6}$
12) $\frac{\pi}{8}$
13) 5
14) 3
15) $\frac{5}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}$
16) $\beta-\alpha$
17) $\frac{56}{15}$
18) $\frac{5}{2}t^2$
19) $\frac{-5}{24}$
20) $63+\frac{1}{6}$
21) $\frac{56}{25}$
22) $\frac{10}{3}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{25}+\frac{5}{6}$
23) $-6+2\sqrt{5}-4\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
24) $\frac{13-5\sqrt{5}}{60\sqrt{5}}$
25) $3a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{9\sqrt[3]{3}}{7}-\frac{3\sqrt[3]{3}}{4}-\frac{4\sqrt[3]{2}}{7}+\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$
26) $5\ln\frac{16}{7}+\frac{243}{56}$

Oefening 1.2.

1) 2
2) 6
3) $\frac{15}{2}$
4) $\frac{52}{3}$

Oefening 1.3.

1) 1
2) $\frac{7}{6}$
3) $\frac{13}{25}$
4) 18
5) $3 - \ln 4$
6) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$
7) $\frac{8}{3}$

Oefening 1.4.

1) marktevenwicht bij $q = 50$ en $p = 225$

   consumentensurplus: 2500

   producentensurplus: 7500
2) marktevenwicht bij $q = 5$ en $p = 6$

   consumentensurplus: $60 \ln 2 - 30$

   producentensurplus: $\frac{25}{2}$

Oefening 1.5.

1) $5 - 12 \ln \frac{3}{2}$
2) $1/5$

Oefening 1.6.

1) $+\infty$
2) 1
3) bestaat niet
4) $\frac{\pi}{2}$
5) 2
6) $\frac{\pi}{4}$
7) 0

Oefening 1.7.

Er is convergentie $\Leftrightarrow m > 1$, want

$$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^m} = \begin{cases} +\infty & \text{als } m \leq 1 \\ -\dfrac{a^{1-m}}{1-m} \in \mathbb{R} & \text{als } m > 1. \end{cases}$$

Oefening 1.8.

Er is convergentie $\Leftrightarrow m < 2$, want

$$\int_0^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^m}} = \begin{cases} +\infty & \text{als } m \geq 2 \\ \dfrac{2a^{\frac{2-m}{2}}}{2-m} \in \mathbb{R} & \text{als } m < 2. \end{cases}$$

Oefening 1.9.

1) $\displaystyle\int_{10}^{15} f(x)\ \mathrm{d}x = e^{-2} - e^{-3}$

2) $\displaystyle\int_{0}^{8} f(x)\ \mathrm{d}x = 1 - e^{-8/5}$

3) $\displaystyle\int_{12}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = e^{-12/5}$

4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$

Oefening 1.10.

$e^{-T/4}$

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijkingen van orde één

Oefening 2.1.

1) $\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C \quad$ of $\quad y = 0$
   Expliciet: $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$

2) –

3) –

4) $\frac{1}{y} = \ln|1-x| + C \quad$ of $\quad y = 0$
   Expliciet: $y = \frac{1}{\ln|1-x|+C} \quad$ of $\quad y = 0$

5) $\operatorname{Bgsin} y = x + C \quad$ of $\quad y = 1 \quad$ of $\quad y = -1$
   Expliciet: $y = \sin(x+C)$ (met $x \in [-\frac{\pi}{2} - C, \frac{\pi}{2} - C]$) $\quad$ of $\quad y = \pm 1$

6) $\ln|\tan y| = \operatorname{Bgtan} x + C \quad$ of $\quad \tan y = 0$
   Expliciet: $y = \operatorname{Bgtan}\left(Ce^{\operatorname{Bgtan} x}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

7) $y - 3\ln|y+3| = -2\ln|x| + C \quad$ of $\quad y = -3$

8) $e^{-y} = -e^x + C$
   Expliciet: $y = -\ln(-e^x + C)$

9) $\ln|y| = -\ln|\sin x| + C \quad$ of $\quad y = 0$
   Expliciet: $y = \frac{C}{\sin x}$

10) $\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{5}x^5 + C$
    Expliciet: $y = \pm\sqrt{-1 + Ce^{2x^5/5}} \quad (C \in \mathbb{R}_0^+)$

11) $y = 3e^{3x^2/2}$

12) $y = -\frac{1}{\operatorname{Bgtan} x}$

Oefening 2.2.

$\frac{dK}{\mathrm{d}t} = rK \quad \Rightarrow \quad K(t) = Ce^{rt}$
$K(0) = K_0 \quad \Rightarrow \quad C = K_0$

Dus: $K(t) = K_0 e^{rt}$

Oefening 2.3.

$\frac{dp}{\mathrm{d}t} = k(a - bp - A_0) \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{a-A_0}{b} + Ce^{-bkt}$
$p(0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad C = p_0 - \frac{a-A_0}{b}$

Dus: $p(t) = \frac{a-A_0}{b} + \left(p_0 - \frac{a-A_0}{b}\right) e^{-bkt}$

Oefening 2.4.

Differentiaalvergelijking: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = ap$. Randvoorwaarden: $p(0) = 80$, $p(8) = 50$.
Prijs-vraagvergelijking: $p = 80 \left(\frac{5}{8}\right)^{q/8}$

Oefening 2.5.

$\frac{dK}{\mathrm{d}t} = b - aK \quad (a, b > 0) \quad \Rightarrow \quad K(t) = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$
$K(0) = K_0 \quad \Rightarrow \quad K(t) = \frac{b}{a} + \left(K_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-at}$

Oefening 2.6.

$\frac{D'}{D} \cdot p = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad D = Cp^{\varepsilon}$

Oefening 2.7.

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k(20 - N) \quad \Rightarrow \quad N(t) = 20 - Ce^{-kt}$
$N(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 20$
$N(20) = 4 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{20} \ln \frac{4}{5}$

Dus: $N(t) = 20 - 20\, e^{(\frac{1}{20} \ln \frac{4}{5})t} = 20 - 20 \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$

Oefening 2.8.

$\dfrac{1}{y} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(1 - \dfrac{y}{5})$ met $a = 1/1250$ en $y(0) = 1/20$.

Oefening 2.9.

DV: $\frac{1}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(1 - \frac{y}{4000})$ met $y(0) = 10$.

y' is maximaal als $y = 4000/2 = 2000$
Maximale aangroeisnelheid: $a\frac{4000}{4} = 1000a$
Initiële aangroeisnelheid: $y'(0) = \frac{399a}{40}$
Verhouding maximale /initiële aangroeisnelheid: $\frac{40000}{399} \approx 100$.