
Wiskunde

Prof. Dr. Chris Cornelis

academiejaar 2020-2021



UNIVERSITEIT
GENT

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	3
1 Reële functies	7
1.1 Basisbegrippen	8
1.1.1 Functie en functievoorschrift	8
1.1.2 Definitiegebied en beeld	8
1.1.3 Grafische voorstelling van een functie	9
1.1.4 Samenstelling van functies	9
1.1.5 Stijgen en dalen	10
1.1.6 Minima, maxima en nulpunten	11
1.1.7 Even, oneven en periodieke functies	12
1.1.8 De inverse van een functie	14
1.2 Veeltermfuncties	14
1.3 Rationale functies	16
1.4 Machtsfuncties	18
1.5 Exponentiële functies	18
1.6 Modelleren van groei	21
1.6.1 Exponentiële groei	21
1.6.2 Logistische groei	23
1.6.3 Gompertz groei	24
1.6.4 Monod groei	26
1.7 Logaritmische functies	27
1.7.1 Definitie van logaritmische functie	27
1.7.2 Verdubbelingstijd en halfwaardetijd	27
1.7.3 Exponentiële functies geherdefinieerd	30
1.7.4 Overgang tussen logaritmestelsels met verschillende basissen	30
1.8 Logaritmische schaal	30
1.8.1 Enkelvoudig logaritmisch assenstelsel: semi-log grafiek	31
1.8.2 Dubbellogaritmisch assenstelsel: log-log grafiek	32
1.9 Goniometrische en cyclometrische functies	33
1.9.1 Goniometrische functies	33
1.9.2 Cyclometrische functies	35
1.10 Modelleren van periodieke verschijnselen	37
1.10.1 Stuksgewijs lineaire functies	37
1.10.2 De sinusöide	37
1.10.3 Gedempt oscillerende functies	40

2	Limieten en continuïteit	43
2.1	De limiet van een functie in een punt	44
2.2	De limiet van een functie op $+\infty$ en $-\infty$	46
2.3	Linker- en rechterlimieten	49
2.4	Limieten van veeltermfuncties	50
2.5	Praktische rekenregels	51
2.5.1	Rekenregels voor $+\infty$ en $-\infty$	51
2.5.2	Rekenregels voor algebraïsch samengestelde functies	51
2.6	Sandwich- en kettingregel voor limieten	57
2.7	Limieten van rationale functies	59
2.7.1	Rekenregels	59
2.7.2	Limietonderzoek van de groeifunctie van Monod	62
2.8	Limieten van exponentiële en logaritmische functies	62
2.8.1	Rekenregels	62
2.8.2	Limietonderzoek van de exponentiële groeifunctie	62
2.8.3	Limietonderzoek van de logistische groeifunctie	64
2.9	Limieten van goniometrische functies	65
2.10	Continuïteit	67
3	Afgeleiden	71
3.1	Definitie en meetkundige interpretatie	72
3.2	Afgeleiden van enkele elementaire functies	75
3.3	Praktische rekenregels	77
3.4	De kettingregel voor afgeleiden	80
3.5	Afgeleiden van inverse functies	81
3.6	Grondstellingen en functieverloop	83
3.6.1	Grondstellingen	83
3.6.2	Afgeleide van de tweede orde	87
3.7	De regel van de l'Hospital	90
4	Differentievergelijkingen en discrete modellen	93
4.1	Wiskundige modellering	94
4.2	Rijen	95
4.2.1	Definities	95
4.2.2	Limiet en convergentie van een rij	97
4.3	Reeksen	100
4.4	Differentievergelijkingen	103
4.4.1	Definities	103
4.4.2	Evenwichtspunten	105
4.4.3	Spinnenwebmethode	106
4.5	Lineaire differentievergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten	107
4.5.1	Algemene oplossing	107
4.5.2	Discrete Malthusiaanse groei	109
4.5.3	Stabiliteitsonderzoek	110
4.6	Niet-lineaire differentievergelijkingen van eerste orde	111
4.7	Logistische iteratieve processen	114
4.8	Lineaire differentievergelijkingen van tweede orde	117

4.9	Het populatiemodel van Fibonacci	122
4.10	Matrices	123
4.10.1	Definities	123
4.10.2	Bewerkingen met matrices	124
4.10.3	Determinant van een vierkante matrix	127
4.10.4	Rang van een matrix	129
4.11	Stelsels lineaire vergelijkingen	130
4.11.1	Oplosbaarheidscriteria	130
4.11.2	Het balanceren van reactievergelijkingen	132
4.12	Eigenwaarden en eigenvectoren van een vierkante matrix	133
4.13	Stelsels lineaire differentievergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten	135
4.13.1	Evenwichtspunten	135
4.13.2	A.O. van een stelsel homogene lineaire differentievergelijkingen	137
4.13.3	Stabiliteit	137
4.13.4	A.O. van een stelsel niet-homogene lineaire differentievergelijkingen	138
4.14	Lineaire roofdier-prooi-modellen	138
4.15	Het Leslie-groeimodel	142
5	Integralen	145
5.1	Primitieve functies	146
5.2	Onbepaalde integraal van een functie	147
5.3	Bepaalde integralen	148
5.4	Methoden voor het berekenen van integralen	150
5.4.1	Lineariteit t.o.v. het integrandum	150
5.4.2	Partiële integratie	151
5.4.3	Substitutiemethode	153
5.4.4	Splitsen in partieelbreuken	154
5.5	Meetkundige betekenis	157
5.6	Oneigenlijke integralen	159
5.7	Gemiddelde functiewaarde	161
6	Differentiaalvergelijkingen en continue modellen	163
6.1	Definities	164
6.2	Methode van scheiding van veranderlijken	165
6.3	Lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde	166
6.4	Lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten	169
6.4.1	Evenwichtspunten	169
6.4.2	Stabiliteit	170
6.4.3	Exponentiële groei	170
6.5	Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde	172
6.6	Lineaire differentiaalvergelijkingen van tweede orde met constante coëfficiënten	175
6.7	Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten	178
6.7.1	Evenwichtspunten	178
6.7.2	A.O. van een stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen	179
6.7.3	Stabiliteit	180
6.7.4	A.O. van een stelsel niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen	181
6.8	Het fasevlak	182

6.9	Het continue lineaire roofdier-prooi model	189
6.10	Stelsels niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde	192
6.11	Het Lotka-Volterra roofdier-prooi model	193
6.12	De Brusselator	197
6.13	Het SIR epidemiologisch model	200
6.14	Modellering van virale blips	203

Hoofdstuk 6

Differentiaalvergelijkingen en continue modellen

Differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen waarin één of meerdere afgeleiden van een functie optreden. In Hoofdstuk 4 zagen we dat de afgeleide van een functie de ogenblikkelijke verandering van die functie uitdrukt. In de natuurwetenschappen komen wetmatigheden voor die de verandering van een grootte relateren aan de toestand waarin een systeem zich bevindt. Zo'n wetmatigheden worden op natuurlijke wijze wiskundig uitgedrukt in de vorm van differentiaalvergelijkingen.

Differentiaalvergelijkingen zijn zo belangrijk voor het modelleren van natuurwetenschappelijke fenomenen dat er in de wiskunde reeds heel veel aandacht aan geschonken is. Aangezien het oplossen van differentiaalvergelijkingen impliceert dat we met beperkte kennis over de afgeleiden van eerste en/of hogere orde van een functie, die functie zelf willen heropbouwen, ligt het voor de hand dat de onbepaalde integraal, die als de inverse van de afgeleide kan beschouwd worden, een belangrijke rol speelt. Zo kan inderdaad elke lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde opgelost worden met behulp van onbepaalde integralen. We zullen bijgevolg gretig gebruik maken van de technieken die in Hoofdstuk 5 werden aangeleerd. Toch zijn niet alle differentiaalvergelijkingen oplosbaar, in de zin dat de gezochte functie zou kunnen uitgedrukt worden met de elementaire functies die we in Hoofdstuk 1 hebben geïntroduceerd. In de praktijk zal men dan dikwijls zijn toevlucht moeten nemen tot numerieke methoden teneinde met computers benaderende oplossingen te genereren.

We vangen dit hoofdstuk aan met een oplossingsmethode voor een eenvoudig maar niettemin veel voorkomend type van differentiaalvergelijkingen. Vervolgens tonen we hoe lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde kunnen opgelost worden. Andere types lineaire en niet-lineaire differentiaalvergelijkingen en stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen komen eveneens aan bod. In modellen die gesteund zijn op differentiaalvergelijkingen is men vooral geïnteresseerd in het gedrag van de gezochte functie op oneindig; men wil o.a. weten of het systeem al of niet naar een stabiele toestand evolueert. We besteden dan ook bijzondere aandacht aan het stabiliteitsconcept.

We passen de oplossingsmethodes voor differentiaalvergelijkingen toe om enkele continue modellen uit de biomedische wetenschappen te bespreken, zoals exponentiële groei, logistische groei, lineaire roofdier-prooi-modellen, het niet-lineaire Lotka-Volterra roofdier-prooi-model en het epidemiologisch SIR-model. We belichten ook de overeenkomsten en verschillen met de discrete modellen uit Hoofdstuk 3.

6.1 Definities

Een *differentiaalvergelijking* is een vergelijking waarin één of meerdere afgeleiden van een functie optreden. De *orde* van een differentiaalvergelijking is gelijk aan de hoogste orde van de er in voorkomende afgeleiden. Een oplossing van een differentiaalvergelijking is een functie die aan de vergelijking voldoet.

Voorbeeld 6.1 Voorbeelden van differentiaalvergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)^2, \\ f'(x) - 3f(x) &= x, \\ f''(x) + 2f'(x) - 3f(x) &= 0. \end{aligned}$$

De eerste twee vergelijkingen zijn van de eerste orde; de laatste vergelijking is van de tweede orde. □

Voorbeeld 6.2 Een puntmassa die onderworpen wordt aan een constante versnelling a voldoet aan de vergelijking:

$$f''(t) = a,$$

waarbij t de tijd voorstelt. Dit is een voorbeeld van een differentiaalvergelijking van de tweede orde. Integratie levert de uitdrukking voor de snelheid $f'(t)$:

$$f'(t) = at + v_0,$$

waarbij v_0 de beginsnelheid op het tijdstip $t = 0$ is. Verdere integratie levert de uitdrukking voor de afgelegde weg $f(t)$:

$$f(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0.$$

Hierbij is s_0 de startpositie op tijdstip $t = 0$. De laatste uitdrukking is de algemene vorm van de functie f die voldoet aan de differentiaalvergelijking $f''(t) = a$. Behalve de constante a staan in deze algemene oplossing twee vrije parameters v_0 en s_0 , die ook de *integratieconstanten* worden genoemd. Het is de A.O. van de differentiaalvergelijking. Kiest men voor de integratieconstanten v_0 en s_0 specifieke waarden, dan vindt men de P.O. van de differentiaalvergelijking behorend bij die specifieke waarden. □

Bij differentiaalvergelijkingen is het aantal *vrijheidsgraden* of het aantal *integratieconstanten* in de algemene oplossing (A.O.) steeds gelijk aan de orde van de differentiaalvergelijking. Aan deze integratieconstanten kunnen onbeperkt veel verschillende waarden worden toegekend, wat wil zeggen dat de differentiaalvergelijking oneindig veel oplossingen heeft.

Een particuliere oplossing (P.O.) van de differentiaalvergelijking ontstaat door in de A.O. een specifieke keuze te maken voor de integratieconstanten. Dit gebeurt normaal gezien door het opleggen van voorwaarden. Wanneer deze voorwaarden in één punt (vaak het beginpunt genoemd) opgelegd worden, dan spreekt men van *beginvoorwaarden*. De differentiaalvergelijking vormt samen met de beginvoorwaarden een zogenaamd *beginwaardeprobleem* (initial value problem).

6.2 Methode van scheiding van veranderlijken

We bestuderen eerst differentiaalvergelijkingen van de eerste orde die onder de vorm

$$f'(x) = \varphi(x) \cdot \psi(f(x)),$$

gebracht kunnen worden, d.w.z. dat de vergelijking zodanig kan geschreven worden dat het linkerlid $f'(x)$ is en het rechterlid het product is van twee factoren waarin de veranderlijken x en $f(x)$ *gescheiden* voorkomen. In de context van differentiaalvergelijkingen noteert men $f(x)$ soms kortweg als y en $f'(x)$ als $\frac{dy}{dx}$. Op die manier hebben we

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y).$$

We kunnen de veranderlijken x en y lidgewijs scheiden — vandaar de benaming van deze methode — d.w.z. dat we de bovenstaande vergelijking schrijven als:

$$\frac{1}{\psi(y)} dy = \varphi(x) dx.$$

Vervolgens integreren we beide leden

$$\int \frac{1}{\psi(y)} dy = \int \varphi(x) dx,$$

en lossen de gevonden betrekking op naar y . In deze oplossingsmethode hebben we gedeeld door $\psi(y)$, wat uiteraard enkel mag indien $\psi(y) \neq 0$.

Voorbeeld 6.3 Gevraagd wordt de differentiaalvergelijking

$$f'(x) = 2 - 3f(x),$$

op te lossen met beginvoorwaarde $f(1) = 1$. Na scheiding van de veranderlijken bekomen we

$$\int \frac{dy}{2 - 3y} = \int 1 dx,$$

of

$$-\frac{1}{3} \ln |2 - 3y| = x + C,$$

op voorwaarde dat $y \neq \frac{2}{3}$. Merk echter op dat uit $y = f(x) = \frac{2}{3}$ volgt dat $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$ en dat deze (constante) functie ook een oplossing is van de gegeven differentiaalvergelijking. We noemen ze een *singuliere oplossing* omdat ze niet rechtstreeks met de methode van scheiding van veranderlijken gevonden wordt. Voorts vinden we met deze laatste methode dat

$$\ln |2 - 3y| = -3x - 3C,$$

of nog

$$y = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3} e^{-3C} e^{-3x} = \frac{2}{3} + \bar{C} e^{-3x},$$

met $\bar{C} = \pm \frac{1}{3} e^{-3C} \in \mathbb{R}_0$. Merk op dat we door $\bar{C} = 0$ te stellen de singuliere oplossing $y = \frac{2}{3}$ terugvinden. De A.O. van de differentiaalvergelijking is bijgevolg

$$y = \frac{2}{3} + \bar{C} e^{-3x}$$

met $\bar{C} \in \mathbb{R}$. We maken nu gebruik van de beginvoorwaarde, namelijk dat $y = 1$ als $x = 1$, en bekomen

$$1 = \frac{2}{3} + \bar{C} e^{-3},$$

waaruit volgt dat

$$\bar{C} = \frac{1}{3} e^3.$$

Wanneer we dit invullen in de A.O., vinden we de P.O.

$$y = f(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{3-3x},$$

die de oplossing is van het gestelde beginwaardeprobleem. \square

6.3 Lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde

De meest algemene lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde is van de vorm

$$f'(x) + p(x) f(x) = q(x).$$

Wordt de functie $f(x)$ kortweg genoteerd als y , dan schrijven we deze differentiaalvergelijking in de equivalente vorm

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x).$$

Hierin zijn $p(x)$ en $q(x)$ gegeven functies van x die continu zijn in een open interval $]a, b[$.

We lossen deze differentiaalvergelijking dan ook in het interval $]a, b[$ op. Merk op dat de term in y en de onafhankelijke term mogen ontbreken; de term in $\frac{dy}{dx}$ komt wel altijd voor, zoniet zou de vergelijking geen differentiaalvergelijking meer zijn. Merk ook op dat p en q willekeurige continue functies van x zijn.

Sommige maar niet alle lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde kunnen met de methode van scheiding van veranderlijken opgelost worden. Wanneer scheiding van veranderlijken niet mogelijk is, lossen we de lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde op de volgende standaardmanier op.

We vermenigvuldigen beide leden van de differentiaalvergelijking met een functie $\mu(x) \neq 0$ die zo wordt gekozen dat het linkerlid de afgeleide is van het product $\mu(x)f(x)$. Zo een functie μ noemen we een *integrerende factor*. Dus, μ is een integrerende factor als

$$\mu(x)(f'(x) + p(x) f(x)) = (\mu(x) f(x))',$$

of

$$\mu(x)(f'(x) + p(x) f(x)) = \mu(x) f'(x) + \mu'(x) f(x).$$

We zien dat μ een oplossing moet zijn van de differentiaalvergelijking

$$\mu'(x) = \mu(x)p(x).$$

Deze differentiaalvergelijking is evenwel van het type dat oplosbaar is met de methode van scheiding van veranderlijken. De A.O. is te schrijven als

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x) dx\right).$$

We mogen voor $\mu(x)$ om het even welke P.O. kiezen, maar het ligt voor de hand om een P.O. met een zo eenvoudig mogelijk functievoorschrift te kiezen. Eens $\mu(x)$ is vastgelegd, kunnen we de gegeven differentiaalvergelijking, na vermenigvuldiging met $\mu(x)$, herleiden tot de equivalente differentiaalvergelijking

$$(\mu(x)f(x))' = \mu(x)q(x).$$

Hieruit volgt dat

$$\mu(x)f(x) = \int \mu(x)q(x) dx,$$

en dus is de A.O. van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x) dx.$$

Voorbeeld 6.4 Gevraagd wordt de differentiaalvergelijking

$$f'(x) + xf(x) = x,$$

op te lossen met beginvoorwaarde $f(0) = 2$. De functies $p(x) = q(x) = x$ zijn continu in \mathbb{R} . We zoeken een integrerende factor $\mu(x)$ die oplossing is van de differentiaalvergelijking

$$\mu(x)(f'(x) + xf(x)) = (\mu(x)f(x))',$$

of nog,

$$\mu'(x) = x\mu(x).$$

Passen we de methode van scheiding van veranderlijken toe, dan is

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = \int x dx,$$

of nog

$$\ln |\mu(x)| = C + \frac{x^2}{2},$$

zodat

$$\mu(x) = \bar{C} e^{x^2/2},$$

met $\bar{C} = \pm e^C$ een willekeurige van nul verschillende reële constante. Merk op dat $\mu(x) = 0$ een singuliere oplossing is van de differentiaalvergelijking die teruggevonden wordt door $\bar{C} = 0$

te stellen. We kiezen $\bar{C} = 1$, omdat dit het eenvoudigste niet-triviale functievoorschrift voor de integrerende factor μ oplevert, nl.

$$\mu(x) = e^{x^2/2}.$$

De gegeven differentiaalvergelijking wordt dus herschreven als

$$(e^{x^2/2} f(x))' = x e^{x^2/2},$$

en de A.O. wordt dan gevonden door integratie van beide leden, nl.

$$e^{x^2/2} f(x) = \int x e^{x^2/2} dx = e^{x^2/2} + C,$$

met integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt dat de A.O. gegeven is door

$$f(x) = (C + e^{x^2/2}) e^{-x^2/2} = 1 + C e^{-x^2/2}.$$

Om de P.O. met beginwaarde $f(0) = 2$ te vinden, moeten we C zo kiezen dat

$$2 = 1 + C,$$

of nog, $C = 1$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$f(x) = 1 + e^{-x^2/2}.$$

Voorbeeld 6.5 Gevraagd wordt de A.O. te bepalen van de differentiaalvergelijking

$$f'(x) + \frac{2}{x} f(x) = 12.$$

De functies $p(x) = 1/x$ en $q(x) = 12$ zijn continu in \mathbb{R}_0 . We berekenen een integrerende factor $\mu(x)$ uit de differentiaalvergelijking

$$\mu'(x) = \frac{2}{x} \mu(x),$$

die, opgelost met de methode van scheiding van veranderlijken, leidt tot

$$\ln(|\mu(x)|) = 2 \ln|x| + \bar{C}.$$

We kiezen de P.O.

$$\mu(x) = x^2,$$

als integrerende factor. De A.O. van de gegeven differentiaalvergelijking is dan

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\int 12x^2 dx \right) = \frac{C}{x^2} + 4x,$$

met integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. Stel dat we de oplossing willen bepalen die voldoet aan de beginwaarde $f(2) = 0$, dan moet C oplossing zijn van de vergelijking

$$\frac{C}{4} + 8 = 0.$$

Dus is $C = -32$ en de P.O. waarvoor $f(2) = 0$, is

$$f(x) = 4x - \frac{32}{x^2}.$$

6.4 Lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten

Een lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde met constante coëfficiënten is van de vorm

$$f'(x) + a f(x) = b,$$

met a en b gegeven reële constanten.

Als $a = 0$, dan is de A.O. de lineaire functie $f(x) = bx + C$, met integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. We onderstellen dat $a \neq 0$. De differentiaalvergelijking leent zich voor toepassing van de methode van scheiding der veranderlijken. Het volstaat haar te herschrijven als

$$\frac{dy}{dx} = -(ay - b),$$

waaruit, als $y \neq b/a$, volgt dat

$$\int \frac{dy}{ay - b} = - \int dx.$$

We vinden

$$\frac{1}{a} \ln |ay - b| = -x + C_1,$$

met arbitraire $C_1 \in \mathbb{R}$. We hebben m.a.w. dat

$$ay - b = \pm e^{aC_1} e^{-ax},$$

zodat

$$y = \frac{b}{a} + \bar{C} e^{-ax},$$

met $\bar{C} \in \mathbb{R}_0$. Aangezien $y = b/a$ een singuliere oplossing is, kunnen we de A.O. van de differentiaalvergelijking schrijven als

$$f(x) = \frac{b}{a} + C e^{-ax},$$

met $C \in \mathbb{R}$.

6.4.1 Evenwichtspunten

Bezit een differentiaalvergelijking een constante P.O., d.w.z. een oplossing van de vorm $f(x) = p$ met $p \in \mathbb{R}$, dan wordt p een *evenwichtspunt* van de differentiaalvergelijking genoemd. Een differentiaalvergelijking kan geen, één of meer evenwichtspunten bezitten.

Als er evenwichtspunten bestaan, dan vinden we ze door in de differentiaalvergelijking $f'(x) = 0$ te stellen en de resulterende vergelijking op te lossen naar $f(x)$. Elke constante oplossing bezorgt een evenwichtspunt.

Voor een lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde met constante coëfficiënten

$$f'(x) + a f(x) = b,$$

zijn de evenwichtspunten de constante oplossingen van de vergelijking $af(x) = b$, zo deze bestaan. Bijgevolg geldt:

- Als $a = 0$ en $b \neq 0$, dan is er geen evenwichtspunt.
- Als $a = b = 0$, dan zijn alle reële getallen evenwichtspunten.
- Als $a \neq 0$, dan is $p = \frac{b}{a}$ het enige evenwichtspunt.

Als een oplossing van de differentiaalvergelijking start in een evenwichtspunt of voor een bepaalde waarde van de onafhankelijke veranderlijke in een evenwichtspunt terecht komt, dan blijft de oplossing van dan af in dat evenwichtspunt.

6.4.2 Stabiliteit

Naar analogie met het stabiliteitsconcept voor differentievergelijkingen noemen we ook hier een evenwichtspunt *stabiel* als elke P.O. die start in een punt dat voldoende dicht bij het evenwichtspunt ligt, naar dat evenwichtspunt convergeert.

Voor de lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde met constante coëfficiënten $a \neq 0$ en b , zien we uit de gedaante van de A.O. dat de oplossing convergeert naar het enige evenwichtspunt $p = \frac{b}{a}$ wanneer $a > 0$. Inderdaad, de exponentiële functie in de A.O. convergeert naar 0 als $x \rightarrow +\infty$. Merk op dat, waar we het beginpunt ook kiezen, zelfs ver weg van het evenwichtspunt, de oplossing steeds naar het stabiele evenwichtspunt convergeert. Is daarentegen $a < 0$, dan neemt de exponentiële functie onbeperkt toe en is het evenwichtspunt $p = \frac{b}{a}$ instabiel.

6.4.3 Exponentiële groei

Stelt f een groeifunctie voor, dan geeft $f'(t)$ de *groeisnelheid* op tijdstip t weer. Een interessante verwante maat is de *relatieve groeisnelheid*. Het is de verhouding van groeisnelheid tot populatiegrootte op tijdstip t , d.i.

$$\frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Onderstel een constante relatieve groeisnelheid $q \neq 0$ in een populatie $f(t)$, dan voldoet f aan de differentiaalvergelijking

$$f'(t) = q f(t).$$

Merk op dat de relatieve groeisnelheid q niets anders is dan wat we voorheen de groeicoëfficiënt of groei-index hebben genoemd (zie Hoofdstuk 1.6.2). De groeicoëfficiënt q wordt in populatiemodellen meestal verkregen als het verschil tussen een geboorte- en sterftecoëfficiënt, nl.

$$q = g - s,$$

waarbij g het aantal geboorten en s het aantal sterfgevallen per individu en per tijdseenheid is. De A.O. van de differentiaalvergelijking is

$$f(t) = C e^{qt},$$

met integratieconstante $C \in \mathbb{R}$. De P.O. die op tijdstip $t = 0$ de waarde $f(0) = f_0$ aanneemt, is dan gegeven door

$$f(t) = f_0 e^{qt}.$$

Het enige evenwichtspunt is 0 en het is een stabiel evenwichtspunt als $q < 0$. Dit stelt de situatie van een uitstervende populatie voor (omdat de sterftecoëfficiënt groter is dan de geboortecoëfficiënt). Als $q > 0$, dan is het evenwicht 0 instabiel en is er explosieve groei van de populatie.

Dit continue model van exponentiële groei is de tegenhanger van het discrete groeimodel dat in Sectie 3.4.2 gedefinieerd werd aan de hand van de differentievergelijking

$$u_n = (1 + q) u_{n-1},$$

met q de aangroei per individu over een tijdsperiode $\Delta t = t_n - t_{n-1}$. Als $\Delta t = 1$, dan heeft q dezelfde betekenis als in het continue model. De uitdrukking $1 + q$ wordt in discrete groeimodellen meestal de *groefactor* genoemd.

Om van het discrete naar het continue model over te gaan, hebben we dus de populatiegrootte u_n op tijdstip t_n vervangen door de continue functie $f(t)$ en de verandering tussen twee opeenvolgende tijdstippen, $u_n - u_{n-1}$, door de afgeleide $f'(t)$. De afgeleide stelt immers de ogenblikkelijke verandering op tijdstip t voor. In het discrete geval is de oplossing gegeven door

$$u_n = (1 + q)^n u_0,$$

met u_0 de grootte van de populatie op t_0 . Kiezen we $t_0 = 0$, $\Delta t = 1$, en de populatiegrootte u_0 op tijdstip $t_0 = 0$ gelijk aan f_0 , dan levert het discrete model op tijdstip $t_n = n$ de populatiegrootte $u_n = (1 + q)^n f_0$, terwijl het continue model op hetzelfde tijdstip de waarde $f(n) = e^{qn} f_0$ levert. Men kan nagaan dat voor niet al te grote waarden van de parameter q beide modellen wel ongeveer dezelfde waarde leveren.

Merk op dat het evenwichtspunt 0 in het discrete model stabiel is als $|1 + q| < 1$, of $-2 < q < 0$, en dat het in het continue model stabiel is als $q < 0$. We kunnen het verschil in stabiliteitsvoorwaarde als volgt verklaren. In het discrete model nemen we aan dat de relatieve verandering gemeten over een eindig tijdsinterval Δt constant is. Dat sluit niet uit dat binnen dat interval de relatieve verandering nog kan schommelen (bvb. seizoenschommelingen). In het continue model heeft de relatieve verandering op ieder ogenblik dezelfde waarde. Dit is een strengere voorwaarde waardoor de stabiliteit iets gemakkelijker kan gegarandeerd worden.

Voorbeeld 6.6 Stel dat de relatieve groeisnelheid van een sprinkhanensoort 3 is (per tijds-eenheid). Op tijdstip 0 zijn er 2000 sprinkhanen. Hoeveel sprinkhanen zijn er op tijdstip t ? De informatie over de relatieve groeisnelheid levert de differentiaalvergelijking

$$f'(t) = 3f(t).$$

Deze vormt samen met de beginvoorwaarde

$$f(0) = 2000,$$

een beginwaardeprobleem. We zoeken eerst de A.O. van de differentiaalvergelijking. Na scheiding van de veranderlijken vinden we:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3 dt,$$

als $y \neq 0$, m.a.w.

$$\ln |y| = 3t + C,$$

of nog

$$y = \pm e^C e^{3t} = \bar{C} e^{3t}.$$

Aangezien $y = 0$ een singuliere oplossing is, vinden we als A.O.

$$f(t) = \bar{C} e^{3t},$$

met $\bar{C} \in \mathbb{R}$. Om de gewenste P.O. te vinden, gebruiken we de beginvoorwaarde

$$f(0) = \bar{C} e^0 = 2000,$$

waaruit blijkt dat $\bar{C} = 2000$. De hoeveelheid sprinkhanen op tijdstip t is m.a.w.

$$f(t) = 2000 e^{3t}.$$

□

6.5 Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde

Er bestaat geen eenvormig wiskundig recept om niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, zelfs als alle coëfficiënten constanten zijn, op te lossen. Voor sommige bijzondere niet-lineaire differentiaalvergelijkingen slagen we er toch in om de A.O. te vinden. Een voorbeeld daarvan is de zogenaamde *logistische differentiaalvergelijking*.

Voorbeeld 6.7 Logistische groei. Bij logistische groei is de relatieve groeisnelheid geen constante maar wel afhankelijk van de grootte van de populatie. De bijhorende differentiaalvergelijking is

$$f'(t) = q f(t) \left(1 - \frac{f(t)}{K} \right).$$

De relatieve groeisnelheid wordt dus gegeven door

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = q \left(1 - \frac{f(t)}{K} \right).$$

Wanneer de grootte $f(t)$ van de populatie veel kleiner is dan de draagcapaciteit K , dan is de relatieve groeisnelheid bijna gelijk aan q . Naarmate de populatie groter wordt, neemt de relatieve groeisnelheid af. Indien $f(t)$ groot is, d.w.z. dicht bij de draagcapaciteit K , dan is er bijna geen groeisnelheid meer.

Bovenstaande differentiaalvergelijking is nog steeds van eerste orde maar niet lineair. Voor het oplossen ervan kunnen we wederom gebruik maken van de methode van scheiding der veranderlijken. We vertrekken van

$$\frac{dy}{dt} = q y \left(1 - \frac{y}{K} \right),$$

wat we kunnen herschrijven als

$$K \frac{dy}{dt} = q y (K - y),$$

waaruit, als $y \neq 0$ en $y \neq K$, volgt dat

$$\int \frac{K}{y(K-y)} dy = \int q dt.$$

Om de integraal in het linkerlid te berekenen, maken we gebruik van de methode van splitsen in partieelbreuken:

$$\frac{K}{y(K-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{K-y} = \frac{AK - Ay + By}{y(K-y)},$$

waaruit volgt dat $AK = K$ en $B - A = 0$, m.a.w. $A = B = 1$. Dus is

$$\int \frac{K}{y(K-y)} dy = \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{K-y} dy = \int q dt,$$

of na integratie

$$\ln |y| - \ln |K-y| = qt + C_1,$$

met integratieconstante $C_1 \in \mathbb{R}$, wat we kunnen herschrijven als

$$\ln \frac{|y|}{|K-y|} = qt + C_1,$$

m.a.w.

$$\left| \frac{y}{K-y} \right| = e^{qt} e^{C_1}.$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{y}{K-y} = \pm e^{C_1} e^{qt},$$

of kortweg

$$\frac{y}{K-y} = C_2 e^{qt},$$

met $C_2 = \pm e^{C_1} \in \mathbb{R}_0$. We lossen nu deze betrekking op naar y en vinden

$$y = K C_2 e^{qt} - y C_2 e^{qt},$$

en dus is

$$y(1 + C_2 e^{qt}) = K C_2 e^{qt}.$$

Anderzijds zijn $y = 0$ en $y = K$ twee singuliere oplossingen van de differentiaalvergelijking. De A.O. van de differentiaalvergelijking is m.a.w.

$$f(t) = \frac{K C e^{qt}}{1 + C e^{qt}} = \frac{K}{\frac{1}{C} e^{-qt} + 1},$$

met integratieconstante $C \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. De beginhoeveelheid is

$$f(0) = \frac{K}{\frac{1}{C} + 1}.$$

Indien we wensen dat de beginhoeveelheid een bepaalde waarde c aanneemt, moeten we eisen dat

$$\frac{K}{\frac{1}{C} + 1} = c,$$

m.a.w.

$$\frac{K}{c} = 1 + \frac{1}{C},$$

of nog dat

$$\frac{1}{C} = \frac{K - c}{c}.$$

Wanneer we dit invullen in de A.O. vinden we de P.O.

$$y = f(t) = \frac{K}{\frac{K-c}{c} e^{-qt} + 1}.$$

Hierin herkennen we de logistische groeifunctie!

We onderzoeken of er evenwichtspunten zijn. We stellen daartoe $f'(t) = 0$ in de differentiaalvergelijking en lossen de resulterende vergelijking

$$0 = q f(t) \left(1 - \frac{f(t)}{K} \right),$$

op naar $f(t)$. We vinden twee constante oplossingen, nl. $f(t) = 0$ en $f(t) = K$. Er zijn m.a.w. twee evenwichtspunten, 0 en K . We zullen vervolgens de stabiliteit van deze evenwichtspunten nagaan.

Merk op dat als $f(t)$ dicht bij 0 ligt (maar verschillend is van 0) uit de differentiaalvergelijking volgt dat $f'(t) > 0$ wanneer $qf(t) > 0$ en $f'(t) < 0$ wanneer $qf(t) < 0$. In het geval van groei is $q > 0$ en dan heeft $f'(t)$ hetzelfde teken als $f(t)$. Bevinden we ons op tijdstip t ietwat voorbij het evenwicht, d.i. als $f(t) > 0$ maar voldoende dicht bij 0 ligt, dan is $f'(t) > 0$ en stijgt de functie f , m.a.w. we verwijderen ons nog verder van het evenwicht. Bevinden we ons op tijdstip t ietwat vóór het evenwicht, d.i. als $f(t) < 0$ maar voldoende dicht bij 0 ligt, dan is $f'(t) < 0$ en daalt de functie f , m.a.w. we verwijderen ons ook nu verder van het evenwicht. Per definitie is het evenwichtspunt 0 dus instabiel als $q > 0$.

Als $f(t) > K$ maar dicht bij $K > 0$ ligt, dan heeft $f'(t)$ het tegengestelde teken van q . Als $0 < f(t) < K$ maar dicht bij $K > 0$ ligt, dan heeft $f'(t)$ hetzelfde teken als q . Voor $q > 0$ betekent dit dat als $f(t)$ juist voorbij het evenwichtspunt K ligt, dan $f'(t) < 0$ en de functie dalend is, dus naar het evenwichtspunt toe verandert. Als $f(t)$ juist onder K ligt, is $f'(t) > 0$ en groeit de functie naar K toe. Per definitie is het evenwichtspunt K een stabiel evenwichtspunt. \square

In dit geval konden we de stabiliteit van de evenwichtspunten ook rechtstreeks uit de A.O. van de differentiaalvergelijking afleiden. Immers, als $t \rightarrow +\infty$ en $q > 0$, dan is $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = K$ en de oplossing convergeert, ongeacht het beginpunt, naar het evenwichtspunt K . Dit bevestigt dat K een stabiel evenwichtspunt is als $q > 0$. Anderzijds, als $q < 0$, dan is $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ en de oplossing convergeert, ongeacht het beginpunt, naar het evenwichtspunt 0. Dit bevestigt dat 0 een stabiel evenwichtspunt is als $q < 0$.

Over het algemeen kunnen we de A.O. echter niet uitdrukken in termen van elementaire functies. Zijn er evenwichtspunten, dan trachten we uit de differentiaalvergelijking zelf de stabiliteit te achterhalen door, zoals in het vorige voorbeeld, het teken van de afgeleide functie f' in de onmiddellijke omgeving van de evenwichtspunten te bepalen.

6.6 Lineaire differentiaalvergelijkingen van tweede orde met constante coëfficiënten

Een lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde is van de vorm

$$a(x) f''(x) + b(x) f'(x) + c(x) f(x) = d(x),$$

met $a(x), b(x), c(x)$ en $d(x)$ gegeven functies van x . Als $d(x) = 0$ voor alle x , dan wordt de differentiaalvergelijking *homogeen* genoemd, zoniet is het een niet-homogene differentiaalvergelijking.

In tegenstelling tot de lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde, bestaat voor dit type van differentiaalvergelijking geen universeel voorschrift om de A.O. te vinden.

We zullen ons in dit hoofdstuk eenvoudigheidshalve beperken tot de studie van lineaire differentiaalvergelijkingen van tweede orde met constante coëfficiënten.

Een lineaire differentiaalvergelijking van tweede orde met constante coëfficiënten is van de vorm

$$a f''(x) + b f'(x) + c f(x) = d,$$

met a, b, c, d gegeven constanten en $a \neq 0$.

De *geassocieerde homogene* differentiaalvergelijking van tweede orde is

$$a f''(x) + b f'(x) + c f(x) = 0.$$

Aangezien de differentiaalvergelijking lineair is, kunnen we gebruik maken van de eigenschap dat de A.O. van de niet-homogene differentiaalvergelijking de som is van de A.O. van de geassocieerde homogene differentiaalvergelijking en een P.O. van de niet-homogene differentiaalvergelijking.

Merk op dat als f een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking, ook $c f$ voor om het even welke constante $c \in \mathbb{R}$ een oplossing is. Bovendien heeft de homogene differentiaalvergelijking altijd de triviale oplossing $f(x) = 0$. We wensen niettemin de A.O. te vinden en gaan daarvoor als volgt te werk.

We construeren de *karakteristieke* vergelijking

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0,$$

in de onbekende λ door in de differentiaalvergelijking f'' , f' en f respectievelijk te vervangen door λ^2 , λ en 1. De A.O. van de homogene differentiaalvergelijking hangt af van de wortels van deze vierkantsvergelijking. Het gedrag van de A.O. wordt in hoofdzaak bepaald door het teken van de reële wortels.

Geval 1 $D = b^2 - 4ac > 0$

Als de discriminant D van de karakteristieke vergelijking strikt positief is, dan heeft ze twee

verschillende reële wortels λ_1 en λ_2 , gegeven door

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De A.O. van de homogene differentiaalvergelijking van tweede orde is dan

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 .

Het gedrag van de A.O. wordt bepaald door het teken van λ_1 en λ_2 .

- Als $\lambda_1 < 0$ en $\lambda_2 < 0$, dan convergeert de A.O. naar 0.
- Zodra een van de wortels λ_1 of λ_2 strikt positief is, dan divergeert de A.O.
- Als $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 < 0$ (d.w.z. als $c = 0$ en $b/a > 0$), dan convergeert de A.O. naar de constante waarde C_1 .
- Als $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 > 0$ (d.w.z. als $c = 0$ en $b/a < 0$), dan divergeert de A.O.

Geval 2 $D = b^2 - 4ac = 0$

Als de discriminant D van de karakteristieke vergelijking gelijk is aan 0, dan heeft ze twee samenvallende reële wortels

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}.$$

De A.O. van de homogene differentiaalvergelijking van tweede orde is

$$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x},$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 .

Het gedrag van de A.O. wordt bepaald door het teken van λ_1 . Is $\lambda_1 < 0$, dan convergeert de A.O. naar het evenwichtspunt 0. In alle andere gevallen divergeert de A.O.

Geval 3 $D = b^2 - 4ac < 0$

Als de discriminant D van de karakteristieke vergelijking strikt negatief is, dan heeft de karakteristieke vergelijking geen reële oplossingen. In dat geval stellen we

$$s = \frac{1}{2a} \sqrt{-D} = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}.$$

De A.O. van de differentiaalvergelijking is dan

$$f(x) = e^{-\frac{bx}{2a}} (C_1 \sin sx + C_2 \cos sx),$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 .

Het gedrag van de A.O. wordt bepaald door het teken van b/a .

- Als $b/a > 0$ dan is de A.O. gedempt oscillerend en convergeert ze naar het evenwichtspunt 0.
- Als $b = 0$, dan is de oplossing zuiver periodiek (en is er dus geen convergentie).

- Als $b/a < 0$, dan is de A.O. oscillerend maar divergent.

Merk op dat in alle gevallen twee beginwaarden nodig zijn om een P.O. te bepalen. Meestal geeft men waarden van f en f' in een zelfde (begin)punt x_0 .

Voorbeeld 6.8 Gevraagd wordt de A.O. te bepalen van de differentiaalvergelijking

$$f''(x) + k f(x) = 0,$$

met k een gegeven reële constante. De discriminant van de vierkantsvergelijking

$$\lambda^2 + k = 0,$$

is $D = -4k$. We moeten 3 gevallen onderscheiden:

1. $k < 0$. We vinden $\lambda_1 = \sqrt{-k}$ en $\lambda_2 = -\sqrt{-k}$ en de A.O. is

$$f(x) = C_1 e^{\sqrt{-k}x} + C_2 e^{-\sqrt{-k}x}.$$

2. $k = 0$. We vinden $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, zodat de A.O. gegeven is door

$$f(x) = (C_1 + C_2 x) e^0 = C_1 + C_2 x.$$

3. $k > 0$. De discriminant $D = -4k$ is strikt negatief en we definiëren

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{-D} = \sqrt{k}.$$

De A.O. van de differentiaalvergelijking is

$$f(x) = C_1 \sin(\sqrt{k}x) + C_2 \cos(\sqrt{k}x).$$

□

Voorbeeld 6.9 Gevraagd wordt de P.O. van de differentiaalvergelijking

$$f''(x) + 4f(x) = 0,$$

met beginwaarden $f(0) = 1$ en $f'(0) = 1$. Uit het vorige voorbeeld halen we onmiddellijk dat de A.O. van de differentiaalvergelijking gegeven is door

$$f(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Door afleiding naar x hebben we dat

$$f'(x) = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x.$$

Vermits $f(0) = 1$, moet gelden dat $C_2 = 1$. Uit $f'(0) = 1$ volgt anderzijds dat $2C_1 = 1$, of nog, $C_1 = 1/2$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x.$$

□

6.7 Stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten

Om een systeemgedrag adequaat te beschrijven heeft men soms meer dan één veranderlijke grootte nodig. Onderstellen we dat elke veranderlijke voldoet aan een lineaire differentiaalvergelijking van eerste orde die uitdrukt hoe die grootte verandert in functie van de actuele waarden van alle beschikbare veranderlijken. Het volledige model bestaat dan uit een stelsel gekoppelde lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde. Laten we voor de eenvoud hier verder aannemen dat elke vergelijking uit het stelsel een lineaire differentiaalvergelijking is met constante coëfficiënten.

Een stelsel van m lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met constante coëfficiënten in de m continue veranderlijken $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, is van de vorm

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}(t) = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \dots + a_{1m} y_m(t) + d_1, \\ \frac{dy_2}{dt}(t) = a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \dots + a_{2m} y_m(t) + d_2, \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt}(t) = a_{m1} y_1(t) + a_{m2} y_2(t) + \dots + a_{mm} y_m(t) + d_m, \end{cases}$$

of, in matrixnotatie,

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + D,$$

waarbij

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{pmatrix}, \quad Y'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}(t) \\ \frac{dy_2}{dt}(t) \\ \vdots \\ \frac{dy_m}{dt}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}.$$

Door de coëfficiënten d_i uit de rechterleden weg te laten, of in matrixnotatie, door de kolommatrix D weg te laten, vinden we het geassocieerde stelsel homogene differentiaalvergelijkingen.

6.7.1 Evenwichtspunten

Een *evenwichtspunt* van het stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + D,$$

is een kolommatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix},$$

die oplossing is van het stelsel lineaire (algebraïsche) evenwichtsvergelijkingen

$$A \cdot P + D = O_{m \times 1}.$$

Als een continu systeem zich in een evenwichtspunt bevindt dan zal het in dit evenwichtspunt blijven.

De evenwichtvergelijkingen die worden bekomen door in de differentiaalvergelijking de afgeleiden nul te stellen, vormen een stelsel van m lineaire vergelijkingen in de m onbekenden y_1, y_2, \dots, y_m . Om te onderzoeken of er geen, één of meer evenwichtspunten bestaan, maken we gebruik van de oplossingscriteria voor stelsels lineaire vergelijkingen in termen van de rang van de $m \times m$ -matrix A en de rang van de uitgebreide matrix A_D . Deze laatste vinden we door aan A de kolom D toe te voegen.

Laten we nu een onderscheid maken tussen stelsels homogene en stelsels niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen.

Voor een stelsel niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, d.w.z. als $D \neq O_{m \times 1}$, geldt:

- als $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A_D)$, dan zijn er geen evenwichtspunten;
- als $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_D) = m$, dan is er 1 evenwichtspunt $P = -A^{-1} \cdot D$;
- als $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_D) < m$, dan zijn er oneindig veel evenwichtspunten.

Voor een stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, d.w.z. als $D = O_{m \times 1}$, geldt:

- als $\text{rang}(A) = m$, d.w.z. als $\det(A) \neq 0$, dan is $P = O_{m \times 1}$ het enige evenwichtspunt;
- als $\text{rang}(A) < m$, dan zijn er oneindig veel evenwichtspunten.

6.7.2 A.O. van een stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

De karakteristieke vergelijking van de matrix A is

$$\det(A - \lambda I_m) = 0.$$

We onderstellen voor de eenvoud dat de matrix A m verschillende reële eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bezit.

Als de $m \times m$ -matrix A van het stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen $Y'(t) = A \cdot Y(t)$, m verschillende reële eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bezit, dan is de A.O. gegeven door

$$Y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_{\lambda_2} + \dots + C_m e^{\lambda_m t} \vec{v}_{\lambda_m},$$

waarbij \vec{v}_{λ_i} een (willekeurige) eigenvector voorstelt behorend bij de eigenwaarde λ_i en C_1, \dots, C_m reële integratieconstanten zijn.

Noteren we de eigenvector \vec{v}_{λ_i} als

$$\vec{v}_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{mi} \end{pmatrix},$$

dan is de A.O. van het homogeen stelsel differentievergelijkingen ook te schrijven als

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 v_{11} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{12} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_m v_{1m} e^{\lambda_m t}, \\ y_2(t) = C_1 v_{21} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{22} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_m v_{2m} e^{\lambda_m t}, \\ \vdots \\ y_m(t) = C_1 v_{m1} e^{\lambda_1 t} + C_2 v_{m2} e^{\lambda_2 t} + \dots + C_m v_{mm} e^{\lambda_m t}. \end{cases}$$

De vrij te kiezen integratieconstanten kunnen eventueel vastgelegd worden aan de hand van beginvoorwaarden, bijvoorbeeld door aan $y_1(0), y_2(0), \dots, y_m(0)$ specifieke waarden op te leggen.

6.7.3 Stabiliteit

We noemen een evenwichtspunt P van een stelsel van m lineaire differentiaalvergelijkingen stabiel als de oplossing $Y(t)$ convergeert naar P zodra de kolommatrix van beginwaarden $Y(t_0)$ voldoende dicht bij P ligt.

Laten we de stabiliteit nagaan voor een stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen. Uit de gedaante van de A.O. (zie hierboven) volgt dat als A m verschillende strikt negatieve eigenwaarden bezit, nl. als

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \dots, \quad \lambda_m < 0,$$

dan convergeert de oplossing naar het unieke evenwichtspunt $P = O_{m \times 1}$, t.t.z. naar het nulpunt, en dit ongeacht de startwaarden. Het evenwichtspunt is stabiel.

Als echter $\lambda_1 = 0$ en alle andere eigenwaarden strikt negatief en verschillend zijn, dan is $\det(A) = 0$ en $\text{rang}(A) = m - 1$. We vinden dat $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = C_1 \vec{v}_{\lambda_1=0}$. Er zijn in dit geval dus oneindig veel evenwichtspunten en de oplossing convergeert naar één van die punten. Voor verschillende waarden van C_1 convergeert de oplossing naar een verschillend evenwichtspunt. Geen enkel van de evenwichtspunten is daardoor stabiel.

6.7.4 A.O. van een stelsel niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

De A.O. van een niet-homogeen stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen is de som van de A.O. van het geassocieerde homogeen stelsel en een P.O. van het niet-homogene stelsel. Een dergelijke P.O. wordt in sommige omstandigheden bepaald door een evenwichtspunt van het niet-homogene stelsel.

Als de $m \times m$ -matrix A van het stelsel niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen $Y'(t) = A \cdot Y(t) + D$, m verschillende reële eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ bezit, en als geen van deze eigenwaarden gelijk is aan 0, dan is de A.O. gegeven door

$$X_n = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_{\lambda_2} + \dots + C_m e^{\lambda_m t} \vec{v}_{\lambda_m} + P,$$

waarbij \vec{v}_{λ_i} een (willekeurige) eigenvector voorstelt behorend bij de eigenwaarde λ_i , C_1, \dots, C_m reële integratieconstanten zijn, en de kolomvector P het unieke evenwichtspunt is van het gegeven stelsel niet-homogene differentiaalvergelijkingen.

Voorbeeld 6.10 Gegeven is het stelsel niet-homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t) + 4, \\ \frac{dy_2}{dt}(t) = 4y_1(t) + 3y_2(t) + 2. \end{cases}$$

in de continue veranderlijken $y_1(t), y_2(t)$. We zoeken de particuliere oplossing (P.O.) die voldoet aan de beginvoorwaarden $y_1(0) = 2, y_2(0) = 4$.

De coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

heeft determinant verschillend van 0. Het unieke evenwichtspunt P van het stelsel is de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 + 4 = 0, \\ 4p_1 + 3p_2 + 2 = 0, \end{cases}$$

en is gegeven door

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Laten we nu de A.O. zoeken van het geassocieerde stelsel homogene differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt}(t) = 2y_1(t) + 3y_2(t), \\ \frac{dy_2}{dt}(t) = 4y_1(t) + 3y_2(t). \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ heeft discriminant $D = 49$. De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 6$. Een eigenvector \vec{v}_{λ_1} heeft elementen v_{11} en v_{21} die voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} 2v_{11} + 3v_{21} = -v_{11}, \\ 4v_{11} + 3v_{21} = -v_{21}. \end{cases}$$

We kiezen

$$\vec{v}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analoog moeten de elementen v_{12} en v_{22} van een eigenvector \vec{v}_{λ_2} voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} 2v_{11} + 3v_{21} = 6v_{11}, \\ 4v_{11} + 3v_{21} = 6v_{21}. \end{cases}$$

We kiezen

$$\vec{v}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

De A.O. van het stelsel homogene differentiaalvergelijkingen is dus

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{6t}, \\ y_2(t) = -C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{6t}. \end{cases}$$

De A.O. van het gegeven stelsel niet-homogene differentiaalvergelijkingen vinden we door hier de evenwichtoplossing P bij op te tellen, nl.:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{6t} + 1, \\ y_2(t) = -C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{6t} - 2. \end{cases}$$

Rest ons de P.O. te zoeken die voldoet aan $y_1(0) = 2, y_2(0) = 4$. Hiertoe moeten we het stelsel

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 + 1 = 2, \\ -C_1 + 4C_2 - 2 = 4, \end{cases}$$

oplossen naar C_1, C_2 . We vinden $C_1 = -2$ en $C_2 = 1$. De gezochte P.O. is dus

$$\begin{cases} y_1(t) = -2e^{-t} + 3e^{6t} + 1, \\ y_2(t) = 2e^{-t} + 4e^{6t} - 2. \end{cases}$$

□

6.8 Het fasevlak

Om het gedrag van de oplossingen van een differentiaalvergelijking of van een stelsel differentiaalvergelijkingen visueel te verduidelijken stellen we die oplossingen, of althans een representatief aantal ervan, grafisch voor in een zogenaamd *fasevlak*. Wij behandelen in deze cursus enkel het fasevlak voor *autonome* stelsels van 2 differentiaalvergelijkingen van eerste orde in twee continue veranderlijken $y_1(t)$ en $y_2(t)$, t.t.z. stelsels van de vorm

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = f_1(y_1(t), y_2(t)) \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = f_2(y_1(t), y_2(t)) \end{cases}$$

waarbij f_1 en f_2 gegeven functies (van twee veranderlijken) zijn. Het stelsel wordt autonoom genoemd omdat de onafhankelijke veranderlijke t niet expliciet in de rechterleden van de vergelijkingen voorkomt.

Als in het bijzonder f_1 en f_2 lineaire functies zijn, dan vinden we een stelsel van twee lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde, nl.

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + d_1 \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + d_2 \end{cases}$$

of in matrixnotatie,

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + D.$$

Als bovendien $D = O_{2 \times 1}$, dan is het een homogeen lineair stelsel.

Voor een stelsel van twee differentiaalvergelijkingen in de twee veranderlijken $y_1(t), y_2(t)$, noemt men het vlak met coördinaatassen y_1 en y_2 het *fasevlak*.

Stel dat op een tijdstip t_0 de veranderlijken y_1 en y_2 respectievelijk de waarden $y_1(t_0) = a$, $y_2(t_0) = b$ aannemen. We kunnen die waarden op tijdstip t_0 associëren met het punt in het fasevlak met coördinaten (a, b) . Laten we nu de tijd vanaf t_0 toenemen, dan wordt de P.O. van het stelsel differentiaalvergelijkingen met beginwaarden $y_1(t_0) = a, y_2(t_0) = b$, in het fasevlak afgebeeld op een kromme vertrekkend in het punt (a, b) . Deze kromme wordt *de baan* door (a, b) genoemd. Beschouwen we de kolommatrix

$$Y'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt}(t_0) \\ \frac{dy_2}{dt}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}.$$

De eerste component $\frac{dy_1}{dt}$ bepaalt per definitie de ogenblikkelijke verandering van de abscis y_1 en analoog bepaalt $\frac{dy_2}{dt}$ de ogenblikkelijke verandering van de ordinaat y_2 . De kolommatrix $Y'(t_0)$ geeft in het fasevlak de zin en richting weer van de baan in het punt (a, b) . M.a.w. de baan door (a, b) raakt in het punt (a, b) aan de rechte door (a, b) die gericht is volgens de kolommatrix $Y'(t_0)$.

Aldus kunnen we, zonder de A.O. van het stelsel differentiaalvergelijkingen te kennen, voor om het even welk punt (a, b) van het fasevlak, de kolommatrix

$$\begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

berekenen en in dat punt (a, b) van het fasevlak dan een pijltje van vaste lengte tekenen in de richting en zin die wordt aangegeven door deze kolommatrix. Een baan die door (a, b) gaat, raakt in (a, b) aan het pijltje en wordt in de zin van het pijltje doorlopen. Als we voor een beduidend aantal punten in een deel van het fasevlak dergelijke pijltjes tekenen, dan zegt men dat we het *richtingsveld* hebben getekend. Het richtingsveld geeft in één oogopslag een beeld van hoe banen in het fasevlak doorlopen worden. Tekent men benevens het richtingsveld ook nog een willekeurig aantal banen, dan noemt men de bekomen grafiek een *faseportret* van het stelsel differentiaalvergelijkingen.

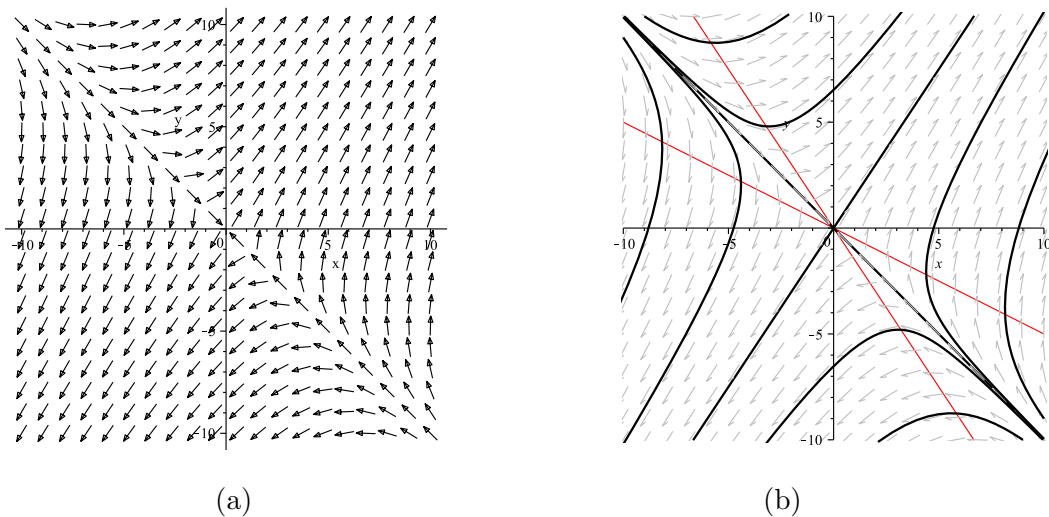
Voorbeeld 6.11 Gegeven is het homogeen stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t) + 2y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = 3y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$

Laten we bijvoorbeeld in het punt $(4, 6)$ de richting en zin van het pijltje uit het richtingsveld berekenen. De richtingbepalende kolomvector is

$$\begin{pmatrix} (1)(4) + (2)(6) \\ (3)(4) + (2)(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix},$$

en het pijltje in $(4, 6)$ wijst naar rechts en naar boven met helling $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$. In Figuur 6.1(a) zijn behalve dat pijltje nog vele andere pijltjes getekend in het vierkant van het fasevlak dat zich uitstrekt van $y_1 = -10$ tot $y_1 = 10$ en van $y_2 = -10$ tot $y_2 = 10$. Figuur 6.1(b) toont het faseportret van het stelsel differentiaalvergelijkingen. Uit het richtingsveld en faseportret zien we dat $(0, 0)$ een evenwichtspunt is en dat er convergentie is naar dit evenwichtspunt enkel vanuit punten $(a, -a)$ die gelegen zijn op de diagonaal van de linker bovenhoek naar de rechter benedenhoek, d.i. de rechte met vergelijking $y_2 = -y_1$. Voor alle andere punten in het fasevlak worden banen beschreven die zich uiteindelijk van dit evenwichtspunt verwijderen. In het faseportret zien we ook dat er nog een tweede rechte baan is, namelijk een rechte door $(0, 0)$ met positieve helling. Vertrekken we op deze rechte vanuit een punt verschillend van het nulpunt, dan verwijderd de oplossing zich bij toenemende t van het evenwichtspunt. Het is duidelijk dat het evenwichtspunt $(0, 0)$ niet stabiel is. Het wordt een *zadelpunt* genoemd, omdat er twee rechte banen doorgaan, en voor beginpunten op de ene rechte de oplossing naar het evenwichtspunt wordt 'aangetrokken' en voor beginpunten op de andere rechte de oplossing van het evenwichtspunt wordt 'afgestoten'.



Figuur 6.1: (a) Richtingsveld en (b) faseportret voor het stelsel differentiaalvergelijkingen uit Voorbeeld 6.11.

In het faseportret hebben we nog twee extra lijnen getekend. De eerste geeft aan waar y_1 in het fasevlak overgaat van stijgen naar dalen of van dalen naar stijgen. Deze rechte wordt

bijgevolg bepaald door de afgeleide van $y_1(t)$ nul te stellen, nl.

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_1(t) + 2y_2(t) = 0.$$

Ze is dus bepaald door de vergelijking $y_2 = -\frac{1}{2}y_1$ en wordt de *eerste nulcline* genoemd. We zien in het faseportret dat in ieder snijpunt van deze rechte met een baan in het fasevlak, de raaklijn aan de baan in dat snijpunt verticaal is. Voor punten die onder deze rechte gelegen zijn, is $\frac{dy_1(t)}{dt} < 0$ en wijzen de pijltjes in het richtingsveld naar links, voor punten boven deze rechte wijzen de pijltjes naar rechts. Op analoge wijze bepaalt de tweede rechte waar y_2 in het fasevlak overgaat van stijgen naar dalen of van dalen naar stijgen. Deze rechte, die de *tweede nulcline* wordt genoemd, volgt uit de voorwaarde

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 3y_1(t) + 2y_2(t) = 0,$$

en heeft als vergelijking $y_2 = -\frac{3}{2}y_1$. In ieder snijpunt van deze rechte met een baan in het fasevlak, is de raaklijn aan de baan in dat snijpunt horizontaal. Voor de punten boven deze rechte wijzen de pijltjes naar omhoog, voor de punten eronder wijzen de pijltjes naar omlaag.

Merk op dat we heel wat eigenschappen van het gedrag van de oplossing bekomen hebben zonder over de A.O. van het stelsel differentiaalvergelijkingen te beschikken. We kunnen deze eigenschappen in dit geval ook terugvinden door het stelsel op te lossen. De eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

zijn de wortels van de geassocieerde karakteristieke vergelijking

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - (2)(3) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

We vinden $\lambda_1 = 4$ en $\lambda_2 = -1$. Een eigenvector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$ behorend bij $\lambda_1 = 4$, is oplossing van het homogene stelsel

$$\begin{cases} v_{11} + 2v_{21} = 4v_{11}, \\ 3v_{11} + 2v_{21} = 4v_{21}. \end{cases}$$

We kiezen als oplossing $v_{11} = 2$, $v_{21} = 3$. Op analoge wijze leiden we af dat $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is behorend bij de eigenwaarde $\lambda_2 = -1$. De A.O. is bijgevolg

$$\begin{cases} y_1(t) = 2C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}, \\ y_2(t) = 3C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t}, \end{cases}$$

met C_1 en C_2 arbitraire integratieconstanten. Voorts, aangezien $\det(A) \neq 0$ (geen van de eigenwaarden van A is gelijk aan nul), is $(0, 0)$ het enige evenwichtspunt. Omdat bovendien niet alle eigenwaarden strikt negatief zijn, is dit evenwichtspunt niet stabiel. Merk op dat als we $C_2 = 0$ kiezen, de oplossing in het fasevlak een baan beschrijft langs de rechte met vergelijking $y_2 = \frac{3}{2}y_1$, en dat de beweging gebeurt weg van het nulpunt $(0, 0)$ aangezien de functiewaarde e^{4t} toeneemt wanneer t toeneemt. Kiezen we daarentegen $C_1 = 0$, dan

beschrijft de oplossing een baan langs de rechte met vergelijking $y_2 = -y_1$ naar het nulpunt $(0, 0)$ toe, aangezien e^{-t} naar 0 convergeert wanneer t toeneemt. Dit komt volledig overeen met de zin van de pijltjes in het richtingsveld op de twee rechte banen. \square

Met de volgende voorbeelden illustreren we hoe zelfs voor stelsels homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde heel verschillende patronen in het faseportret kunnen aangetroffen worden. We tonen niet alle details van de berekeningen aangezien ze analoog zijn aan deze uit het vorige voorbeeld.

Voorbeeld 6.12 Beschouw het volgende stelsel van twee homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -5y_1(t) + y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = 4y_1(t) - 2y_2(t). \end{cases}$$

De coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$

heeft eigenwaarden $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -6$ en bijhorende eigenvectoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. De A.O. van het stelsel is

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-6t}, \\ y_2(t) = 4C_1 e^{-t} - C_2 e^{-6t}, \end{cases}$$

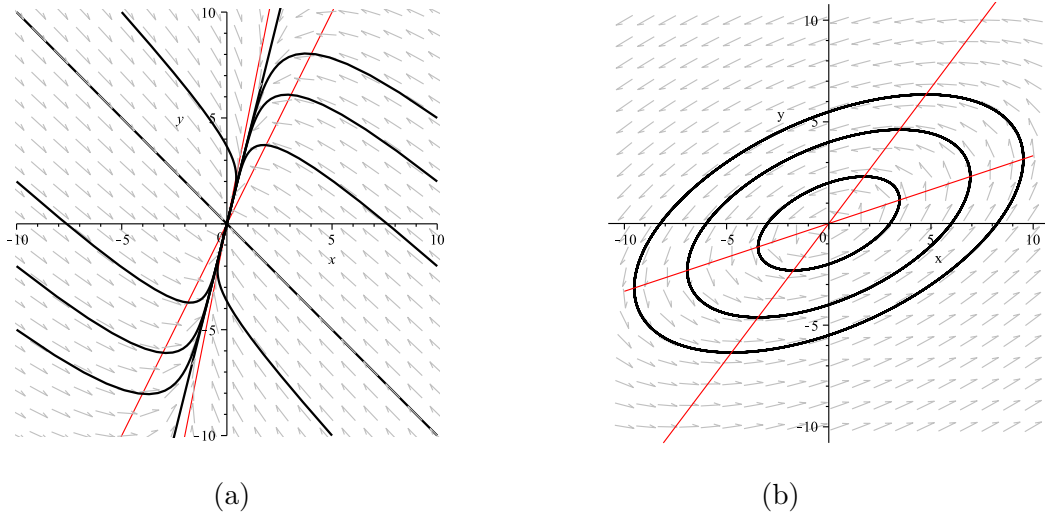
met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 .

Aangezien beide eigenwaarden verschillend en negatief zijn, is het evenwichtspunt $(0, 0)$ stabiel. Dit zien we bevestigd in het faseportret uit Figuur 6.2(a). De rechte banen met respectieve vergelijkingen $y_2 = 4y_1$ en $y_2 = -y_1$, gaan door het evenwichtspunt $(0, 0)$ en zijn gericht volgens deze eigenvectoren. De pijltjes wijzen aan dat de oplossing voor beginpunten op elk van deze rechten convergeert naar $(0, 0)$. Voor om het even welk ander beginpunt in het fasevlak is de baan een kromme die convergeert naar dit evenwichtspunt $(0, 0)$. \square

Voorbeeld 6.13 Beschouw het stelsel van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = 3y_1(t) - 9y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = 4y_1(t) - 3y_2(t). \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 27 = 0$. Er zijn bijgevolg geen reële eigenwaarden. In het faseportret uit Figuur 6.2(b) zien we dat de banen ellipsen zijn die concentrisch liggen rond het centrale punt $(0, 0)$ dat, vanwege $\det(A) \neq 0$, ook het enige evenwichtspunt is. Deze banen komen overeen met oplossingen die *periodiek* zijn.



Figuur 6.2: (a) Faseportret voor het stelsel uit Voorbeeld 6.12; (b) faseportret voor het stelsel uit Voorbeeld 6.13.

Merk op dat uit het faseportret niet kan afgeleid worden of de periode voor alle oplossingen dezelfde is, en zo ja hoe groot deze is. Om dit te beantwoorden moeten we de A.O. van het stelsel kennen. Deze is gegeven door

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 3 \cos(3\sqrt{3}t) + C_2 3 \sin(3\sqrt{3}t), \\ y_2(t) = C_1 (\cos(3\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(3\sqrt{3}t)) + C_2 (\sin(3\sqrt{3}t) - \sqrt{3} \cos(3\sqrt{3}t)), \end{cases}$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 . Men kan verifiëren dat dit inderdaad de A.O. is door ze te substitueren in het stelsel differentiaalvergelijkingen. Alle oplossingen hebben dus dezelfde periode $T = 2\pi/(3\sqrt{3})$. \square

Voorbeeld 6.14 Beschouw het stelsel van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

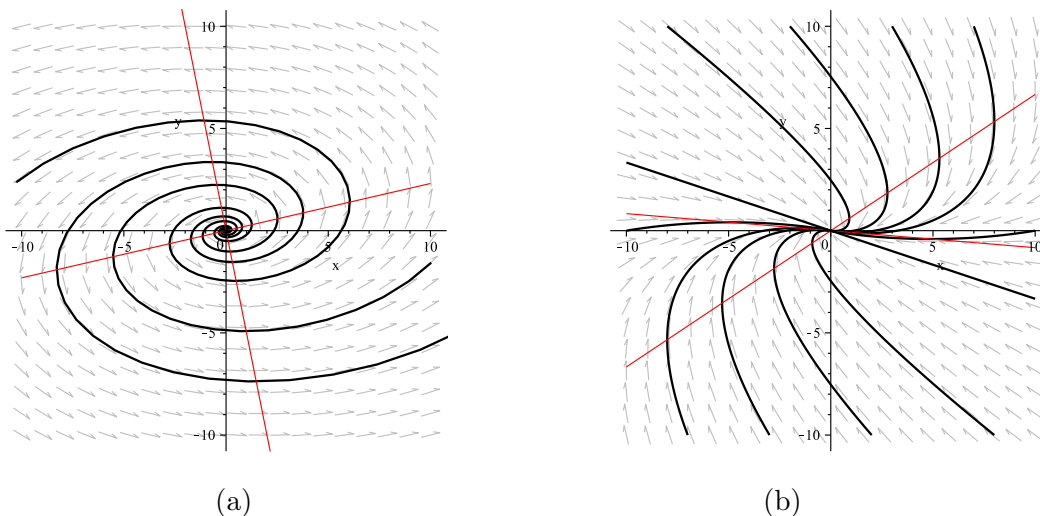
$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = 3y_1(t) - 13y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = 5y_1(t) + y_2(t). \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 - 4\lambda + 68 = 0$. Deze heeft opnieuw geen reële wortels. In het faseportret uit Figuur 6.3(a) zien we dat de banen spiralen zijn die zich van het evenwichtspunt verwijderen als t toeneemt. Het evenwichtspunt $(0, 0)$ is in dit geval niet stabiel.

Men kan verifiëren dat de A.O. van het stelsel gegeven is door

$$\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{2t} (\cos(8t) - 8 \sin(8t)) + C_2 e^{2t} (8 \cos(8t) + \sin(8t)), \\ y_2(t) = 5 C_1 \cos(8t) + 5 C_2 \sin(8t), \end{cases}$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 . Het optreden van de exponentiële functie e^{2t} is verantwoordelijk voor het divergeren van de oplossingen. \square



Figuur 6.3: (a) Faseportret voor het stelsel uit Voorbeeld 6.14; (b) faseportret voor het stelsel uit Voorbeeld 6.15.

Voorbeeld 6.15 Als laatste voorbeeld beschouwen we het stelsel van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = -y_1(t) + \frac{3}{2}y_2(t), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = -\frac{1}{6}y_1(t) - 2y_2(t). \end{cases}$$

De karakteristieke vergelijking is $\lambda^2 + 3\lambda + \frac{9}{4} = 0$. Er zijn twee samenvallende reële wortels, nl. $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{3}{2}$. In het faseportret uit Figuur 6.3(b) zien we dat er slechts één rechte baan is. Ze heeft vergelijking $y_2 = -\frac{1}{3}y_1$. De overige banen zijn krommen en de pijltjes geven aan dat de oplossingen convergeren naar het evenwichtspunt $(0,0)$. Dit is in overeenstemming met het strikt negatief zijn van de eigenwaarde.

Men kan verifiëren dat de A.O. van het stelsel gegeven is door

$$\begin{cases} y_1(t) = -3C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 \left(-3t e^{-\frac{3}{2}t} - 6e^{-\frac{3}{2}t} \right), \\ y_2(t) = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{3}{2}t}, \end{cases}$$

met arbitraire integratieconstanten C_1 en C_2 .

Bezit de coëfficiëntenmatrix van een stelsel van twee homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten twee van nul verschillende eigenwaarden λ_1 en λ_2 en zijn \vec{v}_{λ_1} en \vec{v}_{λ_2} eigenvectoren respectievelijk geassocieerd met λ_1 en λ_2 , dan noemt men de rechten in het fasevlak door $(0,0)$ die gericht zijn volgens deze eigenvectoren de *rechten van eigenvectoren*.

De rechten van eigenvectoren corresponderen met rechte lijnen. De rechte is aantrekkend (resp. afstotend) als voor ieder punt op die rechte de in dat punt vertrekkende oplossing naar het evenwichtspunt convergeert (resp. van het evenwichtspunt wegloopt).

Heeft het stelsel twee aantrekkende rechten van eigenvectoren, dan is het evenwichtspunt $(0,0)$ stabiel. In de andere gevallen is het evenwichtspunt niet stabiel. Is één van de rechten van eigenvectoren aantrekkend en de andere afstotend, dan is het niet-stabiele evenwichtspunt een *zadelpunt*.

Alle punten in het fasevlak waarvoor $\frac{dy_1}{dt} = 0$, liggen op een rechte die de eerste *nulcline* wordt genoemd, en analoog liggen de punten in het fasevlak waarvoor $\frac{dy_2}{dt} = 0$ op de tweede nulcline. In de snijpunten met de eerste nulcline hebben de banen verticale raaklijnen en in de snijpunten met de tweede nulcline hebben de banen horizontale raaklijnen.

6.9 Het continue lineaire roofdier-prooimodel

We vormen nu het discrete roofdier-prooimodel uit Hoofdstuk 3 om tot een continu model. We stellen m.a.w. het aantallen konijnen en vossen als continue reële veranderlijken voor, en meer specifiek stelt de functie $f(t)$ het aantal vossen en $r(t)$ het aantal konijnen op tijdstip t voor. De continue variant van het discreet lineair-roofdier prooimodel uit Hoofdstuk 3.13 is dan het volgende stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = -a f(t) + b r(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = -c f(t) + d r(t). \end{cases}$$

Hierin hebben de constanten a, b, c en d dezelfde betekenis als in het discrete model, mits het tijdsverschil $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ uit het discrete model gelijk wordt gesteld aan de eenheid van tijd in het continue model. Ook onderstellen we nog steeds dat $0 < a < 1, b > 0, c > 0$ en $d > 0$. De coëfficiëntenmatrix A is

$$A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix},$$

en de karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 + (a - d)\lambda - (ad - bc) = 0,$$

met discriminant

$$D = (a - d)^2 + 4(ad - bc) = (a + d)^2 - 4bc.$$

Als $4bc < (a+d)^2$, dan heeft A twee verschillende reële eigenwaarden en kunnen we het model verder op de gebruikelijke manier analyseren.

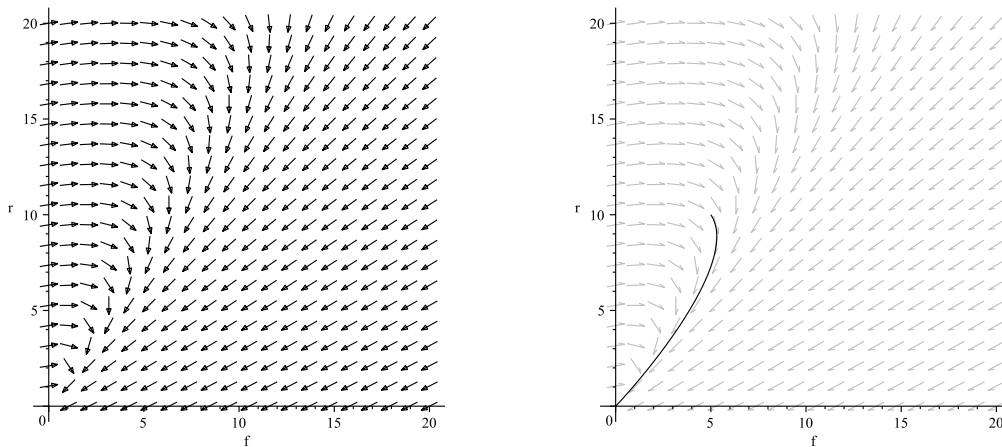
Voorbeeld 6.16 Beschouw het continue lineaire roofdier-prooimodel met de volgende gegevens die zijn overgenomen uit Voorbeeld 3.39: $a = 0.5, b = 0.3, c = 0.25$ en $d = 0.05$. De karakteristieke vergelijking van de coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 \\ -0.25 & 0.05 \end{pmatrix},$$

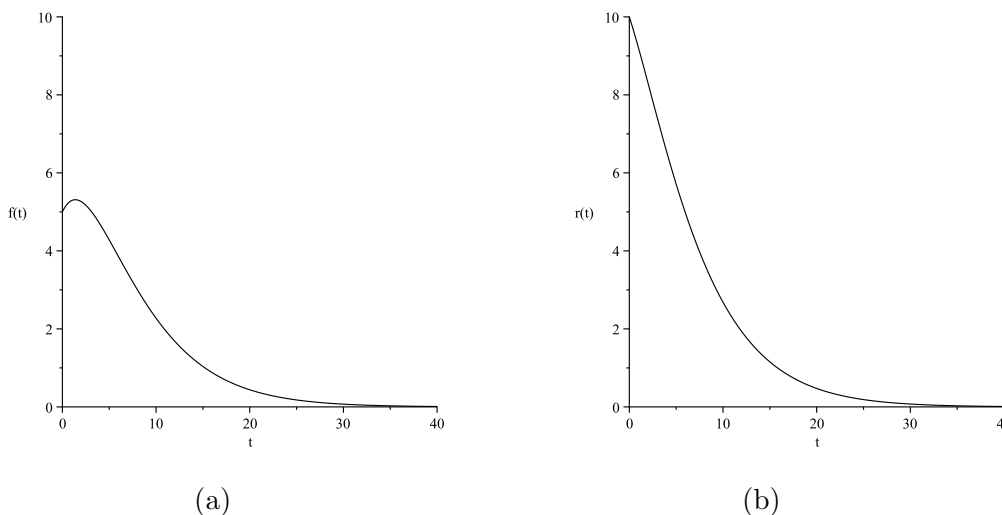
is

$$\lambda^2 - 0.45\lambda + 0.05 = 0.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -0.2$ en $\lambda_2 = -0.25$. Vermits beide eigenwaarden verschillend en strikt negatief zijn, is er convergentie naar het enige evenwichtspunt $(0, 0)$. M.a.w. zowel de vossen als de konijnen sterven op termijn uit, ongeacht de grootte van beide populaties op het begintijdstip.



Figuur 6.4: (a) richtingsveld voor het lineair roofdier-prooi-model met de gegevens van Voorbeeld 6.16; (b) richtingsveld met de baan (oplossing) beginnend bij 5 vossen en 10 konijnen.



Figuur 6.5: (a) Evolutie van (a) het aantal vossen en (b) het aantal konijnen als er aanvankelijk 5 vossen en 10 konijnen zijn.

Het faseportret is in dit geval van het type uit Voorbeeld 6.12, d.w.z. de banen zijn krommen die uitmonden in het evenwichtspunt, en de krommen worden doorlopen naar het evenwichtspunt toe. In Figuur 6.4(a) en (b) tonen we het *richtingsveld* voor de gegeven

parameterwaarden en de baan van de P.O. die begint bij 5 vossen en 10 konijnen. Op de abscis-as tellen we het aantal vossen, op de ordinaat-as het aantal konijnen. Figuur 6.5 bevat de grafische voorstelling van de functies $f(t)$ en $r(t)$ en toont de evolutie van respectievelijk het aantal vossen en konijnen onder dezelfde beginvoorwaarden. \square

Voorbeeld 6.17 We beschouwen opnieuw het continue lineaire roofdier-prooimodel maar met de indexwaarden uit Voorbeeld 3.40, nl. $a = 0.5, b = 0.25, c = 0.8$ en $d = 0.4$. We onderzoeken de evolutie van beide populaties als er op het begintijdstip 10 vossen en 50 konijnen zijn.

Het stelsel differentiaalvergelijkingen is

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = -0.5 f(t) + 0.25 r(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = -0.8 f(t) + 0.4 r(t), \end{cases}$$

met coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 \\ -0.8 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaardevergelijking is

$$\lambda^2 + 0.1\lambda = 0,$$

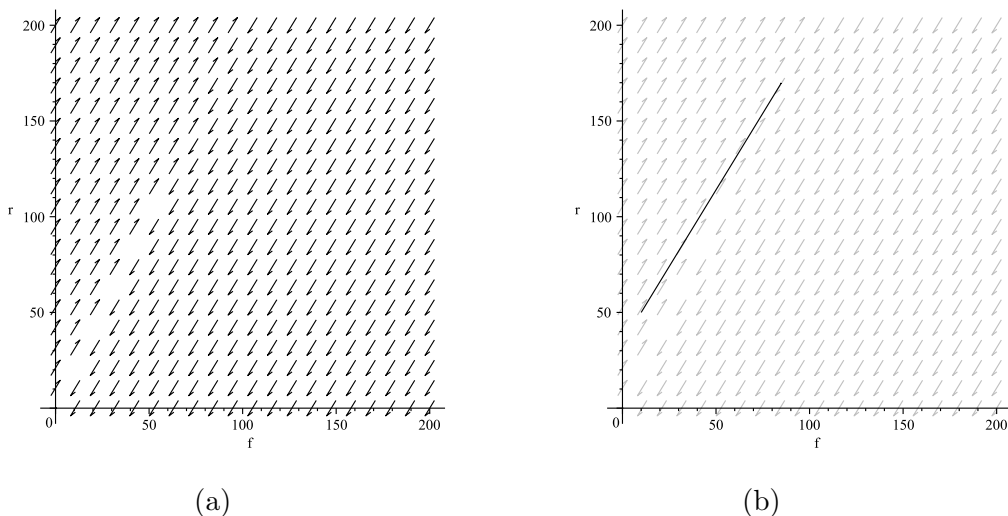
en de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = -0.1$. De A.O. is

$$\begin{cases} f(t) = C_1 + 5 C_2 e^{-0.1t}, \\ r(t) = 2 C_1 + 8 C_2 e^{-0.1t}. \end{cases}$$

Aangezien $\det(A) = 0$, zijn er oneindig veel evenwichtspunten. Ze liggen op de rechte met vergelijking $r = 2f$. Vermits de van nul verschillende eigenwaarde strikt negatief is, zal de oplossing voor om het even welke beginpopulaties convergeren naar een situatie met tweemaal zoveel konijnen als vossen. De evenwichtspunten zijn echter niet stabiel, wat betekent dat bij kleine verandering van de beginsituatie, de eindsituatie ook verandert al blijft in de limiet de verhouding tussen het aantal vossen en konijnen steeds gelijk aan 1 op 2. Zijn er bij aanvang 10 vossen en 50 konijnen, dan lossen we C_1 en C_2 op uit de voorwaarden

$$\begin{cases} 10 = C_1 + 5 C_2, \\ 50 = 2 C_1 + 8 C_2. \end{cases}$$

We vinden $C_1 = 85$ en $C_2 = -15$. Op lange termijn evolueert het ecosysteem naar 85 vossen en 170 konijnen. We zijn dus tot dezelfde conclusie gekomen als bij het discrete model. In Figuur 6.6 tonen we links het richtingsveld en rechts het richtingsveld met de baan die begint bij 10 vossen en 50 konijnen. \square



Figuur 6.6: (a) Richtingsveld voor het lineair roofdier-prooimodel met de gegevens van Voorbeeld 6.17; (b) richtingsveld met de baan (oplossing) beginnend bij 10 vossen en 50 konijnen.

6.10 Stelsels niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde

We beperken deze bespreking tot autonome stelsels van twee niet-lineaire differentiaalvergelijkingen in de veranderlijken $y_1(t), y_2(t)$, nl. stelsels van de vorm:

$$\begin{cases} \frac{dy_1(t)}{dt} = f_1(y_1(t), y_2(t)), \\ \frac{dy_2(t)}{dt} = f_2(y_1(t), y_2(t)), \end{cases}$$

waarbij f_1, f_2 niet-lineaire functies zijn van de veranderlijken y_1 en y_2 . Voor de eenvoud nemen we aan dat f_1 en f_2 *veeltermfuncties* zijn. Het is slechts in uitzonderlijke gevallen mogelijk om de A.O. van zo'n stelsel met behulp van elementaire functies uit te drukken. Daarom moeten we beroep doen op *numerieke methoden* om met behulp van een computer een goede benadering van een of meer P.O. te vinden. Toch is het mogelijk om het gedrag van de A.O. op lange termijn te bepalen zonder dat de A.O. gekend is.

Laten we vooreerst op de gebruikelijke manier nagaan of er evenwichtspunten zijn. We stellen daartoe de afgeleiden van de veranderlijken y_1 en y_2 gelijk aan nul en zoeken naar constante oplossingen van het stelsel algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{cases} f_1(y_1(t), y_2(t)) = 0, \\ f_2(y_1(t), y_2(t)) = 0. \end{cases}$$

Onderstel dat $y_1(t) = p_1, y_2(t) = p_2$ zo een oplossing is, dan is de kolommatrix

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

een evenwichtspunt. Er geldt dat

$$\begin{cases} f_1(p_1, p_2) = 0, \\ f_2(p_1, p_2) = 0. \end{cases}$$

Om na te gaan of het evenwichtspunt stabiel is, zullen we het stelsel differentiaalvergelijkingen rond dat evenwichtspunt *lineariseren*. We definiëren daartoe eerst de nieuwe veranderlijken

$$z_1(t) = y_1(t) - p_1, \quad z_2(t) = y_2(t) - p_2.$$

Aangezien

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{dy_1(t)}{dt}, \quad \frac{dz_2(t)}{dt} = \frac{dy_2(t)}{dt},$$

voldoen de nieuwe veranderlijken aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = f_1(z_1(t) + p_1, z_2(t) + p_2) = g_1(z_1(t), z_2(t)), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = f_2(z_1(t) + p_1, z_2(t) + p_2) = g_2(z_1(t), z_2(t)). \end{cases}$$

De kolommatrix

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O_{2 \times 1},$$

is een evenwichtspunt van het nieuwe stelsel differentiaalvergelijkingen. We lineariseren vervolgens de veeltermfuncties g_1, g_2 door alleen de termen die lineair zijn in z_1 en z_2 over te houden. Aldus bekomen we een stelsel van twee homogene lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde met $(0, 0)$ als evenwichtspunt. Is dat evenwichtspunt stabiel, dan is P een stabiel evenwichtspunt van het oorspronkelijke stelsel. In dat geval zal een oplossing die voldoende dicht in de buurt van P komt, naar dit stabiel evenwichtspunt convergeren.

6.11 Het Lotka-Volterra roofdier-prooi model

Het (continue) lineaire roofdier-prooi model voldoet slechts matig om de evolutie van interagerende populaties roofdieren en prooien in reële ecologische omstandigheden weer te geven. Blijkbaar slagen de populaties er in de natuur in elkaar in evenwicht te houden hoewel de omvang van beide populaties afwisselend toeneemt en afneemt.

Het *Lotka-Volterra model* is een wijziging van het lineaire roofdier-prooi model, waarbij de lineaire interactietermen vervangen worden door kwadratische termen, meer in het bijzonder door termen die het product zijn van beide populatiegroottes. Het standaard Lotka-Volterra model is gegeven door:

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = -a f(t) + b r(t) f(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = -c f(t) r(t) + d r(t), \end{cases}$$

waarbij zoals voorheen $f(t)$ en $r(t)$ respectievelijk de populatieomvang van vossen (roofdieren) en konijnen (prooien) voorstellen. De parameters a, b, c, d hebben nog steeds strikt positieve waarden.

We gaan eerst na of er evenwichtspunten zijn. We lossen daartoe het stelsel

$$\begin{cases} -a f(t) + b f(t) r(t) = 0, \\ -c f(t) r(t) + d r(t) = 0, \end{cases}$$

op naar $f(t)$ en $r(t)$. Uit de eerste vergelijking volgt dat $f(t) = 0$ of $r(t) = \frac{a}{b}$, en uit de tweede vergelijking volgt dat $r(t) = 0$ of $f(t) = \frac{d}{c}$. Er zijn bijgevolg twee evenwichtspunten, nl.

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{c} \\ \frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

Beschouwen we het eerste evenwichtspunt $P^{(1)}$. We hoeven geen nieuwe veranderlijken in te voeren en kunnen onmiddellijk het stelsel lineariseren. We verkrijgen het homogene lineaire stelsel

$$\begin{cases} \frac{df(t)}{dt} = -a f(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = d r(t), \end{cases}$$

met coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden zijn $-a$ en d , d.i. één strikt positieve en één strikt negatieve eigenwaarde. Het nulpunt is een zadelpunt en dus ook een instabiel evenwichtspunt.

Beschouwen we vervolgens het tweede evenwichtspunt $P^{(2)}$. We definiëren de nieuwe veranderlijken

$$z_1(t) = f(t) - \frac{d}{c}, \quad z_2(t) = r(t) - \frac{a}{b}.$$

Deze nieuwe veranderlijken voldoen aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -a \left(z_1(t) + \frac{d}{c} \right) + b \left(z_1(t) + \frac{d}{c} \right) \left(z_2(t) + \frac{a}{b} \right), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -c \left(z_1(t) + \frac{d}{c} \right) \left(z_2(t) + \frac{a}{b} \right) + d \left(z_2(t) + \frac{a}{b} \right), \end{cases}$$

of, na uitwerking van de rechterleden en verdere vereenvoudiging,

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{bd}{c} z_2(t) + b z_1(t) z_2(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -\frac{ac}{b} z_1(t) - c z_1(t) z_2(t). \end{cases}$$

Dit stelsel wordt vervolgens gelineariseerd en we verkrijgen het stelsel homogene lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = \frac{bd}{c} z_2(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -\frac{ac}{b} z_1(t), \end{cases}$$

met coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

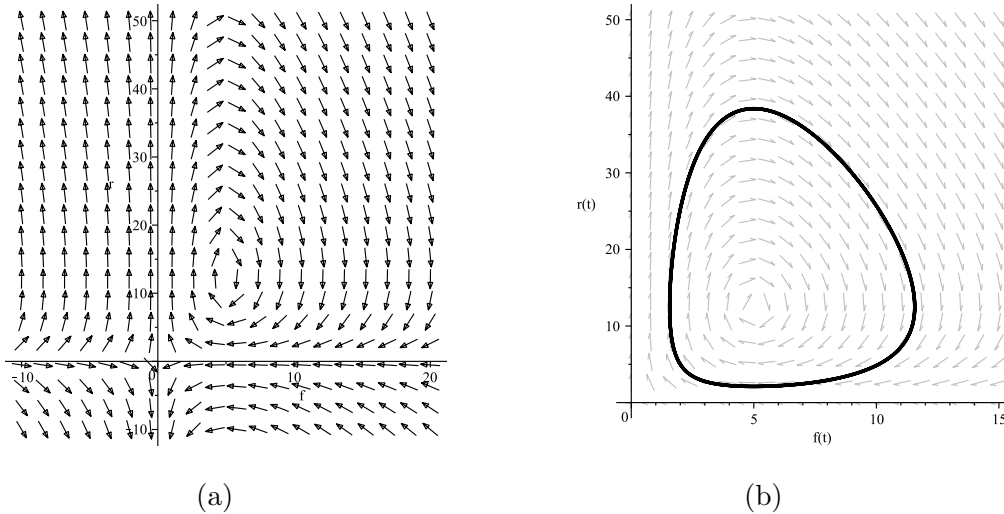
Het nulpunt is een evenwichtspunt. De karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + ad = 0,$$

heeft geen reële oplossingen. Het nulpunt is bijgevolg een instabiel evenwichtspunt. We besluiten dat ook $P^{(2)}$ een instabiel evenwichtspunt is van de gegeven Lotka-Volterra vergelijkingen.

Voorbeeld 6.18 We bestuderen thans de Lotka-Volterra vergelijkingen voor de parameterwaarden $a = 0.5$, $b = 0.04$, $c = 0.2$ en $d = 1$. De twee instabiele evenwichtspunten zijn

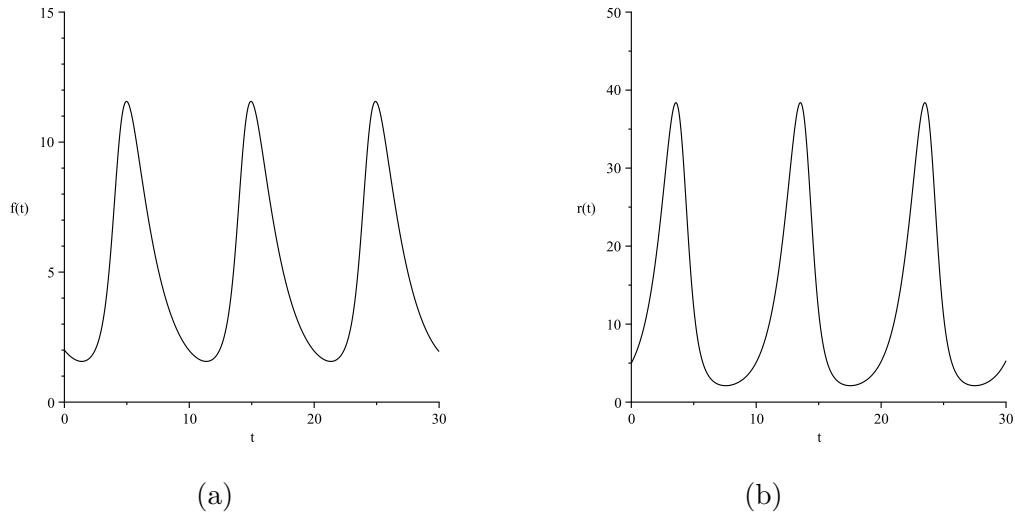
$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12.5 \end{pmatrix}.$$



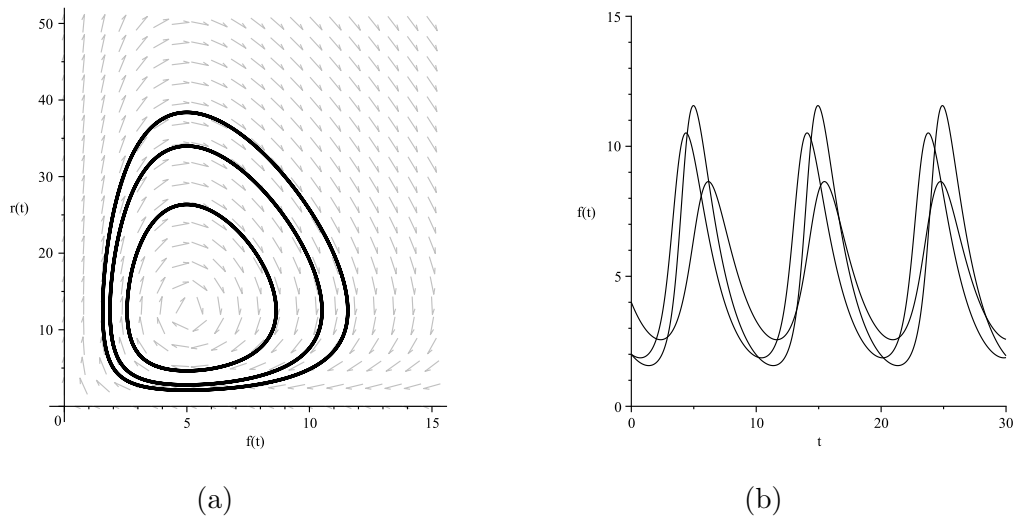
Figuur 6.7: (a) Richtingsveld voor het Lotka-Volterra model met parameterwaarden $a = 0.5$, $b = 0.04$, $c = 0.2$ en $d = 1$; (b) richtingsveld en baan (oplossing) beginnend bij 5 konijnen en 2 vossen.

In Figuur 6.7(a) tonen we het richtingsveld van de Lotka-Volterra vergelijkingen voor de gegeven parameterwaarden. We herkennen er duidelijk de twee evenwichtspunten in en zien ook uit de oriëntatie van de pijltjes dat geen van beide evenwichtspunten stabiel is. Er is echter een aanwijzing dat rond het tweede evenwichtspunt gesloten banen voorkomen. Zo een periodieke oplossing is getekend in Figuur 6.7(b). Het is de oplossing die aanvangt bij 5 konijnen en 2 vossen. De cyclisch variërende populatieomvang van vossen en konijnen is grafisch voorgesteld in Figuur 6.8; het zijn zuiver periodieke functies. Toch houden beide populaties elkaar in evenwicht.

Het is kenmerkend voor het Lotka-Volterra model dat er een evenwichtspunt is waarrond cyclische banen voorkomen. Verandert men heel weinig aan de beginwaarden, dan wordt over het algemeen een verschillende baan gevolgd.



Figuur 6.8: De evolutie van (a) het aantal vossen en (b) het aantal konijnen in het Lotka-Volterra model met parameterwaarden $a = 0.5$, $b = 0.04$, $c = 0.2$ en $d = 1$ en beginnend met 2 vossen en 5 konijnen.



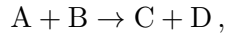
Figuur 6.9: (a) (b) Richtingsveld en banen (oplossingen) respectievelijk beginnend bij 2 vossen en 5 konijnen (buitenste kromme), 2 vossen en 8 konijnen (middelste kromme), 4 vossen en 5 konijnen (binnenste kromme); (b) de evolutie van het aantal vossen voor de drie stellen beginwaarden in (a).

Dit wordt geïllustreerd in Figuur 6.9(a). Voor de parameterwaarden $a = 0.5$, $b = 0.04$, $c = 0.2$ en $d = 1$ zijn 3 oplossingen weergegeven die geassocieerd zijn met de volgende stellen beginwaarden: 2 vossen en 5 konijnen, 2 vossen en 8 konijnen, 4 vossen en 5 konijnen. De banen in het fasevlak zijn verschillend. Ook de periode waarmee die banen cyclisch worden doorlopen verschillen, zoals men kan zien uit Figuur 6.9(b), waar voor de verschillende stellen beginwaarden de evolutie van het aantal vossen in de tijd is uitgezet. \square

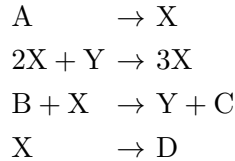
6.12 De Brusselator

De *Brusselator* is een model waarmee oscillerende autokatalytische chemische reacties worden beschreven. Het werd in 1968 ontwikkeld onder andere door de Belgische chemicus en Nobelprijswinnaar I. Prigogine. De term Brusselator is de contractie van de woorden 'Brussel' en 'oscillator', en werd aan het model gegeven als eerbetoon aan Prigogine die hoogleraar was aan de ULB in Brussel.

De bestudeerde chemische reactie is van het type



waarbij de chemische componenten A en B reageren en de componenten C en D vormen. De reactie gebeurt echter via twee autokatalytische componenten X en Y en het volledig reactiepatroon ziet er als volgt uit:



Experimenteel was vastgesteld dat in sommige omstandigheden de concentraties van X en Y, en dus ook van C en D, een cyclisch verloop kennen, waarbij de periode van de cyclus een constante is die onafhankelijk blijkt te zijn van de initiële concentraties van de componenten A en B. Laten we het cyclisch gedrag van de concentraties van X en Y modelleren.

Het Lotka-Volterra model biedt ruimte voor de verklaring van cyclisch gedrag, maar we hebben gezien dat de periode sterk van de beginwaarden afhangt. De Brusselator is een model dat die tekortkoming van het Lotka-Volterra model niet vertoont. Stellen we door $x(t)$ en $y(t)$ respectievelijk de concentraties van X en Y voor, dan is het Brusselatormodel van de chemische autokatalytische reacties gegeven door

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ax^2(t)y(t), \end{cases}$$

met a en b strikt positieve gegeven constanten. Het is een autonoom stelsel niet-homogene niet-lineaire differentiaalvergelijkingen. De interactieterm is in tegenstelling tot het Lotka-Volterra model niet kwadratisch maar kubisch (van derde graad).

We gaan eerst na of er evenwichtspunten zijn. We lossen daartoe het stelsel

$$\begin{cases} 1 - (b+1)x(t) + ax^2(t)y(t) = 0, \\ bx(t) - ax^2(t)y(t) = 0, \end{cases}$$

op naar $x(t), y(t)$. Tellen we de twee vergelijkingen lid aan lid op, dan volgt onmiddellijk dat $x(t) = 1$, en door substitutie van die waarde voor $x(t)$ in de tweede vergelijking, vinden we dat $y(t) = b/a$. Bijgevolg is

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix},$$

het enige evenwichtspunt. We onderzoeken nu de stabiliteit van dit evenwichtspunt. We definiëren daartoe de nieuwe veranderlijken

$$z_1(t) = x(t) - 1, \quad z_2(t) = y(t) - \frac{b}{a}.$$

In de nieuwe veranderlijken verkrijgen we het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = 1 - (b+1)(z_1(t)+1) + a(z_1(t)+1)^2 \left(z_2(t) + \frac{b}{a} \right), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = b(z_1(t)+1) - a(z_1(t)+1)^2 \left(z_2(t) + \frac{b}{a} \right), \end{cases}$$

Linearisering van dit stelsel leidt tot het niet-homogene stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = (b-1)z_1(t) + az_2(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = -bz_1(t) - az_2(t), \end{cases}$$

met $O_{2 \times 1}$ als enig evenwichtspunt. De karakteristieke vergelijking is

$$\lambda^2 + (a-b+1)\lambda + a = 0,$$

met discriminant $D = (a-b+1)^2 - 4a$. Als $b \geq (\sqrt{a}+1)^2$, dan is $D \geq 0$ en heeft de vergelijking reële wortels. Aangezien $(\sqrt{a}+1)^2 = a+1+2\sqrt{a} > a+1$ is de som van deze wortels positief. Er zijn in dat geval dus twee reële positieve eigenwaarden en het evenwichtspunt is instabiel. Als $D < 0$, dan heeft de vergelijking geen reële wortels en is het evenwichtspunt evenmin stabiel. Dit sluit echter niet uit dat er gesloten banen rond dit evenwichtspunt kunnen voorkomen, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 6.19 We onderzoeken het Brusselatormodel voor de parameterwaarden $a = 1$ en $b = 3$. Het stelsel differentiaalvergelijkingen is

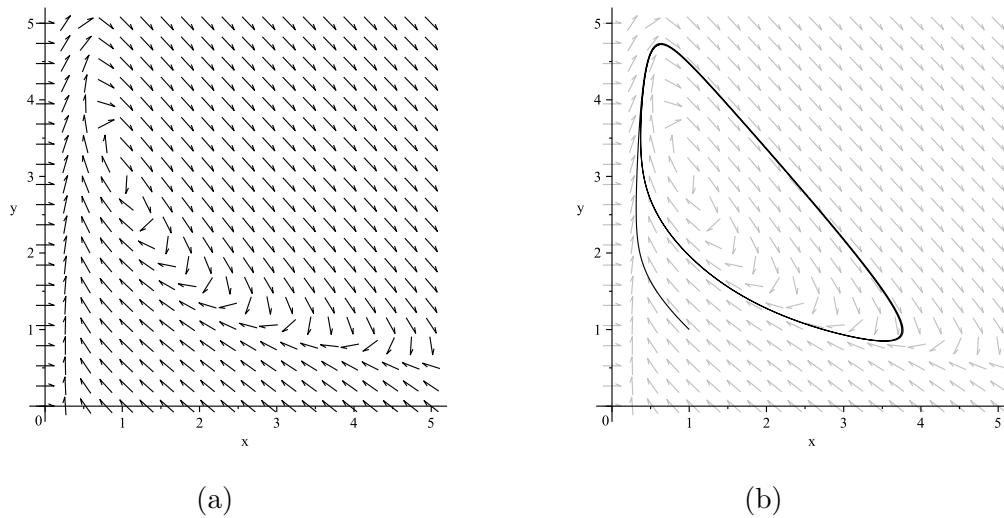
$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = 1 - 4x(t) + x^2(t)y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) - x^2(t)y(t). \end{cases}$$

Het evenwichtspunt is

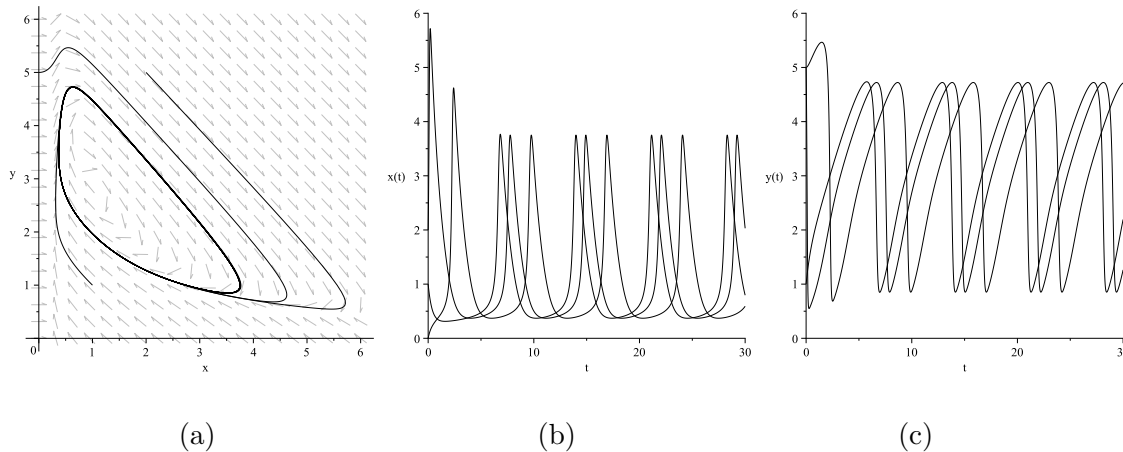
$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

In Figuur 6.10(a) tonen we het richtingsveld van deze Brusselator voor de gegeven parameterwaarden. We herkennen er het evenwichtspunt in en zien ook uit de oriëntatie van de pijltjes dat dit evenwichtspunt instabiel is. Er is echter een aanwijzing dat rond het evenwichtspunt gesloten banen voorkomen. Zo een periodieke oplossing is getekend in Figuur 6.10(b). Het is de oplossing die aanvangt bij $x(t_0) = y(t_0) = 1$. We bemerken dat de baan een aanloop neemt en in de buurt van $x(t) = 0.5, y(t) = 4$, in een cyclische baan overgaat.

Deze cyclische baan is heel robuust, wat wil zeggen dat met andere beginwaarden de oplossing op termijn in dezelfde periodieke baan terechtkomt. Dit wordt geïllustreerd in



Figuur 6.10: (a) Richtingsveld voor het Brusselatormodel met parameterwaarden $a = 1, b = 3$; (b) richtingsveld en baan (oplossing) beginnend bij $x = y = 1$.



Figuur 6.11: (a) Richtingsveld voor het Brusselatormodel met parameterwaarden $a = 1, b = 3$ en banen (oplossingen) beginnend bij $x = y = 1, x = 2, y = 5$ en $x = 0, y = 5$; (b) evolutie van $x(t)$; (c) evolutie van $y(t)$.

Figuur 6.11(a). We tonen daar hoe voor drie verschillende stellen van beginwaarden (beginconcentraties van de componenten X en Y) telkens na verloop van tijd dezelfde periodieke wisseling van de concentraties van X en Y gevonden wordt. Dat ook de periode telkens dezelfde blijft, wordt bevestigd in Figuur 6.11(b) en (c) waar we voor de drie stellen van beginwaarden respectievelijk de evolutie van x en y weergeven.

We mogen besluiten dat het model heel goed oscillerende autokatalytische chemische reacties nabootst. □

6.13 Het SIR epidemiologisch model

De uitbraak, verspreiding en beheersing van besmettelijke ziektes zijn onderwerp van vele epidemiologische studies. In het belang van de volksgezondheid of van het dierenwelzijn wil het verloop van een epidemie kunnen voorspellen, dit om tijdig een efficiënt inentingsprogramma op punt te stellen of gepaste profylactische maatregelen te treffen. In deze sectie bespreken we een eenvoudig epidemiologisch model, het zogenaamde *SIR-model*.

In het SIR-model onderstellen we dat de totale populatie een constante grootte N aanhoudt. De populatie wordt voorts verdeeld in drie *compartimenten* die met de verschillende stadia van een besmettelijke ziekte overeenkomen, nl.:

- $S(t)$: het aantal voor de ziekte ontvankelijke individuen, of niet-immune personen (Engels: Susceptibles);
- $I(t)$: het aantal besmette individuen, zowel zieken als ziektedragers; het zijn zij die anderen kunnen besmetten (Engels: Infectives);
- $R(t)$: het aantal voor de ziekte immune individuen, die geen besmettingsgevaar meer voor anderen opleveren (Engels: Recovered of Removed with immunity).

In dit model geldt dat ieder individu tot juist één van de drie compartimenten behoort, m.a.w. de gelijkheid

$$S(t) + I(t) + R(t) = N,$$

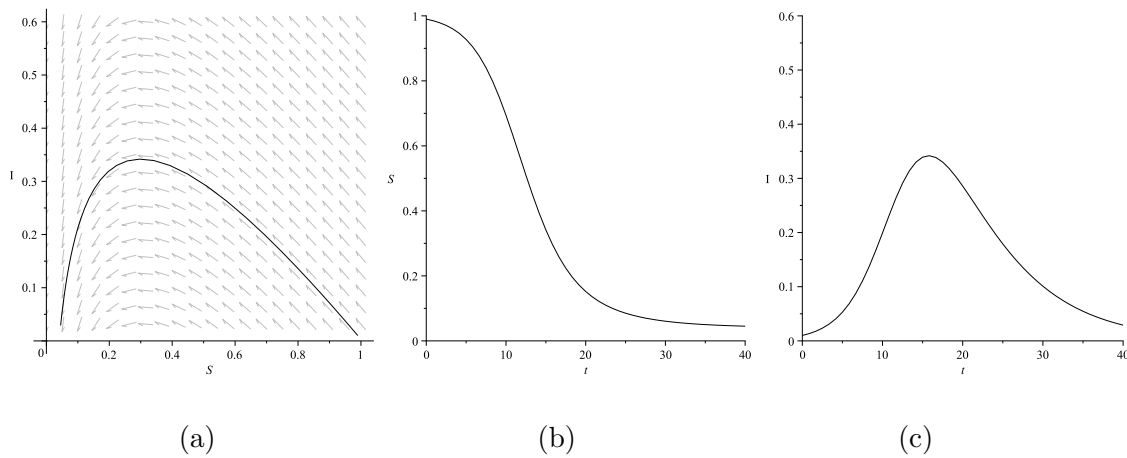
blijft op ieder tijdstip t voldaan.

In 1927 stelden Kermack en McKendrick een model op basis van de volgende differentiaalvergelijkingen voor:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t) I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t) I(t) - \beta I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t). \end{cases}$$

Ze steunden hun differentiaalvergelijkingen op een aantal eenvoudige onderstellingen. Ten eerste namen ze aan dat ieder individu dezelfde kans α heeft om met de ziekte in aanraking te komen (via de lucht, huidcontact, de bloedbaan, enz.). De parameter α stelt dus de *contact- of infectiegraad* van de ziekte voor (d.i. het gemiddeld aantal individuen waarmee een besmet individu per tijdseenheid in contact komt). Ieder besmet individu is in staat om de ziekte over te dragen aan αN individuen per tijdseenheid, maar slechts de fractie $\frac{S}{N}$ daarvan wordt effectief besmet. Bijgevolg is per tijdseenheid het aantal nieuw geïnfecteerden per reeds besmette persoon gelijk aan αS en het totaal aantal nieuw geïnfecteerden per tijdseenheid is dan gelijk aan $\alpha S I$. Ten slotte namen ze aan dat besmette individuen met relatieve snelheid β hetzij genezen hetzij immuun worden en derhalve niet langer andere individuen kunnen besmetten.

In Figuur 6.12 tonen we links het richtingsveld in het Kermack-McKendrick model met parameterwaarden $\alpha = 0.5$ en $\beta = 0.15$ en midden en rechts respectievelijk $S(t)$ en $I(t)$ voor de beginsituatie waarbij 1% van de bevolking geïnfecteerd en 99% ontvankelijk is voor de ziekte. We zien duidelijk dat het nulpunt een stabiel evenwichtspunt is.



Figuur 6.12: (a) Richtingsveld in het Kermack-McKendrick model met parameterwaarden $\alpha = 0.5$ en $\beta = 0.15$ en baan startend in $S = 0.99$ en $I = 0.01$; (b) evolutie van S ; (c) evolutie van I .

Dit model houdt er geen rekening mee dat er door geboorte niet-immune personen in de populatie bijkomen en door sterfte uit alle compartimenten individuen verdwijnen. Houden we de totale bevolking constant en gelijk aan N , dan vinden we, rekening houdend met geboorte en sterfte, het SIR model

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t) I(t) - \mu S(t) + \mu N, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t) I(t) - \beta I(t) - \mu I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t) - \mu R(t). \end{cases}$$

Merk op dat

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0,$$

zodat $S(t) + I(t) + R(t)$ inderdaad constant blijft.

Aangezien de som van de drie variabelen constant is, hoeven we nog slechts de differentiaalvergelijkingen voor $S(t)$ en $I(t)$ in acht te nemen. De functie $R(t)$ volgt dan uit de vergelijking $R(t) = N - S(t) - I(t)$. Het gereduceerde stelsel differentiaalvergelijkingen is

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t) I(t) - \mu S(t) + \mu N, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t) I(t) - \beta I(t) - \mu I(t). \end{cases}$$

Laten we de evenwichtspunten bepalen. We lossen daartoe $S(t)$ en $I(t)$ op uit het stelsel algebraïsche vergelijkingen

$$\begin{cases} -\alpha S(t) I(t) - \mu S(t) + \mu N = 0, \\ \alpha S(t) I(t) - \beta I(t) - \mu I(t) = 0. \end{cases}$$

Er zijn twee oplossingen:

$$P^{(1)} = \begin{pmatrix} S^{(1)}(t) \\ I^{(1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(2)} = \begin{pmatrix} S^{(2)}(t) \\ I^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\mu}{\alpha} \\ \frac{\mu(\alpha N - \beta - \mu)}{\alpha(\beta+\mu)} \end{pmatrix}.$$

Onderzoeken we de stabiliteit van het eerste evenwichtspunt $P^{(1)}$. We voeren de nieuwe veranderlijken

$$z_1(t) = S(t) - N, \quad z_2(t) = I(t),$$

in. Ze voldoen aan het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -\alpha(z_1(t) + N)z_2(t) - \mu(z_1(t) + N) + \mu N, \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = \alpha(z_1(t) + N)z_2(t) - \beta z_2(t) - \mu z_2(t). \end{cases}$$

Na linearisering hebben we dat

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = -\alpha N z_2(t) - \mu z_1(t), \\ \frac{dz_2(t)}{dt} = \alpha N z_2(t) - \beta z_2(t) - \mu z_2(t), \end{cases}$$

of nog

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt}(t) = -\mu z_1(t) - \alpha N z_2(t), \\ \frac{dz_2}{dt}(t) = (\alpha N - \beta - \mu)z_2(t). \end{cases}$$

De coëfficiëntenmatrix is

$$A = \begin{pmatrix} -\mu & -\alpha N \\ 0 & \alpha N - \beta - \mu \end{pmatrix},$$

en de karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 - (\alpha N - \beta - 2\mu)\lambda - \mu(\alpha N - \beta - \mu) = 0,$$

heeft discriminant

$$D = (\alpha N - \beta - 2\mu)^2 + 4\mu(\alpha N - \beta - \mu) = (\alpha N)^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta N = (\alpha N - \beta)^2.$$

De twee eigenwaarden zijn:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha N - \beta - 2\mu + \alpha N - \beta) = \alpha N - \beta - \mu, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha N - \beta - 2\mu - \alpha N + \beta) = -\mu.$$

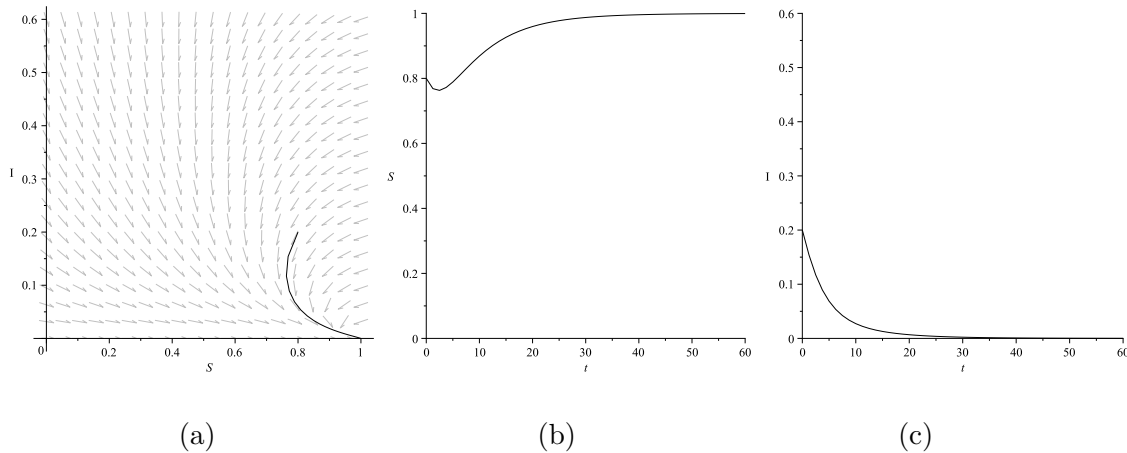
Merk op dat $\lambda_2 < 0$. Opdat het evenwichtspunt stabiel zou zijn moet ook de andere eigenwaarde strikt negatief zijn, m.a.w. er moet gelden dat

$$\alpha N < \beta + \mu.$$

Op analoge wijze kunnen we aantonen dat het tweede evenwichtspunt stabiel is als de complementaire voorwaarde $\alpha N > \beta + \mu$ vervuld is. We kunnen dus het volgende besluiten:

- Als $\alpha N < \beta + \mu$, dan zal het systeem op termijn evolueren naar de stationaire toestand zonder besmette personen ($I = 0$) maar met een populatie die in zijn geheel gevoelig blijft voor nieuwe besmetting ($S = N$). Dit is de situatie van een uitstervende epidemie.
- Als $\alpha N > \beta + \mu$, dan zal het systeem evolueren naar een stationaire toestand waarbij er een constante verhouding tot stand komt tussen ziektegevoelige, ziektedragende en immune individuen. Dit is de situatie van een doorbraak van de epidemie. De ziekte blijft dan permanent in de populatie aanwezig.

Het verschil in gedrag naargelang αN kleiner of groter is dan $\beta + \mu$, blijkt uit de Figuren 6.13–6.14 die het gedrag van S en I tonen voor $N = 1$, $\alpha = 0.5$ en respectievelijk $\beta = 0.4$, $\mu = 0.2$ en $\beta = 0.2$, $\mu = 0.1$. In het eerste geval is het evenwichtspunt $(1, 0)$ stabiel, in het tweede geval is er een stabiel evenwichtspunt $(0.6, 0.133)$.

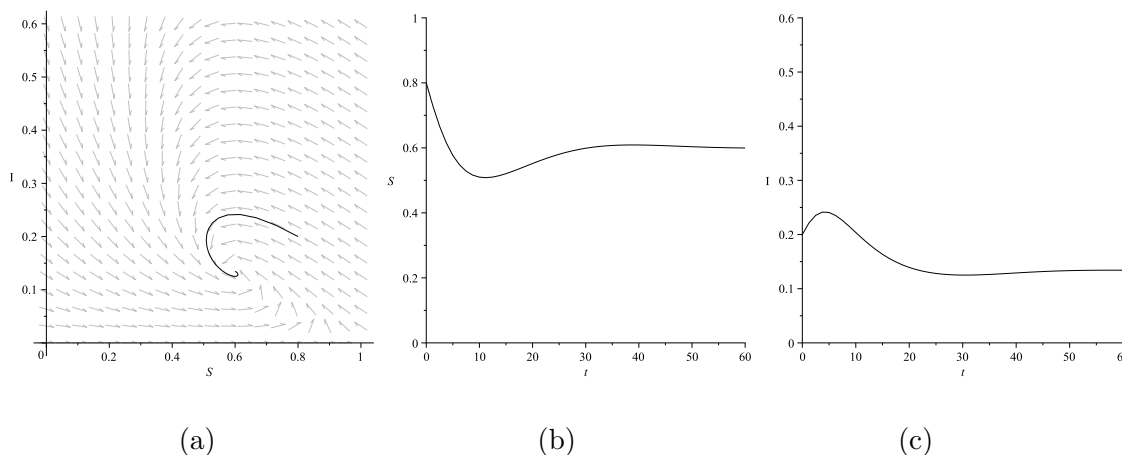


Figuur 6.13: (a) Richtingsveld in het SIR model met parameterwaarden $N = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$ en $\mu = 0.2$ en baan startend bij $S = 0.8$ en $I = 0.2$; (b) evolutie van S ; (c) evolutie van I .

Om de epidemie te laten uitsterven moeten we α dus zo klein mogelijk houden, m.a.w. we moeten ervoor zorgen dat besmette individuen zo weinig mogelijk met andere individuen in contact komen (isolatie van besmette individuen). De parameter β is eigen aan de ziekte en kan niet zomaar onder controle gehouden worden. De parameter μ is enkel significant als β klein is, dus als de besmettelijke ziekte slechts op heel lange termijn te genezen is (zoals bijvoorbeeld bij aids).

6.14 Modelling van virale blips

Heden ten dage worden infecties met het hiv-virus (het retrovirus dat aids veroorzaakt) behandeld met een combinatie van hiv-remmers die de productie van het virus zodanig afremmen (de zogenaamde haart-therapie of Highly Active AntiRetroviral Therapy) dat de hoeveelheid viruskopieën of viremia in het bloed onmeetbaar laag gehouden wordt (dat wil zeggen onder de 50 viremia / milliliter bloed). We spreken van een virale blip als er bij een patiënt die de hiv-remmers gebruikt opeens wel kortstondig sprake is van een meetbare hoeveelheid van het



Figuur 6.14: (a) Richtingsveld in het SIR model met parameterwaarden $N = 1, \alpha = 0.5, \beta = 0.2$ en $\mu = 0.1$ en baan startend bij $S = 0.8$ en $I = 0.2$; (b) evolutie van S ; (c) evolutie van I .

virus in het bloed, terwijl de voorafgaande waarde en de er opvolgende waarde onmeetbaar laag zijn. Deze blips die zich soms met tussenperiodes van verschillende maanden herhalen, komen in de praktijk vaak voor en betekenen geen falen van de therapie.

Het hiv-virus infecteert specifiek de $CD4^+$ T-cellen van het immuunsysteem. Een besmette $CD4^+$ T-cel kan ofwel productief geïnfecteerd zijn, wat betekent dat deze cel nieuwe virale kopieën aanmaakt, ofwel latent geïnfecteerd zijn, waardoor ze in een niet-productieve rustfase verkeert. Enkel de productief-geïnfecteerde cellen kunnen door het immuunsysteem herkend en aangevallen worden en dus met virus-remmers bestreden worden. De latent-geïnfecteerde cellen kunnen echter herhaaldelijk en tijdelijk geactiveerd worden. Dit proces dat virale blips veroorzaakt kan als volgt gemodelleerd worden.

Stel door $x(t)$ en $y(t)$ respectievelijk de dichtheid van niet-geïnfecteerde en van productief-geïnfecteerde $CD4^+$ T-cellen voor. De evolutie van beide populatiedichtheden wordt beschreven door het volgende stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van eerste orde.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \beta - d_1 x(t) - \left(b + \frac{a y(t)}{y(t)+c}\right) x(t) y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \left(b + \frac{a y(t)}{y(t)+c}\right) x(t) y(t) - d_2 y(t), \end{cases}$$

met parameters a, b, c, d_1, d_2 en β . De parameter β stelt de productiesnelheid van constant aangemaakte nieuwe (niet-geïnfecteerde) $CD4^+$ T-cellen voor en d_1, d_2 zijn de (natuurlijke) sterftecoëfficiënten (per cel) van respectievelijk niet-geïnfecteerde en productief-geïnfecteerde cellen. Het proces waarbij niet-geïnfecteerde cellen in productief-geïnfecteerde cellen via latent-geïnfecteerde cellen worden omgezet, wordt beschreven door de infectiviteitscoëfficiënt $b + (a y(t))/(y(t) + c)$ die een niet-lineaire functie van $y(t)$ is. Het is deze niet-lineaire terugkoppeling die virale blips kan modelleren.

Om de analyse van dit stelsel differentiaalvergelijkingen te vereenvoudigen, worden de veranderlijken als volgt herschaald:

$$x(t) = \frac{\beta}{d_2} X(t), \quad y(t) = \frac{\beta}{d_2} Y(t), \quad t = \frac{1}{d_2} \tau,$$

en stellen we

$$A = \frac{a\beta}{d_2^2}, \quad B = \frac{b\beta}{d_2^2}, \quad C = \frac{cd_2}{\beta}, \quad D = \frac{d_1}{d_2}.$$

Hiermee wordt het stelsel omgezet in het equivalente stelsel:

$$\begin{cases} \frac{dX(\tau)}{d\tau} = 1 - DX(\tau) - \left(B + \frac{AY(\tau)}{Y(\tau)+C}\right) X(\tau)Y(\tau), \\ \frac{dY(\tau)}{d\tau} = \left(B + \frac{AY(\tau)}{Y(\tau)+C}\right) X(\tau)Y(\tau) - Y(\tau), \end{cases}$$

We bepalen eerst de evenwichtspunten. Ze worden gevonden als de oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} 1 - DX - \left(B + \frac{AY}{Y+C}\right) XY = 0, \\ \left(B + \frac{AY}{Y+C}\right) XY - Y = 0. \end{cases}$$

Het is gemakkelijk na te gaan dat er drie evenwichtspunten zijn, maar slechts twee daarvan zijn biologisch relevant (t.t.z. hebben positieve X en Y), namelijk

$$P_1 = (X_1, Y_1) = \left(\frac{1}{D}, 0\right) \quad \text{en} \quad P_2 = (X_2, Y_2) = \left(\frac{1-S}{D}, S\right),$$

waarbij

$$S = \frac{1}{2(A+B)} \left(A + B - BC - D + \sqrt{(A+B-BC+D)^2 - 4ACD} \right).$$

De stabiliteitsanalyse voor het evenwichtspunt P_1 is eenvoudig. We lineariseren het stelsel rond P_1 en stellen dan vast dat de eigenwaarden van de coëfficiëntenmatrix allebei negatief zijn als $B < D$ en dat één eigenwaarde positief en de andere eigenwaarde negatief is als $B > D$. In het eerste geval is P_1 een aantrekkend evenwichtspunt (in de onmiddellijke omgeving van P_1); in het laatste geval is P_1 een niet stabiel evenwichtspunt van het type van een zadelpunt. Het onderzoek van de stabiliteit van het tweede evenwichtspunt P_2 is ingewikkeld. We zullen daarom, vanaf hier de parameterwaarden vastleggen.

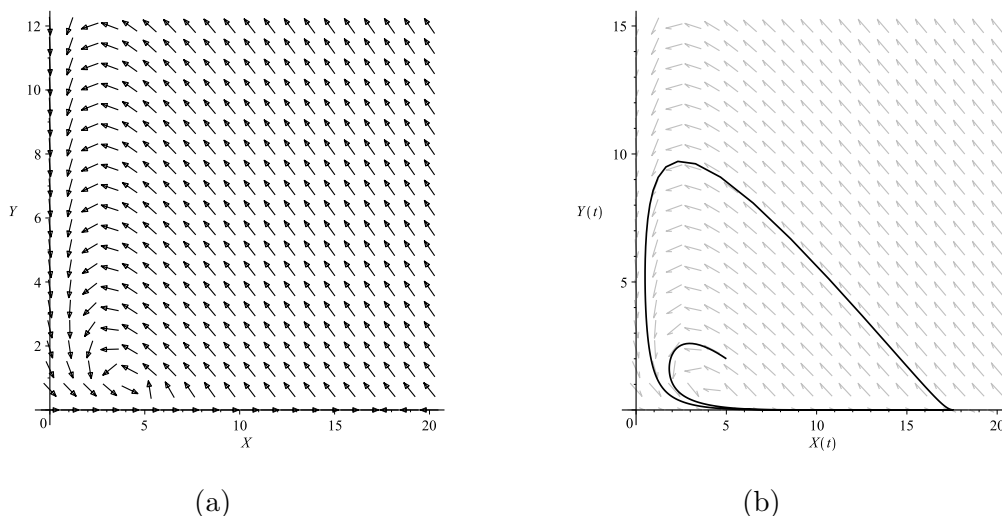
Een realistische keuze van parameterwaarden is:

$$A = 0.364, \quad B = 0.060, \quad C = 0.823, \quad D = 0.057.$$

Voorts is $d_2 = 1$ gekozen, zodat de tijdschaal in τ overeenstemt met de oorspronkelijke tijdschaal, d.w.z. $\tau = t$. Aangezien $B > D$ is het evenwichtspunt $P_1 = (17.544, 0)$ een zadelpunt. Voorts is $P_2 = (5.963, 0.660)$ en de linearisering van het stelsel rond dit zadelpunt geeft een coëfficiëntenmatrix die geen reële eigenwaarden heeft. In dit numeriek voorbeeld is P_2 dus een niet stabiel evenwichtspunt en verwachten we dat de banen zich in het fasevlak rond dit evenwichtspunt P_2 situeren.

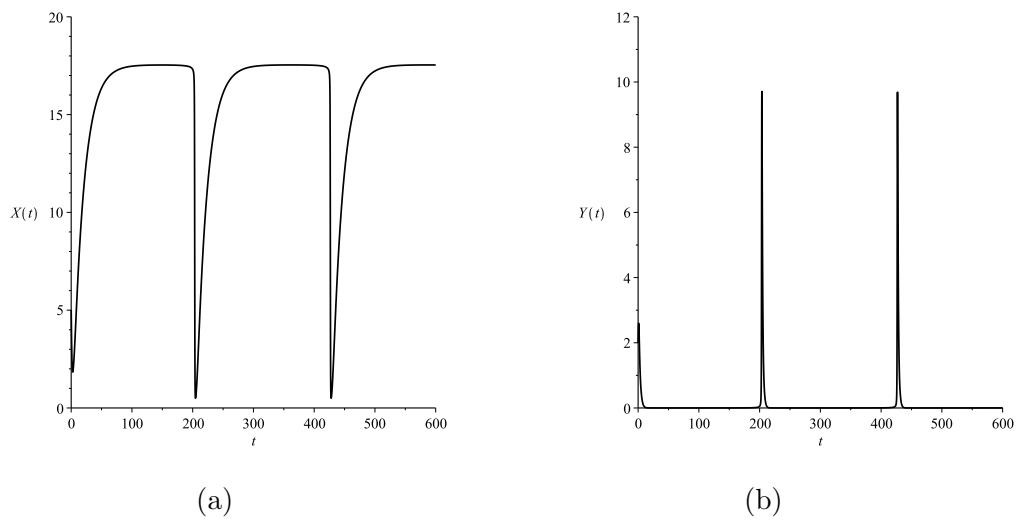
In Figuur 6.15 is links het richtingsveld getekend voor de gegeven parameterwaarden en rechts is er de baan in aangeduid die begint bij het punt $(X, Y) = (5, 2)$. Zoals verwacht komt de baan na een inloopstuk terecht in een cyclisch weerkerende baan die draait om het instabiele evenwichtspunt P_2 . Het eerste evenwichtspunt P_1 dat op de X -as ligt, heeft voor de negatieve eigenwaarde de geassocieerde eigenvector $(0, 1)$, d.w.z. dat banen die vertrekken in

punten die op de X -as liggen naar dat evenwichtspunt evolueren. Banen die in andere punten vertrekken komen (eventueel na rond P_2 te zijn gedraaid) heel dicht bij de X -as terecht en worden alzo ook in grote mate naar P_1 gericht, maar aangezien de baan net iets boven de X -as ligt wordt ze in de dichte buurt van P_1 uiteindelijk toch van dat punt afgestoten en kan de cyclus herhaald worden. Indien we enkel over Figuur 6.15 zouden beschikken, dan weten we dus dat $X(\tau)$ en $Y(\tau)$ elk schommelen tussen een minimale en maximale waarde, en dat die maximale waarde voor $X(\tau)$ rond 17.5 ligt, terwijl de minimale waarde van $Y(\tau)$ net boven maar zeer dicht bij 0 ligt.



Figuur 6.15: (a) Richtingsveld voor het virale-blip-model met parameterwaarden $A = 0.364$, $B = 0.060$, $C = 0.823$, $D = 0.057$; (b) richtingsveld en baan (oplossing) beginnend bij $(X = 5, Y = 2)$.

Zetten we de functies $X(t)$ en $Y(t)$ ook in grafiek uit t.o.v. t , zoals weergegeven in Figuur 6.16, dan valt op dat de cyclische baan niet met uniforme snelheid doorlopen wordt. Inderdaad, in elke omloop wordt meer dan 99% van de tijd doorgebracht in het deel van de baan dat zich vlak bij de X -as bevindt, terwijl in minder dan 1% van de tijd de rest en dus ook het omvangrijkste deel van de baan doorlopen wordt. Uit de grafische voorstelling van $Y(t)$ leiden we af dat de frequentie waarmee de blips voorkomen ongeveer 250 eenheden van tijd, d.i. ongeveer 250 dagen of 8 maanden is.



Figuur 6.16: (a) Oplossing $X(t)$; (b) oplossing $Y(t)$ voor het virale-blip-model met parameterwaarden $A = 0.364$, $B = 0.060$, $C = 0.823$, $D = 0.057$ en beginnend bij $X(0) = 5$ en $Y(0) = 2$.