Inhoudsopgave

Inhoudsopgave iii

0 Inleiding: De vectorruimte $\mathbb{R}^n$ 1

1 Inleidende begrippen 5
- 1.1 Velden . . . 6
- 1.2 Veeltermen . . . 13
- 1.3 Matrices . . . 17
- 1.4 Stelsels van lineaire vergelijkingen . . . 22

2 Vectorruimten 33
- 2.1 Vectorruimten . . . 33
- 2.2 Basissen . . . 41
- 2.3 Som en directe som van vectorruimten . . . 47
- 2.4 Lineaire afbeeldingen en lineaire operatoren . . . 53
- 2.5 De rang van een matrix en stelsels van lineaire vergelijkingen . 62
- 2.6 Appendix: oneindig-dimensionale vectorruimten . . . 69

3 Ruimten van homomorfismen en duale ruimten 73
- 3.1 Ruimten van homomorfismen . . . 73
- 3.2 De minimaalveelterm van een lineaire operator . . . 79
- 3.3 Dualiteit . . . 82

4 Inproduct-ruimten 85
- 4.1 Inproduct-ruimten . . . 85
- 4.2 Orthogonaliteit . . . 90

5 Matrices en determinanten 97
- 5.1 Coördinaten en matrixvoorstellingen van lineaire afbeeldingen 97
- 5.2 Coördinatentransformaties . . . 103
- 5.3 Determinanten . . . 107

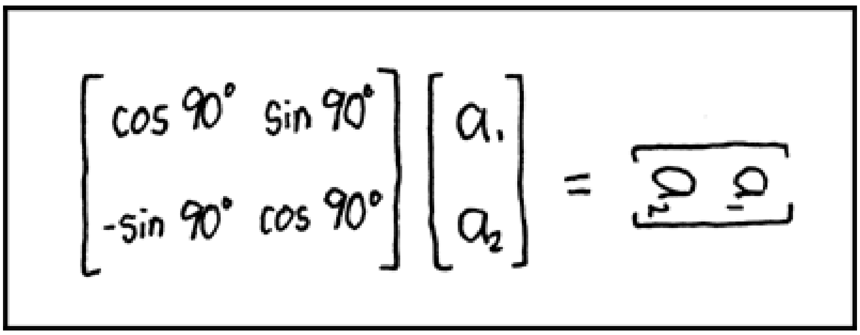
5.4 De karakteristieke veelterm van een lineaire operator 117
5.5 Lineaire groepen 122

6 Lineaire operatoren **125**
6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren 125
6.2 Diagonaliseren van operatoren 128
6.3 Hermitische en symmetrische operatoren 137

7 De Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ **141**
7.1 Hoeken in een reële inproduct-ruimte 141
7.2 Het vectorieel product in $\mathbb{R}^3$ 142
7.3 Affiene deelruimten in $\mathbb{R}^n$ 149
7.4 Hypervlakken in $\mathbb{R}^n$ 154
7.5 Toepassingen 156
7.6 De Euclidische groep $\mathsf{E}(n)$ 162

Index **164**

Notaties **171**



http://xkcd.com/184/

Hoofdstuk

6 Lineaire operatoren

De doelstelling van dit hoofdstuk is om voor een gegeven lineaire operator een "goede" matrixvoorstelling te vinden die ons in staat stelt om deze operator beter te begrijpen. Dit is zowel voor theoretische als voor praktische doeleinden zeer belangrijk.

6.1 Eigenwaarden en eigenvectoren

Een essentieel begrip in de theorie van de lineaire operatoren is het begrip van een eigenvector.

Definitie 6.1.1. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator.

(i) Een niet-nul element $0 \neq v \in V$ is een *eigenvector* van f als $f(v) = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$.

(ii) Zij $0 \neq v \in V$ een eigenvector van f met $f(v) = \lambda v$. Dan is λ een *eigenwaarde* van f.

(iii) Zij λ een eigenwaarde van f. Dan is $\ker(\lambda \mathbf{1}_V - f)$ de *eigenruimte* van f bij de eigenwaarde λ.

We beschouwen voor elke $A \in M_n(K)$ de operator $L_A\colon K^n \to K^n$. Als we bovenstaande definitie toepassen op deze operator, bekomen we de volgende definitie voor de eigenwaarden en eigenvectoren van een matrix.

Definitie 6.1.2. Zij $A \in M_n(K)$ een $n \times n$-matrix over K.

(i) Een niet-nul element $0 \neq v \in K^n$ is een (rechtse[1]) *eigenvector* van A als $Av = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$.

(ii) Zij $0 \neq v \in K^n$ een eigenvector van A met $Av = \lambda v$. Dan is λ een *eigenwaarde* van A.

[1]We kunnen ook *linkse* eigenvectoren definiëren door A te beschouwen als een lineaire operator op de *rijruimte* K^n via rechtse vermenigvuldiging; de linkse eigenvectoren van A zijn dus de (getransponeerde van) de rechtse eigenvectoren van A^t.

(iii) Zij λ een eigenwaarde van A. Dan is

$$\ker L_{(\lambda I_n - A)} = \{w \in K^n \mid (\lambda I_n - A)w = 0\}$$

de *eigenruimte* van A bij de eigenwaarde λ.

Opmerking 6.1.3. Stel dat λ een eigenwaarde van f is. Dan is de eigenruimte van f bij λ de unie van de verzameling van alle eigenvectoren bijhorende bij λ en de nulvector $0 \in V$ (die per definitie geen eigenvector is). We gaan dit gemakkelijk na:

$$\begin{aligned} \ker(f - \lambda\, \mathbf{1}_V) &= \{v \in V \mid (\lambda\, \mathbf{1}_V - f)v = 0\} \\ &= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \\ &= \{0\} \cup \{v \in V \setminus \{0\} \mid f(v) = \lambda v\}. \end{aligned}$$

Voorbeelden 6.1.4. (1) Zij $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in M_n(K)$. De elementen van de standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$ van K^n zijn eigenvectoren van A met respectieve eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(2) Op de eindig-dimensionale ruimte K^n voor $n \in \mathbb{N}$ heeft de shiftoperator

$$S\colon K^n \to K^n \colon (a_1, \ldots, a_n)^t \mapsto (0, a_1, \ldots, a_{n-1})^t$$

eigenvectoren. De vectoren $(0, \ldots, 0, a_n)^t$ zijn eigenvectoren met bijhorende eigenwaarde 0 als $a_n \neq 0$.

(3) We beschouwen nu de shiftoperator op de oneindig-dimensionale vectorruimte $K^{\mathbb{N}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} K$ van rijen van elementen van K die gelabeld zijn met de natuurlijke getallen. De *shiftoperator*

$$S\colon K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}} \colon (a_0, \ldots, a_n, \ldots)^t \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)^t$$

heeft geen eigenvectoren. Immers, als voor een $v \in K^{\mathbb{N}}$

$$S(v) = (0, a_0, \ldots, a_n, \ldots)^t = \lambda(a_0, \ldots, a_n, \ldots)^t$$

voor een zekere $\lambda \in K$, dan is $\lambda a_0 = 0$. Als $\lambda = 0$ volgt onmiddellijk dat $a_i = 0$ voor alle i; als $\lambda \neq 0$ is $a_0 = 0$, maar dan volgt uit $\lambda a_i = a_{i-1}$ voor alle $i \geq 1$ opnieuw dat alle $a_i = 0$. We concluderen dat uit $S(v) = \lambda v$ voor een $\lambda \in K$ volgt dat $v = 0$. Bijgevolg heeft S geen eigenvectoren.

We bespreken een methode om voor een lineaire operator f op een eindig-dimensionale vectorruimte V (of matrix $A \in M_n(K)$) alle eigenwaarden en eigenvectoren te bepalen.

In Definitie 5.4.5 hebben we de karakteristieke veelterm van een lineaire operator f en van een matrix ingevoerd. We bewijzen nu een zeer handig criterium om te bepalen welke elementen van K eigenwaarden bijhorend bij f zijn.

Stelling 6.1.5. (i) *Zij $A \in M_n(K)$. Een scalair $\lambda \in K$ is een eigenwaarde van A als en slechts als $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$.*

(ii) *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator. Een scalair $\lambda \in K$ is een eigenwaarde van f als en slechts als $\chi_f(\lambda) = \det(\lambda\, \mathbf{1} - f) = 0$.*

Bewijs. (i) Een element $\lambda \in K$ is een eigenwaarde van A als en slechts dan als er een $v \in K^n \setminus \{0\}$ bestaat waarvoor $(\lambda I_n - A)v = 0 \in K^n$, of nog, als en slechts als het homogeen $n \times n$-stelsel $(\lambda I_n - A)X = 0$ een niet-nul oplossing heeft, waarbij X een kolomvector is met n onbekenden.
Uit Stelling 2.5.14(ii) volgt dat $(\lambda I_n - A)X = 0$ een niet-nul oplossing heeft als en slechts als $\operatorname{rk}(\lambda I_n - A) < n$. Wegens Stelling 5.3.12 is dit op zijn beurt equivalent met $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

(ii) Zij $\mathcal{B}$ een willekeurige basis van V met bijhorend coördinatenisomorfisme $\beta\colon V \to K^n$, en zij A de matrixvoorstelling van f t.o.v. $\mathcal{B}$. Uit Opmerking 5.1.5(ii) volgt dat $A\beta(v) = \beta(f(v))$ voor alle $v \in V$. Dan gelden volgende equivalenties, met $v \in V$ en $\lambda \in K$:

$$f(v) = \lambda v \iff \beta(f(v)) = \lambda\beta(v) \iff A\beta(v) = \lambda\beta(v).$$

Met andere woorden, $v \in V$ is een eigenvector van f met eigenwaarde λ als en slechts als $\beta(v)$ een eigenvector is van A met eigenwaarde λ. Dus λ is een eigenwaarde van f als en slechts als het een eigenwaarde van A is. Wegens (i) is λ een eigenwaarde van f als en slechts als $\det(\lambda\, \mathbf{1} - f) = \det(\lambda I_n - A) = 0$. □

Gevolg 6.1.6. *Een lineaire operator f op een n-dimensionale K-vectorruimte V (of een matrix $A \in M_n(K)$) heeft hoogstens n eigenwaarden.*

Bewijs. De veelterm $\chi_f(x)$ (resp. $\chi_A(x)$), die van graad n is, kan hoogstens n wortels hebben in K. □

Constructie 6.1.7. Met behulp van de vorige stelling kunnen we nu een methode opstellen om alle eigenwaarden met bijhorende eigenvectoren van een matrix $A \in M_n(K)$ te bepalen:

(1) Bepaal de karakteristieke veelterm $\chi_A(x)$.

(2) Los de vergelijking $\chi_A(x) = 0$ op met $x \in K$. Er zijn maar eindig veel oplossingen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ van deze vergelijking in K, dit zijn de eigenwaarden van A in K.

(3) Bepaal voor elke λ_i, $i = 1, \ldots, s$, de eigenruimte

$$\{w \in K^n \mid (\lambda_i I_n - A)w = 0 \in K^n\}.$$

Opmerking 6.1.8. De eerste stap van Constructie 6.1.7 kan men uitvoeren door de determinant van een matrix te berekenen; dit kan men steeds (met de nodige rekentijd) doen door bijvoorbeeld te ontwikkelen naar een geschikte rij of kolom. De derde stap komt neer op het oplossen van een lineair stelsel; dit kan men steeds (met de nodige rekentijd) doen door bijvoorbeeld rijreductie naar de echelonvorm uit te voeren.

De enige stap waarvoor we geen methode besproken hebben is de tweede stap, namelijk het bepalen van de wortels van een veelterm in één variabele van graad n. Als we werken in 2- of 3-dimensionale ruimten is het steeds mogelijk om alle oplossingen van de karakteristieke veelterm te berekenen. Voor hogere dimensies zijn er niet altijd algemene oplossingsmethoden bekend; het zoeken naar oplossingsmethoden voor veeltermen van hogere graad heeft tot de ontwikkeling van heel wat algebraïsche theorieën geleid. Zo kan men bijvoorbeeld *bewijzen* dat er (in zekere zin) geen algemene oplossingsmethode kan bestaan voor het bepalen van de oplossingen van veeltermvergelijkingen van graad 5 of hoger. De bespreking van dit probleem (over een willekeurig veld) is voor de wiskundigen onderwerp van de cursus “Algebra II”.

6.2 Diagonaliseren van operatoren

We passen nu de theorie van de eigenwaarden en eigenvectoren toe om een gegeven lineaire operator f in een zo eenvoudig mogelijke gedaante te brengen. In het ideale geval kunnen we een basis vinden zodat de matrix van f een diagonaalmatrix is; we noemen de operator in dat geval diagonaliseerbaar.

Het diagonaliseren van matrices is in concrete toepassingen van uitermate groot belang. Een operator wordt vaak gegeven als een welbepaalde matrix, bijvoorbeeld bekomen door het uitvoeren van experimenten, en het diagonaliseren ervan (indien dit mogelijk is) zet de operator om in een zeer begrijpelijke en interpreteerbare gedaante: het geeft voor elke basisvector een “expansie- of contractiefactor” weer, zodat het gemakkelijk te visualiseren valt wat het effect is van het toepassen van de operator.

Stelling 6.2.1. *Een lineaire operator f op een eindig-dimensionale K-vectorruimte heeft een diagonaalmatrix als matrixvoorstelling als en slechts als V een basis heeft bestaande uit eigenvectoren voor f.*

Bewijs. Stel dat f ten opzichte van de basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ als matrixvoorstelling een diagonaalmatrix $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ heeft; dan is, voor alle $1 \le i \le n$,

$$f(b_i) = 0b_1 + \cdots + 0b_{i-1} + \lambda_i b_i + 0b_{i+1} + \cdots + 0b_n = \lambda_i b_i.$$

Dus $\mathcal{B}$ is een basis van V bestaande uit eigenvectoren van f.

Zij omgekeerd $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ een basis van eigenvectoren voor de operator $f \in \mathrm{End}(V)$. Uit $f(b_i) = \lambda_i b_i$ volgt dat de matrixvoorstelling van f ten opzichte van $\mathcal{B}$ een diagonaalmatrix is. □

Definitie 6.2.2. (i) Een operator f op een eindig-dimensionale vectorruimte V is *diagonaliseerbaar* als er een matrixvoorstelling van f is die een diagonaalmatrix is.

(ii) Een matrix $A \in M_n(K)$ is *diagonaliseerbaar* als de lineaire operator $L_A \colon K^n \to K^n$ diagonaliseerbaar is.

Lemma 6.2.3. *Een matrix $A \in M_n(K)$ is diagonaliseerbaar als en slechts als er een matrix $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ bestaat zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix is.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat A (en dus L_A) diagonaliseerbaar is. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ bestaande uit eigenvectoren. Zij $P = (b_1, \dots, b_n)$. Dan geldt $AP = (\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n) = (b_1, \dots, b_n) \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Bijgevolg is $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Veronderstel omgekeerd dat er een $P \in \mathsf{GL}_n(K)$ is zodat $P^{-1}AP$ een diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ is, en beschouw de basis $\mathcal{B} = \{Pe_1, \dots, Pe_n\}$ van K^n. Zij $b_i := Pe_i$. Dan geldt $P^{-1}A(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dus $A(b_1, \dots, b_n) = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Het is dan duidelijk dat de matrix van L_A ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ dan precies de diagonaalmatrix $P^{-1}AP$ is.

□

Stelling 6.2.4. *Zij V een n-dimensionale vectorruimte, en zij $f \in \mathrm{End}(V)$.*

(i) *De eigenvectoren van f die horen bij verschillende eigenwaarden, zijn lineair onafhankelijk van elkaar.*

(ii) *Als f juist n verschillende eigenwaarden heeft, dan is f diagonaliseerbaar.*

(iii) *Als f diagonaliseerbaar is, dan is V de directe som van de eigenruimten van f horende bij de verschillende eigenwaarden van f.*

Bewijs. (i) Zij $\{v_i\}_{i \in I}$ een verzameling van eigenvectoren van een operator f met $f(v_i) = \lambda_i v_i$ waarbij alle λ_i verschillend zijn. We argumenteren uit het ongerijmde. Als $\{v_i\}_{i \in I}$ lineair afhankelijk is, dan is er een relatie

$$a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell = 0\,, \tag{6.1}$$

met ℓ minimaal zodat alle termen ongelijk zijn aan nul. We nemen het beeld van het linkerlid onder f, en we bekomen

$$f(a_1 v_1 + \cdots + a_\ell v_\ell) = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_\ell \lambda_\ell v_\ell = 0\,. \tag{6.2}$$

Vermenigvuldig vergelijking (6.1) met λ_1 en trek deze af van vergelijking (6.2); dan is

$$a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + a_\ell(\lambda_\ell - \lambda_1)v_\ell = 0\,.$$

Vermits alle $a_i \neq 0$ en voor alle $i = 2, \ldots, \ell$, $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$, bekomen we een lineaire relatie met minder dan ℓ termen. Dit is een tegenspraak met de keuze van ℓ.

(ii) Aangezien er n verschillende eigenwaarden zijn voor f, volgt er uit (i) dat er n lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn voor f. Een lineair onafhankelijke verzameling met n elementen is een basis voor V. Uit Stelling 6.2.1 volgt nu het gestelde.

(iii) Veronderstel dat $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ de verschillende eigenwaarden van f zijn. Aangezien f diagonaliseerbaar is, is er een basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ van V zodat de matrix A van f een diagonaalmatrix is, waarbij de elementen op de diagonaal van A precies de eigenwaarden van f zijn. We ordenen de basis $\mathcal{B}$ zodanig dat de eigenwaarden gegroepeerd staan:

$$A = \mathrm{diag}\big(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{n_1 \text{ keer}}, \ldots, \underbrace{\lambda_\ell, \ldots, \lambda_\ell}_{n_\ell \text{ keer}}\big)\,.$$

Stel nu $m_1 = 0$ en $m_i = n_1 + \cdots + n_{i-1}$ voor elke $i \in \{2, \ldots, \ell\}$; dan is de eigenruimte V_i behorende bij de eigenwaarde λ_i gelijk aan

$$V_i = \langle v_{m_i+1}, \ldots, v_{m_i+n_i} \rangle\,,$$

en duidelijkerwijze is nu

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_\ell\,. \qquad \square$$

Niet alle lineaire operatoren zijn diagonaliseerbaar. We werken twee voorbeelden uit van matrices over $\mathbb{R}$ die niet diagonaliseerbaar zijn, en een voorbeeld van een matrix die wel diagonaliseerbaar is:

Voorbeelden 6.2.5. (1) Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van A is

$$\chi_A(x) = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1);$$

deze heeft twee oplossingen, namelijk 1 en -1, waarbij 1 multipliciteit 2 heeft. We hebben dus twee verschillende eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r,s,s)^t \mid r,s \in \mathbb{R}\}$, de eigenruimte bij $\lambda_2 = -1$ is gelijk aan $\{(0,r,-r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. We vinden dus dat

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

een basis van $\mathbb{R}^3$ is die bestaat uit eigenvectoren. Bijgevolg is A diagonaliseerbaar; de matrixvoorstelling van $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon v \mapsto Av$ t.o.v. $\mathcal{B}$ is $\operatorname{diag}(1,1,-1)$.

(2) Beschouw de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van B is

$$\chi_B(x) = (x-1)(x+1)^2;$$

deze heeft twee oplossingen, namelijk 1 en -1, waarbij -1 multipliciteit 2 heeft. We hebben dus twee verschillende eigenwaarden $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = -1$. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r,0,0)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$, de eigenruimte bij $\lambda_2 = -1$ is gelijk aan $\{(0,0,r)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. Er zijn te weinig lineair onafhankelijke eigenvectoren om een basis van $\mathbb{R}^3$ te construeren; bijgevolg is B niet diagonaliseerbaar.

(3) Beschouw de matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

De karakteristieke vergelijking van C is

$$\chi_C(x) = (x-1)(x^2+1);$$

deze heeft vergelijking heeft slechts één oplossing over $\mathbb{R}$, namelijk 1. We hebben dus één eigenwaarde $\lambda = 1$. De eigenruimte bij $\lambda = 1$ is gelijk aan $\{(r,0,0)^t \mid r \in \mathbb{R}\}$. We hebben dus opnieuw te weinig lineair onafhankelijke eigenvectoren om een basis van $\mathbb{R}^3$ te construeren; bijgevolg is C niet diagonaliseerbaar.

In het voorgaande voorbeeld hebben we twee matrices B en C bekeken die niet diagonaliseerbaar zijn over $\mathbb{R}$. Deze twee voorbeelden van niet-diagonaliseerbare operatoren zijn echter verschillend van aard.

In voorbeeld (3) heeft de karakteristieke vergelijking van C slechts één oplossing over $\mathbb{R}$ (multipliciteiten van de oplossingen meegerekend). De operator is niet diagonaliseerbaar, omdat als we de wortels tellen met hun multipliciteit, de karakteristieke vergelijking *niet genoeg wortels* heeft.

In voorbeeld (2) heeft de karakteristieke vergelijking van B wel genoeg wortels, namelijk één van multipliciteit 1 en één van multipliciteit 2. Maar in dit geval zijn de dimensies van de eigenruimten te klein om een basis van eigenvectoren te hebben.

Voorbeeld 6.2.6. Zoals we hebben vermeld, was het probleem bij Voorbeeld 6.2.5(3) dus dat we te weinig wortels hebben. We bekijken nu wat er gebeurt als we de matrix C beschouwen over het veld $\mathbb{C}$ in plaats van over het veld $\mathbb{R}$. Stel dus

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

De karakteristieke vergelijking van C is (met $i \in \mathbb{C}$ met $i^2 = -1$)

$$\chi_C(x) = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x+i)(x-i);$$

deze vergelijking heeft nu drie verschillende oplossingen over $\mathbb{C}$, namelijk $1, -i, i$. De matrix C heeft dus drie verschillende eigenwaarden, namelijk $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$, en uit Stelling 6.2.4(ii) volgt onmiddellijk dat C diagonaliseerbaar is.

Voor de volledigheid bepalen we de eigenruimten van C. De eigenruimte bij $\lambda_1 = 1$ is gelijk aan $\{(r,0,0)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. De eigenruimte bij $\lambda_2 = -i$ is gelijk aan $\{(0,r,-ir)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. De eigenruimte bij $\lambda_3 = i$ is gelijk aan $\{(0,r,ir)^t \mid r \in \mathbb{C}\}$. We vinden dus dat

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

een basis van $\mathbb{C}^3$ is die bestaat uit eigenvectoren. Hieruit volgt dus nogmaals dat A diagonaliseerbaar is; de matrixvoorstelling van $L_A \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3 \colon v \mapsto Av$ t.o.v. $\mathcal{B}$ is $\operatorname{diag}(1, i, -i)$.

In het vorig voorbeeld hebben we aangetoond dat de matrix C over $\mathbb{C}$ wel diagonaliseerbaar is. Maar natuurlijk is ook niet iedere matrix over $\mathbb{C}$

diagonaliseerbaar: als we de matrix B over het veld $\mathbb{C}$ gaan beschouwen, dan blijft deze niet diagonaliseerbaar.

Opmerking 6.2.7. (i) In een algemeen veld K kan het ook voorkomen dat de karakteristieke veelterm niet genoeg wortels heeft over K. Voor de wiskundigen wordt in de cursus "Algebra II" aangetoond dat er dan steeds een groter veld bestaat dat K bevat waarover de karakteristieke veelterm dan wel genoeg wortels heeft. Een dergelijk veld wordt dan een *splijtveld* van de karakteristieke vergelijking genoemd.

(ii) Uit Gevolg 1.2.7 volgt dat elke veelterm van graad n over de complexe getallen $\mathbb{C}$ wél n wortels heeft (als we de multipliciteiten meerekenen).

(iii) Als de karakteristieke vergelijking van f op een n-dimensionale K-vectorruimte n wortels heeft, dan kunnen we deze schrijven als

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i}, \text{ met } \lambda_i \in K,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ de verschillende wortels van χ_f zijn.

We onderzoeken nu wanneer een operator met een bovenstaande karakteristieke vergelijking diagonaliseerbaar is. Hiertoe voeren we volgende definitie in.

Definitie 6.2.8. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met als karakteristieke veelterm

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{met } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in K.$$ [2]

(We merken nogmaals op dat dit een assumptie is.)

(i) De *algebraïsche multipliciteit* van een eigenwaarde λ_i van f is gelijk aan n_i, i.e. de multipliciteit van λ_i als wortel van de karakteristieke veelterm $\chi_f(x)$.

(ii) De *meetkundige multipliciteit* van een eigenwaarde λ_i van f is gelijk aan de dimensie de eigenruimte behorende bij λ_i, dit is dus gelijk aan $\dim \ker(\lambda_i \mathbf{1} - f)$.

Merk op dat de meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde steeds groter dan of gelijk aan 1 is.

[2] We nemen aan dat de λ_i twee aan twee verschillend zijn.

Lemma 6.2.9. *Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm*

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{n_i} \quad \textit{met } \lambda_1, \dots, \lambda_t \in K.$$

Voor iedere i is $\dim(\ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)) \leq n_i$. *Anders gezegd, de meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde is steeds kleiner dan of gelijk aan de algebraïsche multipliciteit van deze eigenwaarde.*

Bewijs. We noteren de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde λ_i met $V_i = \ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)$. Zij dan $r_i := \dim(V_i)$ de meetkundige dimensie van λ_i. We zullen aantonen dat $(x-\lambda_i)^{r_i}$ een deler is van het karakteristiek polynoom van f; dit impliceert dan dat $r_i \leq n_i$.

Beschouw nu een vaste i, en stel $r = r_i$ en $\lambda = \lambda_i$. Zij $\{v_1, \dots, v_r\}$ een basis van V_i. We breiden deze basis uit tot een basis van V: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s\}$. We stellen de matrixvoorstelling op van f ten opzichte van deze basis. Deze wordt bekomen door de matrix te beschouwen waarvan de kolommen

$$f(v_1), \dots, f(v_r), f(w_1), \dots, f(w_s)$$

zijn. We hebben

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda v_1 \\ f(v_2) &= \lambda v_2 \\ &\vdots \\ f(v_r) &= \lambda v_r; \end{aligned}$$

over de beelden $f(w_1), \dots, f(w_s)$ hebben we geen bijkomende informatie. Dan is de matrixvoorstelling van f t.o.v. $\mathcal{B}$ gelijk aan

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

voor zekere (onbekende) matrices $B \in M_{r,n-r}(K)$ en $C \in M_{n-r}(K)$.

Er geldt dat $\chi_f(x) = \det(xI_n - A)$. Als we deze determinant bepalen door telkens (r opeenvolgende malen) te ontwikkelen naar de eerste kolom, volgt er dat $(x-\lambda)^r$ een deler is van $\chi_f(x) = \det(xI_n - A)$. □

Uit het voorgaand lemma volgt dat, als de algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde gelijk is aan 1, de meetkundige multipliciteit dan ook gelijk is aan 1.

We kunnen nu een criterium bewijzen voor het al dan niet diagonaliseerbaar zijn van een operator.

Stelling 6.2.10. *Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm*

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{n_i} \quad \textit{met } \lambda_1,\dots,\lambda_t \in K.$$

Zij $V_i = \ker(\lambda_i \mathbf{1_V} - f)$ de eigenruimte behorende bij de eigenwaarde λ_i, voor elke i. Dan is f diagonaliseerbaar als en slechts als voor elke eigenwaarde λ_i geldt dat $\dim(V_i) = n_i$, of met andere woorden, als en slechts als voor iedere eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit gelijk is aan de meetkundige multipliciteit.

Bewijs. Aangezien de graad van $\chi_f(x)$ gelijk is aan n, is $\dim(V) = n = n_1 + \cdots + n_t$. Voor iedere eigenruimte V_i kiezen we een basis $\mathcal{B}_i$. Uit Stelling 6.2.4(i) volgt dat de verzameling $\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$ lineair onafhankelijk is.

Nu splitsen we op in twee gevallen:

(i) Stel dat $\dim(V_i) = n_i$ voor alle i. We tellen het aantal elementen in $\mathcal{C}$; dit is gelijk aan

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_t) = n_1 + \cdots + n_t = n = \dim(V).$$

Dus $\mathcal{C}$ is een basis van V bestaande uit eigenvectoren van f. Uit Stelling 6.2.1 volgt dat f diagonaliseerbaar is.

(ii) Stel dat $\dim(V_i) < n_i$ voor een bepaalde i, en merk op dat steeds $\dim(V_j) \leq n_j$ voor alle j. In dit geval is het aantal elementen in $\mathcal{C}$ kleiner dan $\dim(V)$:

$$\dim(V_1) + \cdots + \dim(V_t) < n_1 + \cdots + n_t = n = \dim(V).$$

Hieruit volgt dat $\mathcal{C}$ geen basis is van V. Aangezien iedere eigenvector van f in $\operatorname{span}(\mathcal{C})$ zit, kunnen we nooit $\dim(V)$ lineair onafhankelijke eigenvectoren vinden. Dus f is niet diagonaliseerbaar. $\square$

We illustreren dit nieuwe criterium aan de hand van enkele voorbeelden.

Voorbeelden 6.2.11. (1) We beschouwen de matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ uit Voorbeeld 6.2.5. Aangezien $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+1)$, kunnen we Stelling 6.2.10 toepassen. De eigenwaarde λ_1 heeft algebraïsche multipliciteit 2, de eigenwaarde λ_2 heeft algebraïsche multipliciteit 1. Uit de bepaling van de eigenruimten volgt dat de eigenwaarde λ_1 meetkundige multipliciteit 2 heeft; we kunnen dus onmiddellijk concluderen dat A diagonaliseerbaar is.

(2) Beschouw de matrix $B \in M_3(\mathbb{R})$ uit Voorbeeld 6.2.5. Aangezien $\chi_B(x) = (x-1)(x+1)^2$ kunnen we Stelling 6.2.10 toepassen. De eigenwaarde λ_1 heeft algebraïsche multipliciteit 1, de eigenwaarde λ_2 heeft algebraïsche multipliciteit 2. Uit de bepaling van de eigenruimten volgt dat de eigenwaarde λ_2 meetkundige multipliciteit 1 heeft; we kunnen dus onmiddellijk concluderen dat B niet diagonaliseerbaar is.

(3) Beschouw de shiftoperator S op K^n uit Voorbeeld 6.1.4(2), en beschouw de standaardbasis $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ van K^n. Ten opzichte van deze basis $\mathcal{B}$ heeft S de matrixvoorstelling

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Herhaaldelijk ontwikkelen naar de laatste kolom geeft $\chi_A(x) = x^n$; we kunnen dus Stelling 6.2.10 toepassen. De shiftoperator S heeft dus 1 eigenwaarde $\lambda = 0$ met algebraïsche multipliciteit n. De eigenruimte bij λ is gelijk aan $\{(0, \dots, 0, k) \mid k \in K\}$; bijgevolg is de meetkundige multipliciteit van λ gelijk aan 1. We besluiten dat S niet diagonaliseerbaar is.

Opmerking 6.2.12. Zij V een K-vectorruimte en $f\colon V \to V$ een lineaire operator met karakteristieke veelterm

$$\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t} (x - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{met } \lambda_1, \dots, \lambda_t \in K.$$

Als f niet diagonaliseerbaar is, is het toch steeds mogelijk om een "mooie" matrixvoorstelling voor f te geven.

Er bestaat namelijk steeds een basis voor V zodat de matrixvoorstelling van f ten opzichte van deze basis een zeer eenvoudige vorm heeft, namelijk een blokdiagonaalmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1 & & & \\ \hline & J_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_m \end{array}\right),$$

waarbij de blokken matrices zijn met een unieke eigenwaarde λ, met 1-en juist onder de diagonaal, en met alle andere componenten gelijk aan nul, i.e. blokken van de vorm

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Matrices met deze bijzondere vorm noemen we *Jordan*[3] *matrices.* De blokdiagonale matrixvoorstelling van f noemt men de de *Jordan normaalvorm* van f.

Voor een bewijs van dit feit verwijzen we voor de wiskundigen naar de cursus "Algebra I".

6.3 Hermitische en symmetrische operatoren

We bestuderen het diagonaliseerbaar zijn van bijzondere klassen van operatoren op de standaard inproduct-ruimten over $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

Definitie 6.3.1. (i) Beschouw de n-dimensionale inproduct-ruimte $\mathbb{C}^n$ met het standaard inproduct $\langle v, w\rangle = v^t\overline{w}$. Zij $f\colon W \to W$ een operator op een deelruimte $W \leq \mathbb{C}^n$. We noemen f een *hermitische*[4] *operator* als voor alle $v, w \in W$ geldt dat

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle\,. \tag{6.3}$$

[3]Genoemd naar de Franse wiskundige Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922).
[4]Genoemd naar de Franse wiskundige Charles Hermite (1822–1901).

Als $f = L_A$ een hermitische operator is op $\mathbb{C}^n$, dan geldt dat voor alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ dat

$$v^t A^t \overline{w} = (Av)^t \overline{w} = v^t (\overline{Aw}) = v^t \overline{A} \overline{w}\,,$$

waaruit volgt dat

$$A^t = \overline{A}\,.$$

Dergelijke matrices noemen we *hermitische matrices.*

(ii) We kunnen precies dezelfde definitie beschouwen voor $\mathbb{R}^n$ in plaats van $\mathbb{C}^n$; we noemen $f\colon W \to W$ met $W \leq \mathbb{R}^n$ een *symmetrische operator* als voor alle $v, w \in W$ de gelijkheid (6.3) geldt. Indien $f = L_A$ een symmetrische operator is op $\mathbb{R}^n$, dan is $A^t = A$, i.e. A is een symmetrische matrix. Merk dus op dat de reële hermitische matrices juist de symmetrische matrices zijn.

Stelling 6.3.2. *Zij f een hermitische operator op $\mathbb{C}^n$. Dan geldt:*

(i) *Alle eigenwaarden van f zijn reëel.*

(ii) *Eigenvectoren behorende bij twee verschillende eigenwaarden zijn orthogonaal.*

(iii) *De operator f is diagonaliseerbaar, en er bestaat steeds een orthonormale basis van eigenvectoren voor f.*

Bewijs. (i) Stel dat λ een eigenwaarde is van f met eigenvector v, m.a.w. $f(v) = \lambda v$. Nu is

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Omdat $v \neq 0 \in \mathbb{C}^n$, is $\langle v, v\rangle \neq 0$, zodat $\lambda = \overline{\lambda}$ en dus $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Stel dat λ een eigenwaarde is van f met eigenvector v en μ een eigenwaarde is van f met eigenvector w met $\lambda \neq \mu$. Aangezien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle = \mu\langle v, w\rangle.$$

Er volgt dat $(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0$, dus is $\langle v, w\rangle = 0$.

(iii) We tonen aan dat er een orthonormale basis van eigenvectoren van f bestaat door gebruik te maken van inductie naar de dimensie. Voor 1-dimensionale ruimten is de uitspraak triviaal.
Als inductiehypothese nemen we aan dat er voor iedere hermitische operator op $\mathbb{C}^{n-1}$ een orthonormale basis van eigenvectoren is. Stel dat f een eigenvector v met eigenwaarde λ heeft; deze bestaat zeker

want de karakteristieke vergelijking van f heeft steeds een wortel in $\mathbb{C}$. Noem W het orthogonaal complement van $\mathbb{C}v$, dus $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v \oplus W$ en $\dim(W) = n - 1$ (zie Gevolg 4.2.5). Voor $w \in W$ geldt dus dat $\langle v, w \rangle = 0$. We tonen aan dat ook $\langle v, f(w) \rangle = 0$:

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f(v), w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = 0.$$

Hieruit volgt dat $f(W) \subseteq W$, wat betekent dat de restrictie van f tot W een hermitische operator is op W. Omdat $\dim W = n - 1$ volgt nu uit de inductiehypothese dat W een orthonormale basis van eigenvectoren heeft voor de restrictie van f op W; deze basis noteren we met $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$. Aangezien $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}v \oplus W$, is

$$\left\{ \frac{1}{\|v\|} v, w_1, \ldots, w_{n-1} \right\}$$

een orthonormale basis van V bestaande uit eigenvectoren van f. □

Opmerking 6.3.3. In de praktijk gaan we vaak als volgt te werk om een orthonormale basis van eigenvectoren van een hermitische operator te vinden. We bepalen eerst de eigenwaarden en eigenruimten voor f; aangezien f diagonaliseerbaar is, is V de directe som van de eigenruimten. Voor iedere eigenruimte apart bepalen we nu een orthonormale basis bestaande uit eigenvectoren van f. Wanneer we al deze basisvectoren samenvoegen krijgen we een basis van V. Uit Stelling 6.3.2(ii) volgt dan dat al deze basisvectoren loodrecht op elkaar staan.

Gevolg 6.3.4. *Beschouw de inproduct-ruimte $\mathbb{R}^n$ met het standaard inproduct $\langle v, w \rangle = v^t w$. Zij A een symmetrische matrix in $M_n(\mathbb{R})$.*

Alle eigenwaarden van A zijn reëel en er bestaat een orthonormale basis van eigenvectoren voor A, dus A is diagonaliseerbaar.

Bovendien is de transitiematrix van de standaardbasis naar een orthonormale basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ van eigenvectoren voor A een orthogonale matrix P, en er geldt dat

$$P^t A P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

waarbij $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn (die alle reëel zijn). De i-de kolom van P bestaat precies uit de coördinaten van de eigenvector b_i ten opzichte van de standaardbasis.

Bewijs. Een symmetrische matrix in $M_n(\mathbb{R})$ definieert een hermitische matrix over $\mathbb{C}$; we kunnen dus het bewijs van Stelling 6.3.2 adapteren. De rest van het gestelde volgt uit Opmerking 5.2.2(ii), Opmerking 5.2.6 en Stelling 5.2.8. □

Index

K-algebra, 77

adjunct, 113
afbeelding, 5
    bijectief, 54
    injectief, 54
    inverse, 77
    inverteerbaar, 77
    surjectief, 54
affiene deelruimte, 65, 149–156
    codimensie, 150
    dimensie, 66
    geassocieerde vectordeelruimte, 150
    onderliggende vectordeelruimte, 150
    orthogonale affiene deelruimten, 154
    orthogonale vector, 154
    parallelle affiene deelruimten, 154
    parallelle vector, 154
    plaatsvector, 150
    richtingsvector, 150
affiene ruimte, 150
afstand, 86, 142, 158, 159, 161, 163
    Euclidische afstand, 86
algebraische multipliciteit, 133
algemene lineaire groep, 78, 122
alternatief-stelling, 61
automorfisme, 60

basis, 41, 44, 46, 58
    aanvullen tot een basis, 44
    beperken tot een basis, 44
    coordinaten, 97
    coordinatenvector, 97
    duale basis, 83
    georienteerde basis, *zie* georienteerde basis
    Hamel basis, 71
    orthogonale basis, 90
    orthonormale basis, 90, 139, 143
    standaardbasis, 41
beeld, 56

bi-additief, 86
bi-vector, 149
bijectie, 54
bijectief, 54
bijna alle, 53
blokdiagonaalmatrix, 18
bovendriehoeksmatrix, 18
bovengrens, 69
bra, 88

codimensie, 150
cofactor, 113
commutatief diagram, 99
compleet, 88
complement, 50
    orthogonaal complement, 91
complex getal, 6
    complexe toevoeging, 6
    norm, 6
complexe toevoeging, 6
component
    van een matrix, 17
conjugatieklasse, 106
coordinaatfunctie, 82
coordinaten, 97
coordinatenisomorfisme, 97
coordinatentransformatie, 103
coordinatenvector, 97

deelruimte, 36
    affiene, *zie* affiene deelruimte
    complement, 50
    directe som, 47
    Euclidische deelruimte, 150
    som, 47
    voortgebracht door, 38
deelverzameling, 5
determinant, 107–117, 148
    ontwikkelen, 112
    van een lineaire operator, 117
determinantafbeelding, 111

diagonaalmatrix, 18
diagonaliseerbaar, 129
diagonaliseren, 128–135
dimensie, 45, 66
  codimensie, 150
dimensiestelling
  van Grassmann, 49
  voor deelruimten, 49
  voor lineaire afbeeldingen, 61
direct georienteerd, 143
direct product, 53
directe isometrie, 164
directe som, 51, 53
  inwendige, 52
  uitwendige, 52
  van deelruimten, 47
disjuncte unie, 48
doorsnede, 5
driehoeksongelijkheid, 90
duale afbeelding, 84, 102
duale basis, 83
duale ruimte, 82, 101
  duale basis, 83
dualiteit, 82
  Hodge dualiteit, 149

echelonmatrices, 28
echelonvorm, 28
eenheidsmatrix, 18
eigenruimte, 125, 126
eigenvector, 125
eigenwaarde, 125
  algebraische multipliciteit, 133
  meetkundige multipliciteit, 133
eindig veld, 10
eindig-dimensionaal, 43
element
  van een matrix, 17
elementaire matrix, 122
elementaire rijoperatie, 26
endomorfisme, 55
endomorfismenring, 77
equipollent, 151
Euclidische afstand, 86
Euclidische deelruimte, 150
Euclidische groep, 162–164
Euclidische hoek, 142, 147
Euclidische inproduct, 86, 142
Euclidische ruimte, 86, 141–142
  afstand, 86, 163
  Euclidische deelruimte, 150
  formule van Lagrange, 145
  hoek, 142, 147
  hypervlak, 154
  identiteit van Lagrange, 145, 160
  inproduct, 142
  isometrie, 163
  isometriegroep, 163
  Jacobi identiteit, 145, 149
  orienteren, 142
  tripel-product, 145, 148
  vectorproduct, 142–149
  verplaatsingsgroep, 164
event, 87

formule van Lagrange, 145
functie, 5

geassocieerde vectordeelruimte, 150
gebonden vector, 151
geconjugeerde matrices, 106
gelijk georienteerd, 143
gemeenschappelijke loodlijn, 160
georienteerde basis
  direct georienteerd, 143
  gelijk georienteerd, 143
  indirect georienteerd, 143
  negatief georienteerd, 143
  positief georienteerd, 143, 145
  tegengesteld georienteerd, 143
gepunte ruimte, 151
getransponeerde matrix, 22, 102
goed gedefinieerd, 66
graad, 14
groep, 11

Hamel basis, 71
hermitische matrix, 138
hermitische operator, 137
Hilbertruimte, 88
  reeksruimte, 88
Hodge dualiteit, 149
hoek, 141, 142, 147, 156
  Euclidische hoek, 142
  hoek tussen hypervlakken, 156
homogeniteit van de norm, 86
hypervlak, 149–156
  afstand tot een punt, 158
  hoek tussen hypervlakken, 156

normaalvector, 155
orthogonale hypervlakken, 156

identieke afbeelding, 55
identiteit van Lagrange, 145, 160
indirect georienteerd, 143
indirecte isometrie, 164
injectie, 54
injectief, 54
inproduct, 85–87, 137, 139, 145
bi-additiviteit, 86
Euclidische inproduct, 86, 142
Minkowski inproduct, 87
sesquilineariteit, 86
standaard, 86, 87, 137, 139
inproduct-ruimte, 85
afstand, 86
driehoeksongelijkheid, 90
Euclidische ruimte, 86, 142
Hilbertruimte, 88
hoek, 141
norm, 85
ongelijkheid van Cauchy–Schwarz, 89
reeksruimte, 88
intersectie, 5
inverse, 11
inverse beeld, 53
inverse matrix, 21
inverteerbaar, 77
involutie, 124
inwendige directe som, 52
irreducibel, 16
isometrie, 163
directe isometrie, 164
indirecte isometrie, 164
starre beweging, 164
starre verplaatsing, 164
verplaatsing, 164
isometriegroep, 163
verplaatsingsgroep, 164
isomorf, 60
isomorfisme, 59

Jacobi identiteit, 145, 149
Jordan matrix, 137
Jordan normaalvorm, 136, 137

karakteristieke veelterm, 117–122, 126
karakteristieke vergelijking, 119
kardinaliteit, 5
kern, 56
ket, 88
keten, 69
keuze-axioma, 70
kolommatrix, 18
kolommen, 17
kolommenruimte, 34
standaardbasis, 41
Kronecker delta, 75
kruisproduct, *zie* vectorproduct
kwantummechanica, 88

lemma van Zorn, 71
Lie algebra, 149
Lie groep, 124
lineair afhankelijk, 39, 145
lineair onafhankelijk, 40, 58, 129
lineaire afbeelding, 54
beeld, 56
duale afbeelding, 84, 102
inverteerbaar, 77
kern, 56
matrixvoorstelling, 97–124
lineaire combinatie, 37, 41
triviale, 37
lineaire groep, 122
algemene lineaire groep, 78, 122
orthogonale groep, 124, 163
speciale lineaire groep, 123
speciale orthogonale groep, 124, 164
speciale unitaire groep, 124
unitaire groep, 124
lineaire operator, 55, 125
determinant, 117
diagonaliseerbaar, 129
diagonaliseren, 128–135
eigenruimte, 125, 133
eigenvector, 125
eigenwaarde, 125
algebraische multipliciteit, 133
meetkundige multipliciteit, 133
hermitische operator, 137
inverteerbaar, 77
Jordan normaalvorm, 137
karakteristieke veelterm, 117–122, 126
karakteristieke vergelijking, 119
matrixvoorstelling, 125
minimaalveelterm, 81, 121
projectie-operator, 56

shiftoperator, 56, 126
spoor, 120
symmetrische operator, 138
lineaire variëteit, 65
lineaire vorm, 82
loodlijn, 159
loodrecht, 90

machtsverzameling, 69
matrix, 17, 97–124
adjunct, 113
blokdiagonaalmatrix, 18
bovendriehoeksmatrix, 18
cofactor, 113
component, 17
conjugatieklasse, 106
determinant, 107–117, 148
diagonaalmatrix, 18
diagonaliseerbaar, 129
echelonmatrix, 28
echelonvorm, 28
eenheidsmatrix, 18
eigenruimte, 126
eigenvector, 125
eigenwaarde, 125
element, 17
elementaire matrix, 122
geconjugeerde matrices, 106
getransponeerde, 22, 102
hermitische matrix, 138
inverse matrix, 21
inverteerbaar, 21
Jordan matrix, 137
karakteristieke veelterm, 117–122
karakteristieke vergelijking, 119
kolommatrix, 18
matrix van basisovergang, *zie* transitiematrix
matrixvoorstelling, 97–124
minor, 113, 116
nulmatrix, 18
onderdriehoeksmatrix, 18
orthogonale matrix, 107, 124, 139
product met matrix, 19
product met scalair, 19
rang, 63
rij-echelonmatrix, 27
rij-echelonvorm, 28
rijmatrix, 18
som, 19
spoor, 120
symmetrische matrix, 18, 138, 139
toegevoegde matrices, 106
toegevoegde matrix, 124
transitiematrix, *zie* transitiematrix
uitgebreide matrix, 25
unitaire matrix, 107, 124
vierkante matrix, 17
matrix van de basisovergang, *zie* transitiematrix
matrixvoorstelling, 97–125
maximaal element, 69
meetkundige multipliciteit, 133
metrische ruimte, 86
compleet, 88
minimaalveelterm, 81, 121
Minkowski inproduct, 87
Minkowski ruimte, 87
event, 87
minor, 113, 116
monisch, 14
morfisme, 55
multilineair, 107
multipliciteit, 16, 133

negatief georienteerd, 143
norm, 85
driehoeksongelijkheid, 90
homogeniteit van de norm, 86
normaalvector, 155
nulafbeelding, 55
nuldelers, 77
nulmatrix, 18
nulruimte, 34

octonen, 149
onderdriehoeksmatrix, 18
onderliggende vectordeelruimte, 150
oneindig-dimensionaal, 43, 71
ongelijkheid van Cauchy–Schwarz, 89
ontwikkelen, 112
operator, *zie* lineaire operator
orienteren van een vectorruimte, 142
orthogonaal, 90, 142, 154, 156
orthogonaal complement, 91
orthogonale basis, 90
orthogonale groep, 124, 163
speciale orthogonale groep, 124, 164

orthogonale matrix, 107, 124, 139
orthogonale projectie, 93
orthonormale basis, 90, 139, 143

parallel, 154
permutatie, 107, 110
    teken, 108
pivotkolom, 28
pivotplaats, 28
plaatsvector, 150
polynomenring, 14
polynoom, *zie* veelterm
positief georienteerd, 143, 145
positief-definiet, 85
product
    direct product, 53
    van matrices, 19
    van matrix met scalair, 19
    van vectorruimten, 53
projectie, 56
projectie-operator, 56
punt, 149

quaternionen, 149

rang, 63
rechte, 149, 156–160, 162
    afstand tot een punt, 159
    afstand tot een rechte, 161
    gemeenschappelijke loodlijn, 160
    kruisende rechten, 162
reducibel, 16
reeksruimte, 88
restrictie, 53
richtingsvector, 150
rij-echelonmatrix, 27
rij-echelonvorm, 28
rijen, 17
rijmatrix, 18
rijoperatie
    elementaire rijoperatie, 26
rijreductie, 29
ring, 12

samenstelling, 76
scalair, 8
schrappingswet, 148
semidirect product, 164
sesquilineair, 86
shiftoperator, 56, 126
som
    directe som, 47, 51, 53
    van deelruimten, 47
    van matrices, 19
    van vectorruimten, 51, 53
speciale lineaire groep, 123
speciale orthogonale groep, 124, 164
speciale unitaire groep, 124
spilkolom, 28
spilplaats, 28
spoor, 120
standaardbasis, 41
starre beweging, 164
starre verplaatsing, 164
stelling van Cantor–Bernstein–Schröder, 72
stelling van Cayley–Hamilton, 120
stelsel van lineaire vergelijkingen, 23
    oplossing, 23
    oplossingsverzameling, 23
    strijdig, 23
surjectie, 54
surjectief, 54
symmetrische matrix, 18, 138, 139
symmetrische operator, 138

tegengesteld georienteerd, 143
tegengestelde, 10
toegevoegd-symmetrisch, 85
toegevoegde matrices, 106
toegevoegde matrix, 124
transitiematrix, 103, 139, 143
translatie, 163
translatiegroep, 163
tripel-product, 145, 148
triviale lineaire combinatie, 37

uitgebreide matrix, 25
uitwendige algebra, 149
uitwendige directe som, 52
unie, 5
    disjuncte, 48
unitaire groep, 124
    speciale unitaire groep, 124
unitaire matrix, 107, 124

vector
    coordinatenvector, 97
    gebonden vector, 151
    loodrechte vectoren, 90

orthogonale vectoren, 90
vrije vector, 150
vectorieel product, *zie* vectorproduct
vectorproduct, 141–149, 160
vectorruimte, 33
K-vectorruimte, 33
n-dimensionaal, 45
automorfisme, 60
basis, 41, 44, 46, 58
orthogonale basis, *zie* orthogonale basis
orthonormale basis, *zie* orthonormale basis
deelruimte, 36
complement, 50
directe som, 47
som, 47
voortgebracht door, 38
dimensie, 45
direct product, 53
directe som, 51, 53
duale ruimte, 82, 101
eindig-dimensionaal, 43
endomorfismenring, 77
isomorfe vectorruimten, 60
isomorfisme, 59
kolommenruimte, 34
nulruimte, 34
oneindig-dimensionaal, 43, 71
orienteren, 142
veelterm, 13
deler, 16
graad, 14
irreducibel, 16
monisch, 14
reducibel, 16
wortel, 14
veeltermenring, 14
veld, 7
eindig veld, 10
involutie, 124
vereniging, 5
vermenigvuldiging
van matrices, 19
verplaatsing, 164
verplaatsingsgroep, 164
verschil, 5
verzameling, 5
doorsnede, 5
intersectie, 5
kardinaliteit, 5
unie, 5
vereniging, 5
verschil, 5
vierkante matrix, 17
vlak, 149
voortbrengend, 39, 58
voortbrengende verzameling, 39
vrije vector, 150

wortel, 14
multipliciteit, 16

Notaties

$\{a, b, c, \dots\}$, 5
$A \subseteq B$, 5
$A \cup B$, 5
$A \cap B$, 5
$A \setminus B$, 5
$|A|$, 5
$\emptyset$, 5
$\mapsto$, 6
$\mathbb{C}$, 6
$\iota(z)$, 6
$\overline{z}$, 6
$\mathsf{N}(z)$, 6
$|z|$, 6
$\mathbb{Q}[\sqrt{p}]$, 9
$\mathbb{R}(x)$, 9
$\mathbb{F}_p$, 10
$\overline{a}$, 10
a^{-1}, 11
$\frac{1}{a}$, 11
$K[x]$, 13
$\deg f(x)$, 14
P_n, 14
$M_{m,n}(K)$, 17
$\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$, 17
$M_n(K)$, 17
$\mathrm{Mat}_n(K)$, 17
$(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$, 18
$(a_{ij})_{i,j}$, 18
(a_{ij}), 18
$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$, 18
$(A_1, \dots, A_n)$, 18
$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, 18
$0_{m,n}$, 18
0_n, 18
K^m, 18
$\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, 18
I_n, 18
A^{-1}, 21
$\mathsf{GL}_n(K)$, 21
A^t, 22
$(A|B)$, 25
K^n, 34
$K[x]$, 34
$W \leq V$, 36
$\mathrm{span}(S)$, 38
$\langle S \rangle$, 39
Kv, 39
$\dim V$, 45
$\dim_K V$, 45
$W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, 47
$\bigoplus_{i=1}^m W_i$, 51
$\prod_{i\in I} W_i$, 52
$f(C)$, 53
$f^{-1}(D)$, 53
$f|_C$, 53
$f\colon A \hookrightarrow B$, 54
$f\colon A \twoheadrightarrow B$, 54
$f\colon A \xrightarrow{\sim} B$, 54
$\mathbf{1}_V$, 55
$\mathbf{1}$, 55
id_V, 55

id, 55
L_A, 55
$\ker f$, 56
$\operatorname{im} f$, 56
$V \cong W$, 60
$\mathrm{rk}(A)$, 63
$v + W$, 65
$\mathbf{P}(X)$, 69
$\mathrm{Hom}_K(V, W)$, 73
δ_{ij}, 75
$f \circ g$, 76
$\mathrm{End}_K(V)$, 77
$\mathrm{End}(V)$, 77
f^{-1}, 77
$\mathsf{GL}_K(V)$, 78
$\mathsf{GL}(V)$, 78
f^{ℓ}, 79
V^*, 82
ε_i, 82
$\mathcal{B}^*$, 83
f^*, 84
$\langle \cdot, \cdot \rangle$, 85
$\|v\|$, 85
$\mathrm{dist}(v, w)$, 86
$\mathbb{E}^n$, 86
$C[a, b]$, 87
$\ell^2(B)$, 88
$|\psi\rangle$, 88
$\langle \phi|$, 88
$\langle \phi|\psi \rangle$, 88
A_f, 97
$\mathrm{Sym}(n)$, 107
S_n, 107
$\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, 108
sgn, 108
det, 110
α_{ij}, 113
$\mathrm{adj}(A)$, 113
$\det f$, 117
$\chi_f(x)$, 119
$\chi_A(x)$, 119
$E_{ij}(c)$, 122
$\mathsf{SL}_n(K)$, 123
$\mathsf{O}_n(K)$, 124
$\mathsf{SO}_n(K)$, 124
$\mathsf{O}(n)$, 124
$\mathsf{SO}(n)$, 124
$\overline{a}$, 124
$\overline{A}$, 124
$\mathsf{U}_n(K, \sigma)$, 124
$\mathsf{SU}_n(K, \sigma)$, 124
$\mathsf{U}(n)$, 124
$\mathsf{SU}(n)$, 124
$K^{\mathbb{N}}$, 126
$\angle(v, w)$, 141
$u \cdot v$, 142
uv, 142
v^2, 142
$v \times w$, 143
$\mathbb{H}$, 149
$\mathbb{O}$, 149
$\Lambda(V)$, 149
$v \wedge w$, 149
$*(v \wedge w)$, 149
$\overrightarrow{ab}$, 150
E_o, 151
$w \parallel D$, 154
$D \parallel D'$, 154
$w \perp D$, 154
$D \perp D'$, 154
$\angle(H, H')$, 156
$\mathsf{E}(n)$, 163
$\mathsf{ISO}(n)$, 163
T_v, 163
$\mathsf{T}(n)$, 163
$\mathsf{E}_0(n)$, 163
$\mathsf{E}^+(n)$, 164