WISKUNDE voor bedrijfskundigen II
Theorie

Bachelor of Science in de handelswetenschappen
Schakelprogramma tot Master of Science in de handelswetenschappen
Universiteit Gent

Philippe Carette

Academiejaar 2019-2020

Inhoudsopgave

1 Bepaalde en oneigenlijke integralen **1**
1.1 Oppervlakte en primitieve functie . . . 1
1.2 De bepaalde integraal . . . 3
1.3 Oppervlakte voor negatieve $f(x)$ . . . 6
1.4 Opp. begrensd door 2 grafieken . . . 8
1.5 Oneigenlijke integralen . . . 10
1.5.1 Integralen op een oneindig interval . . . 10
1.5.2 Integralen van onbegrensde functies . . . 13
1.6 Toepassingen in de economie . . . 14
1.6.1 Consumenten- en producentensurplus . . . 14
1.6.2 De Gini-index van de inkomensverdeling . . . 16

2 Differentiaalvergelijkingen **19**
2.1 Basisbegrippen . . . 19
2.2 Directe integratie . . . 21
2.3 Separabele differentiaalvergelijkingen . . . 22
2.4 Randvoorwaardeproblemen . . . 26
2.5 Toepassing: groeiwetten . . . 27
2.5.1 Exponentiële groei . . . 27
2.5.2 Begrensde groei . . . 28
2.5.3 Logistische groei . . . 30
2.5.4 Overzicht groeiwetten . . . 31

3 Determinanten **33**
3.1 Definities . . . 33
3.1.1 Determinant van de 2de orde . . . 33
3.1.2 Determinant van de 3de orde . . . 33
3.1.3 Regel van Sarrus . . . 35
3.1.4 Determinant van de n-de orde ($n \geq 3$) . . . 35
3.2 Eigenschappen . . . 37
3.3 Kolom- en rijoperaties . . . 39

4 Matrices **43**
4.1 Definities . . . 43
4.1.1 ($m \times n$)-matrices . . . 43
4.1.2 Rijmatrices en kolommatrices . . . 44
4.1.3 Vierkante matrices . . . 44

4.1.4 Nulmatrices . . . 45
4.1.5 Eenheidsmatrices . . . 45
4.1.6 Diagonaalmatrices en scalaire matrices . . . 46
4.1.7 De getransponeerde matrix . . . 46
4.2 Bewerkingen met matrices . . . 47
4.2.1 Som van matrices . . . 47
4.2.2 Product van een matrix met een reëel getal . . . 48
4.2.3 Product van matrices . . . 48
4.3 De inverse matrix . . . 50
4.3.1 De adjunctmatrix . . . 50
4.3.2 Inverse matrix van een vierkante matrix . . . 51
4.4 Matrixnotatie van een $(m \times n)$-stelsel . . . 54
4.5 Reguliere $(n \times n)$-stelsels en hun oplossing . . . 55
4.6 De methode van Gauss-Jordan . . . 56
4.6.1 Stelsels van lineaire vergelijkingen . . . 56
4.6.2 Inverteren van een vierkante matrix . . . 60
4.7 Het Leontief input-outputmodel . . . 62

5 Eigenwaarden en eigenvectoren 67
5.1 Vectoren . . . 67
5.2 Bewerkingen met vectoren . . . 67
5.3 Eigenwaarden en eigenvectoren . . . 69
5.4 Bepaling van eigenwaarden en eigenvectoren . . . 71
5.5 Toepassingen . . . 75
5.5.1 Een Markov model . . . 75
5.5.2 Een populatievoorspellingsmodel . . . 77

6 Functies van twee variabelen 81
6.1 Algemene begrippen . . . 81
6.2 De grafiek . . . 83
6.3 Continuïteit . . . 85
6.4 Partiële afgeleiden . . . 86
6.4.1 Definitie en grafische interpretatie . . . 86
6.4.2 Praktische berekening van partiële afgeleiden . . . 89
6.4.3 Partiële afgeleiden van hogere orde . . . 90
6.5 De totale differentiaal . . . 92
6.6 Raaklijn aan een niveaukromme . . . 94
6.7 Kettingregel . . . 96
6.8 Toepassing in de economie: marginale substitutievoet . . . 97

7 Optimaliseren van $z = f(x, y)$ 99
7.1 Lokale en globale extrema . . . 99
7.2 Ongebonden extremumproblemen . . . 100
7.3 Gebonden extremumproblemen . . . 102
7.3.1 De methode van Lagrange . . . 102
7.3.2 Interpretatie van de Lagrangemultiplicator . . . 104

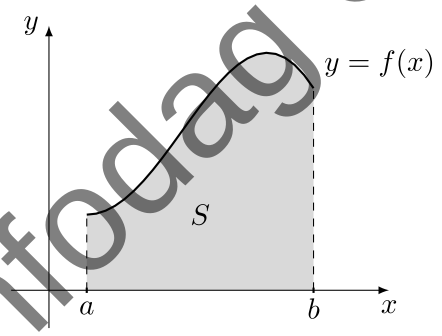
Hoofdstuk 1

Bepaalde en oneigenlijke integralen

Heel wat economische toepassingen maken gebruik van het begrip "oppervlakte onder een kromme".

1.1 Oppervlakte en primitieve functie

Onderstel dat een functie f continu en positief is op het interval $[a, b]$. We willen erachter komen met welke formule de oppervlakte S in figuur 1.1 te berekenen is.



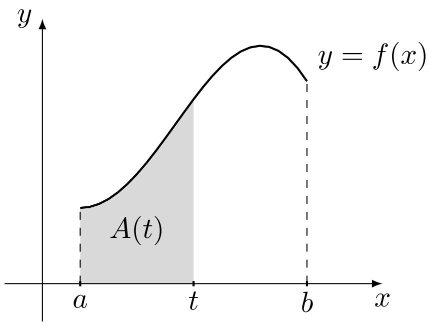
Figuur 1.1: De oppervlakte onder een grafiek tussen $x = a$ en $x = b$.

Om dit vraagstuk op te lossen, is het nodig de *oppervlaktefunctie* $A : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ te bekijken, waarbij $A(t)$ gedefinieerd is als de oppervlakte van het gebied onder de grafiek van de functie f op het interval $[a, t]$, zie figuur 1.2.

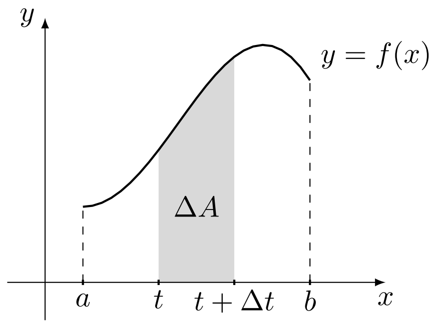
Beschouw nu een positieve toename Δt van t. Dan is $A(t + \Delta t) - A(t)$ gelijk aan de oppervlakte ΔA van het gebied onder de grafiek van f op het interval $[t, t + \Delta t]$, zoals aangegeven in figuur 1.3.

Als Δt klein genoeg is, zal de functie f geen lokale extrema op het interval $[t, t + \Delta t]$ bezitten. Laten we onderstellen dat f stijgend is op dat interval. Het gebied met oppervlakte ΔA is dan "gekneld" tussen twee rechthoeken met basis Δt. De hoogte van de kleinere rechthoek is $f(t)$ en de hoogte van de grotere rechthoek is $f(t + \Delta t)$. M.a.w.:

$$f(t)\Delta t \leq \Delta A \leq f(t + \Delta t)\Delta t.$$



Figuur 1.2: De oppervlakte $A(t)$ tussen $x = a$ en $x = t$.



Figuur 1.3: De oppervlakte ΔA tussen $x = t$ en $x = t + \Delta t$.

Delen we alle leden van de vorige ongelijkheid door het positief getal Δt, dan vinden we

$$f(t) \leq \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq f(t + \Delta t).$$

Vermits f continu is in t, geldt $\lim\limits_{\Delta t \overset{>}{\to} 0} f(t + \Delta t) = f(t)$. Aan de hand van de knijpstelling kunnen we dan besluiten dat

$$\lim_{\Delta t \overset{>}{\to} 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = f(t).$$

Een analoge redenering kan opgebouwd worden wanneer Δt negatief is, zodat ook daar geldt:

$$\lim_{\Delta t \overset{<}{\to} 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = f(t).$$

Samengevat,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = f(t), \quad \text{of nog,} \quad A'(t) = f(t).$$

Dit belangrijke resultaat zegt dat de oppervlaktefunctie A de functie f als afgeleide heeft. Hieruit volgt $A(t) = F(t) + C$ met F een primitieve functie van f en C een constante. Maar omdat $A(a) = 0$ moet gelden $0 = F(a) + C$, waaruit volgt $C = -F(a)$. Aldus,

$$A(t) = F(t) - F(a) \text{ met } F(x) = \int A(x)\, \mathrm{d}x.$$

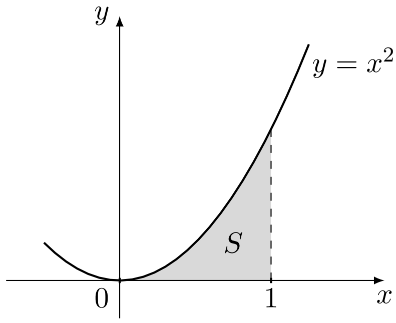
De gevraagde oppervlakte S is dan uiteindelijk

$$S = A(b) = F(b) - F(a)$$

waarbij F een willekeurige primitieve is van f.

Voorbeeld

Bereken de oppervlakte van het gebied onder de parabool $y = x^2$ en boven het interval $[0, 1]$.



Oplossing. De oppervlakte S is gelijk aan $F(1) - F(0)$ waar $F(x)$ een primitieve functie is van x^2. Nu geldt $\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$, dus we kiezen $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. De gevraagde oppervlakte is dan

$$S = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

◄

1.2 De bepaalde integraal

Het verband tussen oppervlakte en integraal brengt ons tot de volgende definitie.

Definitie

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$. Zij F een willekeurige continue functie op $[a, b]$ zodat $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in]a, b[$. Dan heet het verschil $F(b) - F(a)$, dat niet afhangt van de keuze voor F, de *bepaalde integraal van f over $[a, b]$*. Deze bepaalde integraal wordt genoteerd als $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ en het getal $F(b) - F(a)$ als $[F(x)]_a^b$. Dus,

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

In de praktijk kunnen we bij het bepalen van F de integratieconstante weglaten:

Voorbeeld 1

Bereken $\displaystyle\int_2^5 e^{2x} \, \mathrm{d}x$.

Oplossing. Aangezien $\int e^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + C$, hebben we

$$\int_2^5 e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_2^5 = \frac{1}{2}e^{10} - \frac{1}{2}e^4 = \frac{1}{2}e^4(e^6 - 1).$$ ◄

Voorbeeld 2

Bereken $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Oplossing. Substitueer $u = 3x^2 + 1$. Dan $du = 6x\ \mathrm{d}x$, zodat $x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}du$. Bijgevolg,

$$
\begin{aligned}
\int x\sqrt{3x^2+1}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{6}\int u^{1/2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{6}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C \\
&= \frac{1}{9}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{9}(3x^2+1)^{3/2} + C.
\end{aligned}
$$

De bepaalde integraal is dan

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{9}(3x^2+1)^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{9}(3\cdot 1^2+1)^{3/2}\right) - \left(\frac{1}{9}(3\cdot 0^2+1)^{3/2}\right) \\
&= \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.
\end{aligned}
$$

◂

De oplossing uit voorbeeld 2 kan nog sneller gevonden worden als we na de substitutie de integratiegrenzen voor u berekenen. Als x varieert van 0 tot 1, dan heeft $u = 3x^2 + 1$ als ondergrens $3 \cdot 0^2 + 1 = 1$ en als bovengrens $3 \cdot 1^2 + 1 = 4$, zodat

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{3x^2+1}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{6}\int_1^4 \sqrt{u}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{4^{3/2}}{3/2} - \frac{1^{3/2}}{3/2}\right) = \frac{7}{9}.
\end{aligned}
$$

In het algemeen geldt de volgende substitutieregel voor bepaalde integralen.

Substitutieregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (\text{met } u = g(x))$$

Voorbeeld 3

Bereken $\displaystyle\int_0^2 x2^x \,\mathrm{d}x$.

Oplossing. Stel $f(x) = x$ en $g'(x) = 2^x$, dan $f'(x) = 1$ en $g(x) = \int 2^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}2^x$. Toepassing van de regel voor partiële integratie

$$\int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x$$

levert

$$\begin{aligned}\int x2^x \,\mathrm{d}x &= x\frac{1}{\ln 2}2^x - \int \frac{1}{\ln 2}2^x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ln 2}x2^x - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\ln 2}x2^x - \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\ln 2}2^x + C \\ &= \frac{1}{\ln 2}x2^x - \frac{1}{\ln^2 2}2^x + C.\end{aligned}$$

De bepaalde integraal is dan

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\ 2^x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{\ln 2}x2^x - \frac{1}{\ln^2 2}2^x\right]_0^2 \\ &= \left(\frac{1}{\ln 2}2 \cdot 2^2 - \frac{1}{\ln^2 2}2^2\right) - \left(\frac{1}{\ln 2}0 \cdot 2^0 - \frac{1}{\ln^2 2}2^0\right) \\ &= \left(\frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln^2 2}\right) - \left(0 - \frac{1}{\ln^2 2}\right) \\ &= \frac{8}{\ln 2} - \frac{3}{\ln^2 2}.\end{aligned}$$

◀

De oplossing van voorbeeld 3 kun je ook als volgt vinden:

$$\int_0^2 x2^x \,\mathrm{d}x = \left[x\frac{1}{\ln 2}2^x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{\ln 2}2^x \,\mathrm{d}x \qquad \text{(Ga dit na!)}$$

In het algemeen geldt de volgende *regel voor partiële integratie* bij bepaalde integralen:

$$\int_a^b f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x$$

Uit de definitie van de bepaalde integraal (p. 3) kan men onmiddellijk de volgende eigenschappen afleiden.

Eigenschappen

Indien de functie f continu is op een interval dat a, b en c bevat, dan

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$

Bijvoorbeeld, eigenschap 3 bewijst men als volgt. Zij F continu op $[a, b]$ met $F'(x) = f(x)$ voor alle x in een interval dat a, b en c bevat. Dan hebben we volgens definitie van de bepaalde integraal

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De lineariteitseigenschappen van de onbepaalde integraal blijven bewaard bij bepaalde integralen.

Lineariteit van de onbepaalde integraal

1. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
2. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

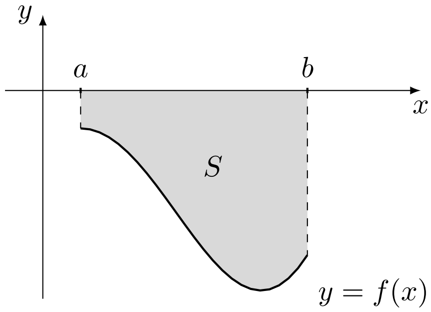
1.3 Oppervlakte voor negatieve $f(x)$

In paragraaf 1.1 hebben we gezien dat, indien $f(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$, de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en het interval $[a, b]$ precies gelijk is aan $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Blijft deze Maar wat gebeurt er nu als $f(x) \leq 0$ op $[a, b]$?

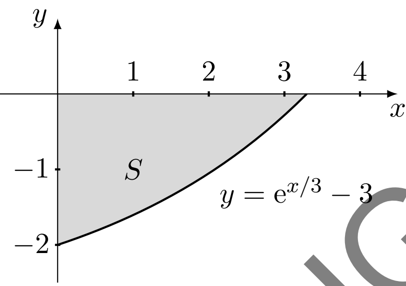
In dit geval heeft de bepaalde integraal $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ een negatieve uitkomst die exact het *tegengestelde* is van de oppervlakte S van het gebied tussen de grafiek van f en het interval $[a, b]$. Hier geldt dus:

$$S = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$



Voorbeeld

Bepaal de oppervlakte S van het gebied in de onderstaande figuur.



Oplossing. Op de figuur zien we dat $a = 0$ en $f(b) = 0$. Het getal b is het nulpunt van f en vinden we als volgt:

$$\mathrm{e}^{x/3} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x/3} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x/3 = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3\ln 3,$$

dus $b = 3\ln 3$.

Bijgevolg is de oppervlakte S gelijk aan

$$\begin{aligned}
S &= -\int_0^{3\ln 3} \left(e^{x/3} - 3\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[3e^{x/3} - 3x\right]_0^{3\ln 3} \\
&= -\left[\left(3e^{\ln 3} - 9\ln 3\right) - \left(3e^0 - 3\cdot 0\right)\right] \\
&= -\left[3\cdot 3 - 9\ln 3 - 3\right] \\
&= -6 + 9\ln 3 \approx 3{,}89.
\end{aligned}$$

Deze uitkomst schijnt te kloppen met de figuur. Daarop is te zien dat de gevraagde oppervlakte iets kleiner is dan de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(0, -2)$ en $(4, 0)$, zelf gelijk aan 4. ◀

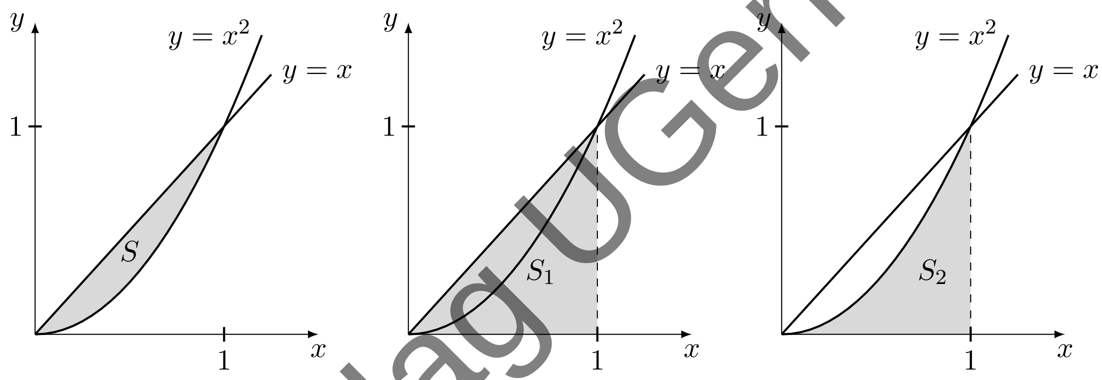
1.4 Oppervlakte begrensd door twee grafieken

Wanneer men de oppervlakte moet bepalen van een gebied dat begrensd is door grafieken van twee functies, kan men stapsgewijs te werk gaan, zoals geïllustreerd in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld

Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafieken van de functies $y = x$ en $y = x^2$, en gelegen tussen de verticale rechten $x = 0$ en $x = 1$.

Oplossing. In de volgende figuur is duidelijk te zien dat de gevraagde oppervlakte S gelijk is aan $S_1 - S_2$, waarbij S_1 gelijk is aan de oppervlakte van het gebied onder de rechte $y = x$ en boven het interval $[0, 1]$, en S_2 de oppervlakte van het gebied onder de parabool $y = x^2$ en eveneens boven het interval $[0, 1]$.



Vervolgens,

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \qquad \text{(opp. driehoek} = \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte)}$$
$$S_2 = \int_0^1 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

zodat $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Verifieer dat $\int_0^1 (x - x^2)\, dx$ tot dezelfde uitkomst (1/6) leidt. ◀

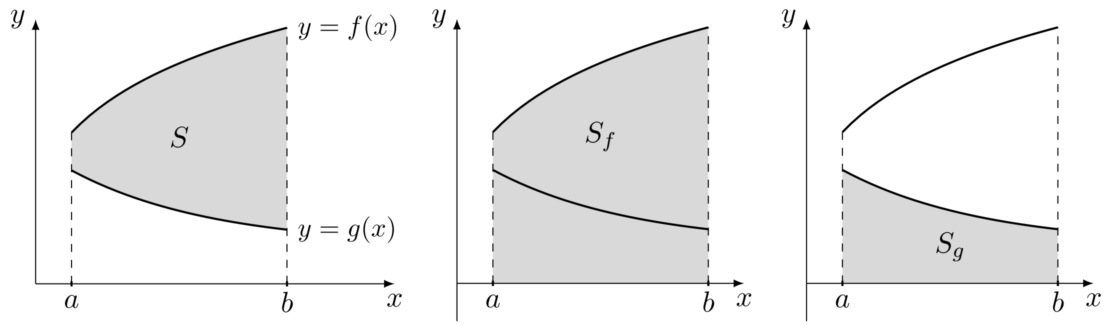
Een algemene formule om de oppervlakte begrensd door meerdere grafieken te bepalen, is gegeven door de volgende stelling.

Stelling (oppervlakte tussen twee grafieken)

Zij f en g continu op $[a, b]$ en zodat $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in [a, b]$. De oppervlakte van het gebied begrensd door de verticale rechten $x = a$ en $x = b$ en tussen de grafieken van de functies f en g is dan gelijk aan S met

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx.$$

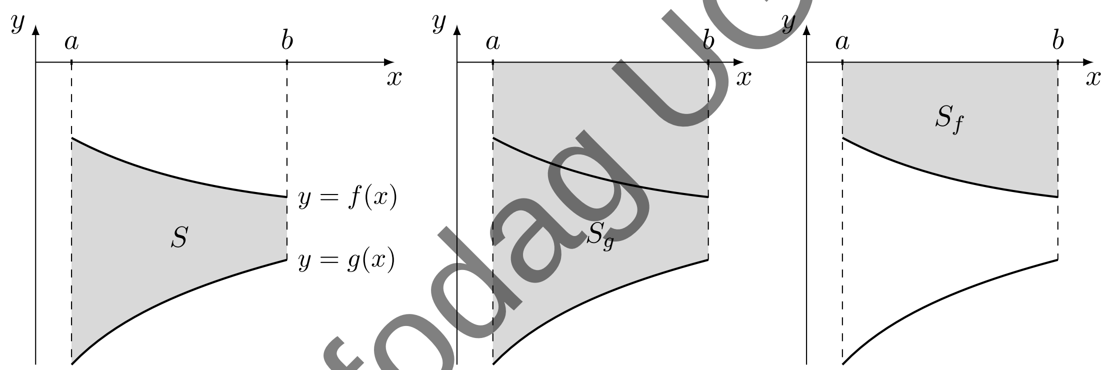
Bewijs. Noteer met S_f de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van f en het interval $[a, b]$. Als f en g beiden positief zijn op $[a, b]$, dan is de gevraagde oppervlakte S gelijk aan het verschil $S_f - S_g$, zoals te zien is in de volgende figuur.



Bijgevolg,

$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x.$$

Als f en g beiden negatief zijn op $[a, b]$, dan is de gevraagde oppervlakte S gelijk aan het verschil $S_g - S_f$, zoals te zien op de volgende figuur.



Aldus,

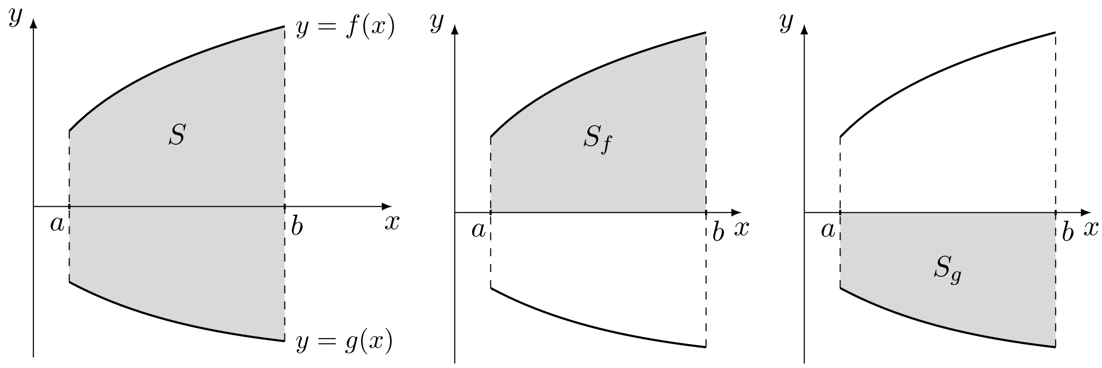
$$\begin{aligned} S = S_g - S_f &= \left(-\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\right) - \left(-\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Als f positief is en g negatief is op $[a, b]$, dan is de gevraagde oppervlakte S gelijk aan de som $S_f + S_g$:

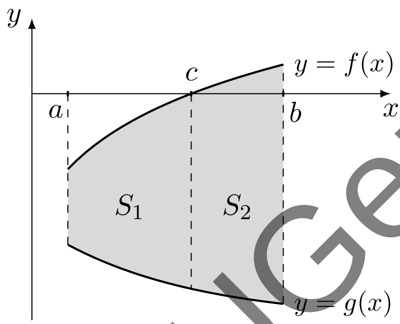
En ook hier vinden we de formule van de stelling uiteindelijk terug:

$$\begin{aligned} S = S_f + S_g &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \left(-\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

In de bovenstaande gevallen zijn we er stilzwijgend van uitgegaan dat de grafieken van f en g de x-as niet snijden op het interval $]a, b[$. Wanneer dit wel gebeurt, blijft de formule



nog altijd geldig. Om dit in te zien, onderstel bijvoorbeeld dat de grafiek van f de x-as snijdt in het punt c, zoals in de volgende figuur:



In dat geval,

$$
\begin{aligned}
S = S_1 + S_2 &= \int_a^c (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_c^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

1.5 Oneigenlijke integralen

In de economie en statistiek komen vaak integralen voor op oneindige intervallen en integralen van functies die onbegrensd zijn op het integratie-interval. Zo'n integralen noemt men *oneigenlijke integralen.*

1.5.1 Integralen op een oneindig interval

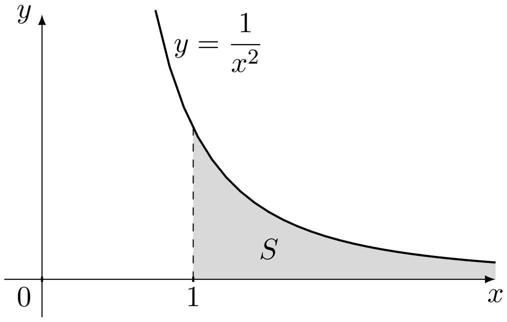
Beschouw het volgende voorbeeld, waarbij $a > 1$,

$$\int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{a} \qquad \text{(Controleer dit!)}$$

Wanneer we nu limiet nemen voor $a \to +\infty$, dan geldt

$$\lim_{a\to+\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 1, \text{ of nog, } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Men noemt $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$ een *oneigenlijke* integraal. Dit voorbeeld illustreert het feit dat een onbegrensd gebied, zoals het gebied met als rand de grafiek van de functie $y = \frac{1}{x^2}$, de x-as en de verticale rechte $x = 1$ (zie onderstaande figuur), toch een eindige oppervlakte S kan hebben .



Definitie

Zij f continu op de halfrechte $[a, +\infty[$. De *oneigenlijke integraal* $\int_a^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$ is gedefinieerd als

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Analoog, als f continu is op de halfrechte $]-\infty, b]$, dan definieert men de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^b f(x)\, \mathrm{d}x$ als

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Bestaan de bovenstaande limieten en zijn deze eindig, dan worden de bijbehorende oneigenlijke integralen *convergent* genoemd. In het andere geval heten ze *divergent.*

<u>Voorbeeld</u>

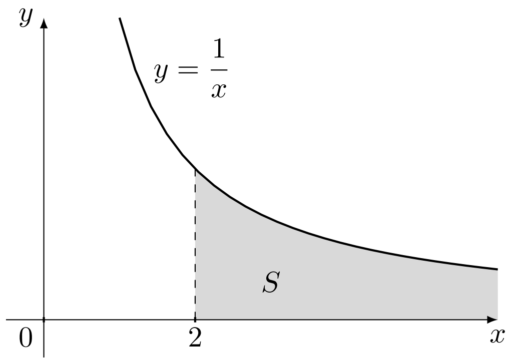
Is de oneigenlijke integraal $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ convergent? Zo ja, bepaal de waarde ervan.

Oplossing. Volgens de definitie hebben we

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x &= \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to+\infty} [\ln|x|]_2^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 2) \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

De oneigenlijke integraal $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$ is dus divergent. Het onbegrensde gebied met als rand de grafiek van de functie $y = \frac{1}{x}$, de x-as en de verticale rechte $x = 2$ (zie figuur hieronder) heeft een oneindige oppervlakte.

◀



Voor oneigenlijke integralen van het type $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ hanteert men de volgende definitie.

Definitie

Als f continu is op $\mathbb{R}$, dan wordt de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ als volgt gedefinieerd:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Deze is convergent indien zowel $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ \mathrm{d}x$ en $\int_{c}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ convergent zijn. In dat geval hangt van $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ niet af van de waarde van het opsplitsingspunt c.

Opmerking

Het is mogelijk dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \neq \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Het volgende voorbeeld toont aan dat $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$ kan bestaan en eindig zijn terwijl $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ toch divergent is.

Voorbeeld

Is $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ convergent? Zo ja, bepaal de waarde ervan.

Oplossing. Ga zelf na dat $\int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$. Zij $c \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{c} \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_a^c \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\ln\left(c^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(c^2+1\right) - \frac{1}{2}(+\infty) \\
&= -\infty,
\end{aligned}$$

bijgevolg is $\int_{-\infty}^{c} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ divergent waardoor $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ ook divergent is. Merk op dat $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ hier wel bestaat en eindig is. Immers,

$$\int_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-b}^{b} = \frac{1}{2}\ln\left(b^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left((-b)^2+1\right) = 0,$$

en dus $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty} 0 = 0.$ ◄

1.5.2 Integralen van onbegrensde functies

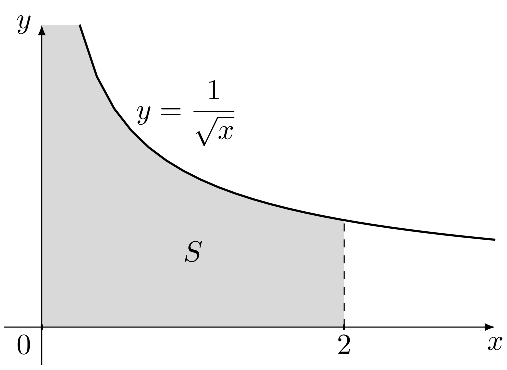
Beschouw het volgende voorbeeld. Neem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ met $x \in]0,2]$. Deze functie is onbegrensd op $]0,2]$, want $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. De functie f is continu op elk gesloten interval $[h,2]$ met $h \in]0,2[$, zodat de bepaalde integraal van f op $[h,2]$ bestaat en

$$\int_{h}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\right]_h^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}.$$

Het is zinvol om de oneigenlijke integraal $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ te definiëren als $\lim_{h \overset{>}{\to} 0} \int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Aldus,

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \int_h^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{h}\right) \\ &= 2\sqrt{2},\end{aligned}$$

waardoor $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ convergent is met waarde $2\sqrt{2}$. De oppervlakte van het onbegrensde gebied onder de grafiek van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en tussen de y-as en de rechte $x = 2$ (zie onderstaande figuur) heeft een eindige waarde .



In het algemeen kunnen we volgende definities formuleren:

Definities

- Als de functie f continu is op het interval $]a,b]$ en $a \notin \operatorname{dom} f$, dan wordt de *oneigenlijke integraal* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gedefinieerd als volgt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \int_{a+h}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Analoog, is de functie f continu op het interval $[a,b[$ en is $b \notin \operatorname{dom} f$, dan wordt de *oneigenlijke integraal* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gedefinieerd als:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h \overset{>}{\to} 0} \int_a^{b-h} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- Bestaan de bovenstaande limieten en zijn deze eindig, dan worden bijbehorende oneigenlijke integralen *convergent* genoemd. In het andere geval heten ze *divergent*.

- Tenslotte, als de functie f continu is op het interval $]a,b[$, maar $a \notin \operatorname{dom} f$ en $b \notin \operatorname{dom} f$, dan definieert men de *oneigenlijke integraal* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ als:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (c \in]a,b[).$$

Deze is convergent indien zowel $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ en $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ convergent zijn. In dat geval kan men aantonen dat waarde van $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ niet afhangt van de keuze van c.

1.6 Toepassingen in de economie

1.6.1 Consumenten- en producentensurplus

Zij $p = V(q)$ de vraagfunctie en $p = A(q)$ de aanbodsfunctie van een bepaald goed. Het snijpunt van hun grafieken bepaalt de marktevenwichtsprijs p^* en marktevenwichtshoeveelheid q^*.

Een consument die bereid is om een hoeveelheid te kopen aan een prijs $p > p^*$ doet een (virtuele) besparing van $p - p^*$ per eenheid. De totale besparing (van alle consumenten) bij de aanschaf van q^* stuks van het goed noemt men het *consumentensurplus.* Dit kan als volgt berekend worden. Eerst worden de consumenten gerangschikt volgens dalende bereidheid tot betalen voor dat goed. De besparing bij aanschaf van het eerste stuk is dan $V(0) - p^*$, het tweede stuk $V(1) - p^*$, het derde $V(2) - p^*$, ..., en tenslotte het q^*-de $V(q^* - 1) - p^*$. In het totaal hebben we dan

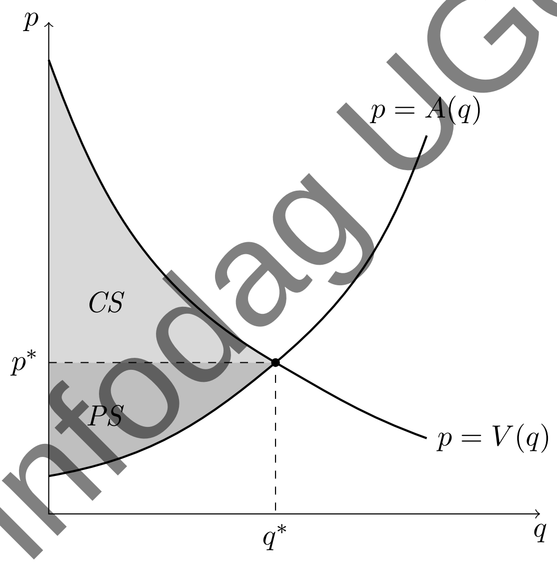
$$\sum_{i=0}^{q^*-1} (V(i) - p^*) = \sum_{i=0}^{q^*-1} V(i) - q^* p^*$$

aan besparingen, wat bij benadering overeenkomt met de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de vraagfunctie en de horizontale rechte $p = p^*$, en boven het interval $[0, q^*]$ (zie figuur 1.4). Gebruikmakend van de bepaalde integraal en van de notatie CS voor het consumentensurplus, hanteert men de volgende formule

$$CS = \int_0^{q^*} \big(V(q) - p^*\big)\ \mathrm{d}q = \int_0^{q^*} V(q)\ \mathrm{d}q - q^* p^*.$$

Laten we nu de situatie bekijken vanuit het standpunt van de producent. Indien een producent bereid is het goed te produceren aan een prijs p onder de marktevenwichtsprijs p^*, haalt deze daar een besparing uit van $p^* - p$ per eenheid. De totale besparing (door alle producenten) bij het aanbieden van q^* eenheden van het goed op de markt wordt het *producentensurplus* genoemd (Notatie: PS). Een analoge redenering als bij het consumentensurplus leert ons dat het PS bij benadering gelijk is aan de oppervlakte van het gebied tussen de aanbodsfunctie en de rechte $p = p^*$, en boven het interval $[0, q^*]$ (zie figuur 1.4). In formulevorm:

$$PS = \int_0^{q^*} \big(p^* - A(q)\big)\ \mathrm{d}q = q^* p^* - \int_0^{q^*} A(q)\ \mathrm{d}q.$$



Figuur 1.4: Consumenten- en producentensurplus als oppervlakte.

Voorbeeld

Gegeven de vraagfunctie $p = \frac{6000}{q+50}$ en aanbodsfunctie $p = q + 10$. Bepaal het marktevenwicht, alsook het consumenten- en producentensurplus.

Oplossing. De marktevenwichtshoeveelheid q^* voldoet aan de vergelijking

$$\frac{6000}{q^* + 50} = q^* + 10,$$

met als oplossing $q^* = 50$ (De andere oplossing, -110, is negatief.). Bijgevolg is $p^* = \frac{6000}{q^*+50} = q^* + 10 = 60$. Verder hebben we

$$
\begin{aligned}
CS = \int_0^{50} (V(q) - 60)\ \mathrm{d}q = \int_0^{50} \left(\frac{6000}{q+50} - 60 \right)\ \mathrm{d}q = [6000 \ln |q+50| - 60q]_0^{50} \\
= 6000 \ln 100 - 3000 - 6000 \ln 50 = 6000 \ln 2 - 3000,
\end{aligned}
$$

en

$$
\begin{aligned}
PS = \int_0^{50} (60 - A(q))\ \mathrm{d}q = \int_0^{50} (60 - (q+10))\ \mathrm{d}q = \int_0^{50} (50 - q)\ \mathrm{d}q \\
= \left[50q - \frac{1}{2} q^2 \right]_0^{50} = 1250.
\end{aligned}
$$

◀

1.6.2 De Gini-index van de inkomensverdeling

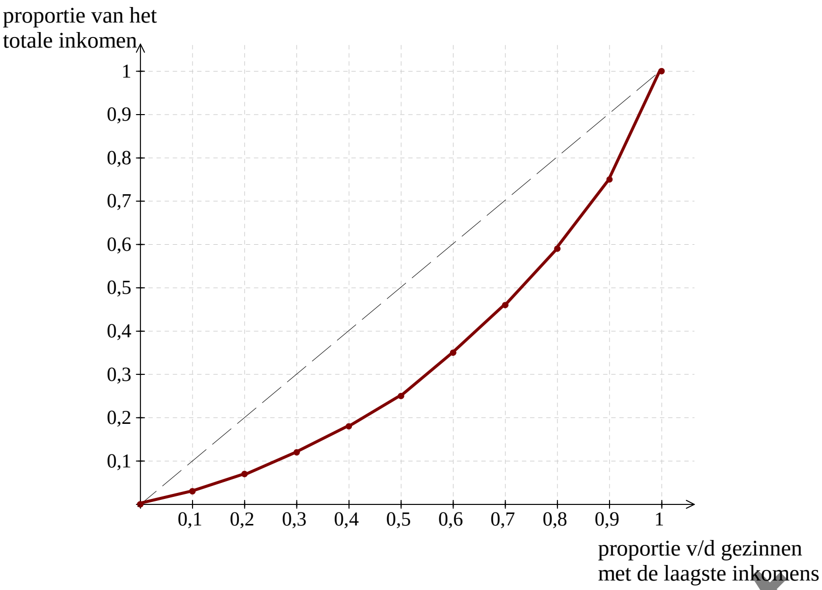
In elke samenleving heb je mensen die meer geld verdienen dan anderen. Om deze 'kloof' tussen de rijken en armen te meten, berekenen economisten de percentages van het totale inkomen die terechtkomen bij achtereenvolgens de 10%, 20%, ... van de bevolking met de laagste inkomens.

Als voorbeeld beschouwen we een gemeente, waar van 10000 gezinnen de gezinsinkomens bepaald zijn. Na het plaatsen van de gezinnen op volgorde van inkomen, ontstaat volgende tabel:

% van de gezinnen	% van het totale inkomen
laagste 10	3
20	7
30	12
40	18
50	25
60	35
70	46
80	59
90	75
100	100

Bijvoorbeeld, de 20% van de gezinnen met de laagste inkomens verdienen gezamenlijk slechts 7% van het totale inkomen, de 40% met de laagste inkomens slechts 18% van het totale inkomen enzovoort. De tabel wordt grafisch voorgesteld in figuur 1.5, waarbij de percentages door hun equivalente waarden in het interval $[0, 1]$ (='proporties') worden weergegeven. De kromme die hierbij ontstaat heet *Lorentzcurve*[1].

[1]genaamd naar de statisticus M. O. Lorentz.



Figuur 1.5: Lorentzcurve van de inkomensverdeling.

Definitie

Zij $L(x)$ de proportie van het totale inkomen, verdiend door de proportie x van de populatie met de laagste inkomens. Dan heet de grafiek van de functie $y = L(x)$ de *Lorentzcurve* van de bijbehorende inkomensverdeling.

Als bij een onderzochte inkomensverdeling volstrekte gelijkheid van inkomens zou gelden, dan zou de Lorentzcurve precies samenvallen met de eerste bissectrice, of nog, $L(x) = x$ voor elke $x \in [0, 1]$. Naarmate de ongelijkheid tussen de inkomens toeneemt, zal de Lorentzcurve dieper 'doorzakken'. De oppervlakte tussen de eerste bissectrice $y = x$ en de Lorentzcurve $y = L(x)$ wordt gebruikt als maatstaf voor de ongelijkheid. Aangezien deze oppervlakte ten hoogste $\frac{1}{2}$ kan bedragen (de oppervlakte van de driehoek onder de rechte $y = x$ en boven het interval $[0, 1]$), vermenigvuldigen economisten de oppervlakte nog met 2 om een getal tussen 0 en 1 te bekomen. Zo ontstaat de *Gini*[2]*-index*.

Definitie

Voor een Lorentzcurve $y = L(x)$ definieert men de *Gini-index* als

$$\text{Gini-index} = 2\left(\frac{1}{2} - \int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x\right) = 1 - 2\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x.$$

De Gini-index varieert van 0 (absolute gelijkheid van inkomens) tot 1 (absolute ongelijkheid van inkomens).

[2]genoemd naar de Italiaanse statisticus C. Gini

Voorbeeld

Bereken de Gini-index bij de Lorentzcurve $L(x) = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x^3$.

Oplossing. We bepalen eerst de oppervlakte onder de Lorentzcurve en boven het interval $[0, 1]$:

$$\int_0^1 L(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x^3\right)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{5}x^4\right]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

De oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y = x$ en de Lorentzcurve is dan $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$. Het dubbele hiervan levert de Gini-index:

$$\text{Gini-index} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$ ◀

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijkingen

2.1 Basisbegrippen

In dit hoofdstuk beschouwen we een vergelijkingen van de vorm

$$y' = f(x, y) \quad \text{of nog,} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y).$$

Hierbij stelt $y = y(x)$ een onbekende functie van x voor en $f(x, y)$ een gegeven uitdrukking waarin x en/of y in voorkomt. Het doel is het functievoorschrift van y te achterhalen, waarvoor de vergelijking opgaat. Zo'n vergelijking heet een *differentiaalvergelijking van de eerste orde* omdat er afgeleiden of differentialen van de eerste orde voorkomen van de te zoeken functie en geen afgeleiden of differentialen van een hogere orde.

Voorbeelden

- $y' = x^2 y$
  Dit is een differentiaalvergelijking van de eerste orde met $f(x, y) = x^2 y$.
- $yy' + 3xy^2 = \sin x$
  Na deling[1] van beiden leden door y, zien we dat deze vergelijking equivalent is met $y' + 3xy = \frac{\sin x}{y}$.
  Hier hebben we dus een differentiaalvergelijking van de eerste orde met
  $f(x, y) = \frac{\sin x}{y} - 3xy$.
- $y'' + y'y = e^x$
  Dit is een differentiaalvergelijking van de tweede orde, omdat de hoogst voorkomende orde van afleiden gelijk is aan twee.
- $y^2 + x^3 y = \tan x$
  Dit is geen differentiaalvergelijking, omdat er geen afgeleide van een functie in voorkomt.
- $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} = a - bq \quad (a, b \in \mathbb{R})$
  Dit is een differentiaalvergelijking van de eerste orde, waarin men de functie $K = K(q)$ zoekt.

[1] We kunnen veilig onderstellen dat y verschilt van de constante functie 0. Immers, $0 \cdot 0' + 3x0^2 = 0 \neq \sin x$. De vergelijking gaat dus niet op voor de constante functie 0.

Onder *oplossing* van een differentiaalvergelijking verstaan we een afleidbare functie $y = y^*(x)$, waarvoor de gegeven differentiaalvergelijking opgaat.

Vaak heeft een differentiaalvergelijking meerdere (soms oneindig veel) oplossingen. Desgevallend treft men in het functievoorschrift van deze oplossingen een willekeurige constante aan. In feite hebben we dan een familie van functies die allen een oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking bepalen. Deze familie van functies noemt men de *algemene oplossing* van de differentiaalvergelijking.

Wanneer men in de algemene oplossing aan de optredende willekeurige constante een waarde toekent, dan bekomen we één oplossingsexemplaar uit de familie, die we *particuliere oplossing* noemen. De algemene oplossing is dus de verzameling van alle particuliere oplossingen.

Tenslotte gebeurt het dat een differentiaalvergelijking een oplossing bezit die niet thuishoort in de algemene oplossing. Zo'n oplossing noemt men *singuliere oplossing*.

<u>Voorbeeld</u>

Gegeven de differentiaalvergelijking van de eerste orde $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 1$.

De algemene oplossing wordt gegeven door

$$y = \frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$$

omdat het een willekeurige constante (nl. C) bevat en omdat

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}\right)' \\ &= \frac{2Ce^{2x}(1 - Ce^{2x}) - (1 + Ce^{2x})(-2Ce^{2x})}{(1 - Ce^{2x})^2} \\ &= \frac{4Ce^{2x}}{(1 - Ce^{2x})^2} \quad \text{(Reken na!)}\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}y^2 - 1 &= \left(\frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{(1 + Ce^{2x})^2}{(1 - Ce^{2x})^2} - 1 \\ &= \frac{(1 + Ce^{2x})^2 - (1 - Ce^{2x})^2}{(1 - Ce^{2x})^2} \\ &= \frac{4Ce^{2x}}{(1 - Ce^{2x})^2} \quad \text{(Reken na!)}\end{aligned}$$

zodat $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 1$.

Het is gemakkelijk in te zien dat de constante functies $y = 1$ en $y = -1$ ook oplossingen zijn. Immers

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (\pm 1)' = 0 \quad \text{en} \quad y^2 - 1 = (\pm 1)^2 - 1 = 0$$

zodat de differentiaalvergelijking opgaat voor deze twee functies.

Aangezien men de functie $y = 1$ kan terugvinden onder de algemene oplossing (Voor welke waarde van C?), is $y = 1$ een particuliere oplossing. De functie $y = -1$ maakt echter geen deel uit van de algemene oplossing. Er kan nooit een waarde van C gevonden worden zodat

$$\frac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}} = -1.$$

(Toon dit aan door deze vergelijking op te lossen naar C.) De constante functie $y = -1$ is derhalve een singuliere oplossing.

We bespreken nu enkele oplossingsmethoden van differentiaalvergelijkingen, afhankelijk van de vorm die $f(x, y)$ aanneemt. In deze cursus beperken we ons tot de gevallen $f(x, y) =$ (functie van x) $\times$ (functie van y).

2.2 Directe integratie

In deze sectie beschouwen we differentiaalvergelijkingen die herleidbaar zijn tot de vorm

$$y' = f(x).$$

De oplossing ervan kan gevonden worden door *directe integratie*. We moeten dus de functies $y = y(x)$ zoeken, die als afgeleide de gegeven functie f hebben. De algemene oplossing bestaat dus uit alle mogelijke primitieven van f of nog, de algemene oplossing is de onbepaalde integraal van f:

$$y(x) = \int f(x)\ \mathrm{d}x$$

<u>Voorbeelden</u>

- Gegeven de differentiaalvergelijking $y' = x^2 + 3\sin 4x$.
  De algemene oplossing is:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (x^2 + 3\sin 4x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int x^2\ \mathrm{d}x + 3\int \sin 4x\ \mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{3}\,x^3 + \tfrac{3}{4}\int \sin t\ \mathrm{d}t \quad (\text{subst. } t = 4x) \\ &= \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{3}{4}\cos t + C \\ &= \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{3}{4}\cos 4x + C. \end{aligned}$$

- Gegeven de differentiaalvergelijking $y' = \sqrt[3]{x^4}$.
  Algemene oplossing:

$$y(x) = \int \sqrt[3]{x^4}\ \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int x^{4/3}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{x^{7/3}}{7/3} + C \\
&= \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + C.
\end{aligned}
$$

2.3 Separabele differentiaalvergelijkingen

Een *separabele* differentiaalvergelijking van de eerste orde is een differentiaalvergelijking die te herleiden is tot de gedaante

$$y' = f(x)g(y)$$

met als rechterlid een product van twee factoren, waarvan de één uitsluitend afhankelijk is van x en de andere uitsluitend van y.

De oplossingsmethode bestaat uit de volgende stappen:

Oplossingsmethode

Stap 1. Vervang, indien nodig, de notatie y' door haar differentiaalnotatie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. De op te lossen vergelijking is dan

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Stap 2. Vorm deze vergelijking algebraïsch zó om dat alle y's in één lid en de x in het andere lid terecht komen. Dit proces heet *scheiding van de veranderlijken.* We krijgen dus formeel (waarbij de differentiaalnotatie $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als een quotiënt behandeld wordt):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\ \mathrm{d}x,$$

mits $g(y) \neq 0$. Het geval $g(y) = 0$ dient apart onderzocht te worden en levert mogelijks singuliere oplossingen op.

Stap 3. Ga over tot integratie van beide leden van de vergelijking met gescheiden variabelen uit de vorige stap. Na integratie kan dan hieruit het functievoorschrift van de algemene oplossing bepaald worden.

Laten we dit illustreren aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$y' = y^2 + 1$

Oplossing. Hier is $f(x) = 1$ en $g(y) = y^2 + 1$. Eerst voeren we de differentiaalnotatie voor de afgeleide in:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 1.$$

Vermits $y^2 + 1 \neq 0$, vinden we door scheiding van de veranderlijken

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \mathrm{d}x.$$

Integratie van beide leden van de gescheiden vergelijking levert:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int \mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Bgtan} y + C_1 = x + C_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Bgtan} y = x + C \quad (\text{met } C = C_2 - C_1) \\ &\Leftrightarrow \quad y = \tan(x + C) \quad (\text{met } x + C \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[) \end{aligned}$$

◀

Opmerking

Wanneer beide leden van een gescheiden vergelijking geïntegreerd worden, dan is men in principe verplicht om in beide leden een constante te schrijven. Echter kan men één van deze constanten altijd naar het andere lid overbrengen, zodat er in feite maar één constante overblijft (zie vorig voorbeeld).

Omwille van deze reden noteren we voortaan slechts één integratieconstante in één lid van de geïntegreerde vergelijking.

Voorbeeld 2

$y' = y$

Oplossing. Na invoeren van de differentiaalnotatie, krijgen we

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

Scheiding van de veranderlijken:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x,$$

op voorwaarde dat $y \neq 0$.

We behandelen eerst het geval $y = 0$ apart. Als $y = 0$, dan zien we gemakkelijk dat dit een oplossing is: Immers $0' = 0$, zodat de gegeven differentiaalvergelijking opgaat voor deze functie.

Vervolgens integreren we beide leden van de gescheiden vergelijking en lossen op:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \ln|y| = x + C \\ &\Leftrightarrow \quad |y| = e^{x+C} = e^C e^x \\ &\Leftrightarrow \quad y = C_1 e^x \quad (\text{met } C_1 = \pm e^C \in \mathbb{R}_0)\end{aligned}$$

Als we echter de willekeurige constante C_1 ook nul laten worden, dan vinden we de apart gevonden oplossing $y = 0$ terug.

Conclusie: de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = y$ is

$$y = Ce^x \quad (C \in \mathbb{R})$$ ◄

<u>Voorbeeld 3</u>

$$y' = 3x^2(y-2)^2$$

Oplossing. Eerst voeren we de differentiaalnotatie voor de afgeleide in:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2(y-2)^2.$$

Scheiding van de veranderlijken:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2(y-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)^2} = 3x^2\ \mathrm{d}x,$$

mits $(y-2)^2 \neq 0$.

We behandelen eerst het geval $(y-2)^2 = 0$ apart. Aangezien

$$(y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2,$$

dienen we te controleren of de constante functie $y = 2$ een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking. Dat dit inderdaad zo is, blijkt uit $2' = 0 = 3x^2 \cdot (2-2)^2$, zodat de gegeven differentiaalvergelijking opgaat voor de functie $y = 2$.

Verder integreren we beide leden van de gescheiden vergelijking en lossen op:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{(y-2)^2} = \int 3x^2\ \mathrm{d}x \quad &\Leftrightarrow \quad \int (y-2)^{-2}\ \mathrm{d}y = x^3 + C \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(y-2)^{-1}}{-1} = x^3 + C \\ &\Leftrightarrow \quad (y-2)^{-1} = -x^3 - C \\ &\Leftrightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{x^3 + C} \\ &\Leftrightarrow \quad y = 2 - \frac{1}{x^3 + C}\end{aligned}$$

Besluit:

- algemene oplossing: $y = 2 - \dfrac{1}{x^3 + C}$ $(C \in \mathbb{R})$
- singuliere oplossing: $y = 2$. ◀

Voorbeeld 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y-1}$$

Oplossing. Scheiding van de veranderlijken:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)\ dy = x^3\ dx.$$

Merk op dat er geen aparte gevallen onderzocht moeten worden, want bij het scheiden hebben we nergens door nul gedeeld.

Integratie van beide leden van de gescheiden vergelijking levert:

$$\begin{aligned}
\int (y-1)\ dy = \int x^3\ dx \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(y-1)^2 = \tfrac{1}{4}x^4 + C \\
&\Leftrightarrow \quad (y-1)^2 = \tfrac{1}{2}x^4 + C_1 \quad (\text{met } C_1 = 2C \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \quad y - 1 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}x^4 + C_1} \\
&\Leftrightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}x^4 + C_1}
\end{aligned}$$

Conclusie: De algemene oplossing is

$$y = 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}x^4 + C} \quad \text{of} \quad y = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}x^4 + C} \quad (C \in \mathbb{R})$$ ◀

Voorbeeld 5

$$y' = \frac{3-y}{x}$$

Oplossing. Invoeren van de differentiaalnotatie voor de afgeleide en scheiding van de variabelen levert:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{3-y} = \frac{dx}{x},$$

mits $3 - y \neq 0$. Uit het geval $3 - y = 0$ komt een oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking voort, nl. de constante functie $y = 3$ (Controleer dit!).

Vervolgens wordt de gescheiden vergelijking lid-aan-lid geïntegreerd:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{3-y} = \int \frac{dx}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad -\ln|3-y| = \ln|x| + C \\
&\Leftrightarrow \quad -\ln|3-y| - \ln|x| = C \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|3-y| + \ln|x| = -C \\
&\Leftrightarrow \quad \ln|(3-y)x| = -C \quad (\ln A + \ln B = \ln AB)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad |(3-y)x| = e^{-C} \\
&\Leftrightarrow \quad (3-y)x = C_1 \quad (\text{met } C_1 = \pm e^{-C} \in \mathbb{R}_0) \\
&\Leftrightarrow \quad 3-y = \frac{C_1}{x} \\
&\Leftrightarrow \quad y = 3 - \frac{C_1}{x}
\end{aligned}$$

Kennen we ook de waarde nul aan voor de constante C_1, vinden we de eerder gevonden oplossing $y = 3$ terug. De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking kan dus in één formule geschreven worden, nl.

$$y = 3 - \frac{C}{x} \quad (C \in \mathbb{R})$$ ◀

2.4 Randvoorwaardeproblemen

Bij het onderzoeken van concrete problemen met differentiaalvergelijkingen is men meestal niet geïnteresseerd in de algemene oplossing, maar in (een) welbepaalde particuliere oplossing(en). Bijvoorbeeld, wil men de prijs op een zeker tijdstip bepalen van een bepaald goed, dan aanvaardt niemand een oplossing waarin een willekeurige constante C voorkomt.

Om nu deze particuliere oplossing te kunnen bepalen, zijn extra voorwaarden nodig die men *randvoorwaarden*[2] noemt. Bij differentiaalvergelijkingen van orde 1 volstaat één enkele randvoorwaarde om de willekeurige constante te kunnen vastleggen.

<u>Voorbeelden</u>

- $y' = 3x^2(y-2)^2 \quad \text{en} \quad y(0) = 3$

  In paragraaf 2.3 hebben we de algemene en singuliere oplossingen van deze differentiaalvergelijking bepaald.

  De singuliere oplossing $y = 2$ voldoet duidelijk niet aan de randvoorwaarde.

  Leggen we de randvoorwaarde op aan de algemene oplossing $y = 2 - \frac{1}{x^3+C}$, dan

  $$3 = 2 - \frac{1}{0^3 + C} \quad \Leftrightarrow \quad C = -1.$$

  De enige oplossing van dit randvoorwaardeprobleem is de functie

  $$y = 2 - \frac{1}{x^3 - 1}.$$

- $y' = y^{1/3} \quad \text{en} \quad y(0) = 0$

  Ga als oefening zelf na dat de algemene oplossing gegeven wordt door $y = \pm\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{3/2}$ en de singuliere oplossing door $y = 0$.

[2]Wanneer de onafhankelijke variabele de tijd voorstelt, spreekt men van “beginvoorwaarde” i.p.v. “randvoorwaarde”.

Deze singuliere oplossing voldoet alvast aan de randvoorwaarde. Passen we verder de randvoorwaarde toe op de algemene oplossing, dan vinden we

$$0 = \pm (0 + C)^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

In dit geval heeft het randvoorwaardeprobleem dus drie oplossingen:

$$y = \left(\tfrac{2}{3}\,x\right)^{3/2} \quad \text{of} \quad y = -\left(\tfrac{2}{3}\,x\right)^{3/2} \quad \text{of} \quad y = 0.$$

2.5 Toepassing: groeiwetten

In deze paragraaf behandelen we enkele belangrijke toepassingen van differentiaalvergelijkingen in de economische groeitheorie. De onafhankelijke variabele stelt hier de tijd voor en wordt dan ook genoteerd met t (i.p.v. x).

2.5.1 Exponentiële groei

Laat $y(t)$ een economische grootheid zijn (zoals het BNP, bijvoorbeeld). Indien de functie y differentieerbaar is, dan heet de verhouding $y'(t)/y(t)$ de *relatieve snelheid van verandering* van de grootheid in kwestie.

Verscheidene economische modellen gaan van de hypothese uit dat de relatieve snelheid van verandering (bij benadering) constant is, m.a.w.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = a \quad \text{of nog,} \quad y'(t) = a\,y(t) \tag{2.1}$$

waarbij de constante a de *groeivoet* heet. Men zegt dat de grootheid $y(t)$ de *wet van de exponentiële groei* volgt indien ze voldoet aan de differentiaalvergelijking (2.1).

Deze differentiaalvergelijking kunnen we oplossen met de methode van de scheiding der variabelen:

$$\begin{aligned}
y' = a\,y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\,y \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = a\ \mathrm{d}t \quad \text{of} \quad y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = a \int \mathrm{d}t \quad \text{of} \quad y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln y = at + C \quad \text{of} \quad y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y = e^{at+C} = e^C e^{rt} = C_1 e^{at} \quad (C_1 = e^C \in \mathbb{R}_0^+) \\
&\qquad\quad \text{of} \quad y = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y = Ce^{at} \quad (C \in \mathbb{R}^+)
\end{aligned}$$

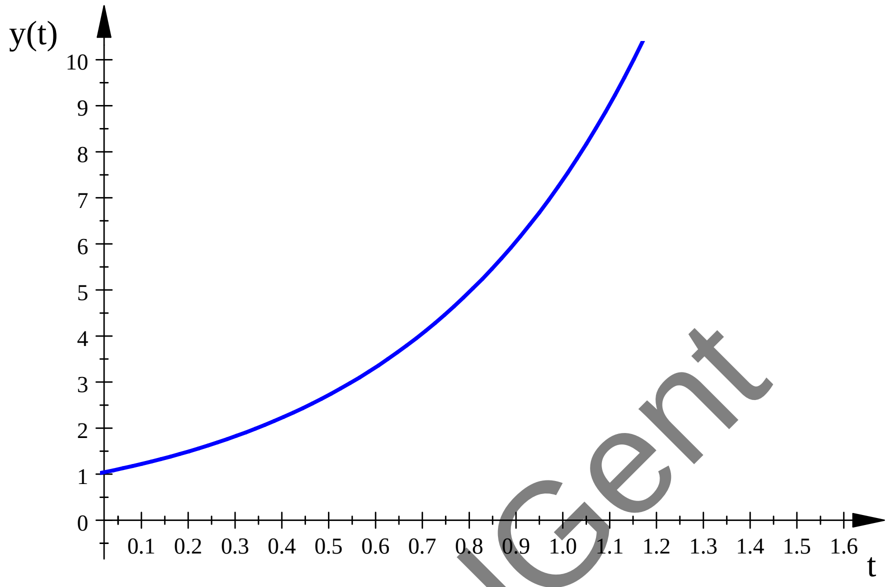
Is verder ook nog een beginvoorwaarde opgelegd, nl. $y(0) = y_0$, waarbij y_0 een gekende waarde van de economische grootheid op tijdstip $t = 0$ voorstelt, dan kunnen we de constante C bepalen:

$$y_0 = y(0) = C\,\underbrace{e^{a\cdot 0}}_{=1} \quad \Leftrightarrow \quad C = y_0$$

De unieke oplossing van het beginvoorwaardeprobleem is dan:

$$y(t) = y_0 e^{at}.$$

De beschouwde economische grootheid zal exponentieel toenemen als $a > 0$ en exponentieel afnemen als $a < 0$.



Figuur 2.1: Exponentiële groei ($y_0 = 1$ en $a = 2$)

2.5.2 Begrensde groei

Wanneer een nieuwsbulletin herhaaldelijk uitgezonden wordt over de radio en televisie, zal het nieuws zich eerst snel verspreiden, maar daarna trager wanneer de meeste mensen het bericht al gehoord hebben. Dit fenomeen willen we beschrijven met een differentiaalvergelijking.

Laat N de populatiegrootte van bvb. een stad voorstellen, en $y(t)$ het aantal personen die het uitgezonden bericht gehoord hebben op tijdstip t. Aanvankelijk is niemand op de hoogte: $y(0) = 0$. Bij dit probleem vertrekken sociologen vaak van de hypothese dat $y(t)$ (het aantal geïnformeerden) toeneemt met een snelheid die recht evenredig is met het aantal nog niet geïnformeerden op tijdstip t. Anders gezegd, de functie y voldoet aan het beginvoorwaardeprobleem

$$y' = a\ (N - y) \quad \text{met } y(0) = 0, \tag{2.2}$$

met $a \in \mathbb{R}_0^+$ een evenredigheidsconstante (die afhangt van de karakteristieken van de populatie). Men zegt dat een functie die voldoet aan een differentiaalvergelijking van het hierboven beschreven type, gehoorzaamt aan de *wet van de begrensde groei*. Waarom deze groei nu precies 'begrensd' is, volgt uit de oplossing van het randvoorwaardeprobleem.

Deze oplossing wordt gevonden met de methode van de scheiding van variabelen:

$$y' = a\ (N - y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\ (N - y)$$