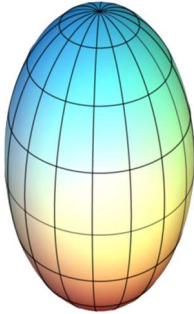
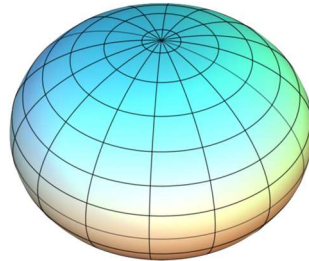


- o.a. verdedigd door Descartes en Cassini - stond voor een prolate vorm van de aarde, de andere - o.a. gesteund door Newton en Huygens - stond voor een oblate vorm van de aarde.



Prolate vorm



Oblate vorm

*Figuur 12 – Prolate vs. oblate hypothese van de aarde*

De Franse *Académie des Sciences* lanceerde twee expedities om de veldwaarnemingen te verrichten, de ene naar Lapland (1736-1737), met als wetenschappers Pierre Maupertuis en Anders Celsius, de andere naar Ecuador (1735-1739), met Charles Marie de la Condamine, Pierre Bouguer en Louis Godin als astronomen



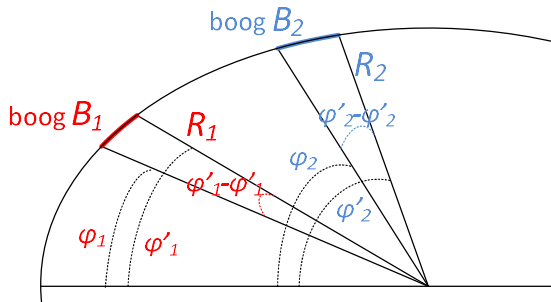
*Figuur 13 – Booggraadmelingen*

Op basis van de gegevens van de expedities en de graadmeting welke ook in Frankrijk werd uitgevoerd kon Alexis- Claude Clairaut in 1743 in zijn *De la Figure de la Terre* aantonen dat Newton en Huygens het bij het rechte einde hadden.

### 2.2.4.3 Formules in verband met bepaling afmetingen aardellipsoïde

De vergelijking van de meridiaanellips wordt gegeven door  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Beschouwt men twee meridiaanbogen Arc  $B_1$  en Arc  $B_2$  waarvan men de lengte kent door triangulatie (zoals bijvoorbeeld de expedities van Maupertuis en de la Condamine realiseerden), met resp.  $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi_2$  en  $\varphi'_2$  de geodetische breedten van de eindpunten van Arc  $B_1$  en Arc  $B_2$ , en zij  $R_1$  en  $R_2$  de waarden van de kromtestralen van Arc  $B_1$  en Arc  $B_2$ .



Figuur 14 – Graadmeting op ellipsoïde

Dan is

$$\text{Arc } B_1 = R_1 \cdot (\varphi'_1 - \varphi_1)^{(\circ)} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{Vgl. 2-8}$$

$$\text{Arc } B_2 = R_2 \cdot (\varphi'_2 - \varphi_2)^{(\circ)} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{Vgl. 2-9}$$

De waarde van de kromtestraal  $R$  van een ellips met halve grote as  $a$  excentriciteit  $e$  is, op breedte  $\varphi$  (zie § 2.2.5.1)

$$R = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

Voor  $R_1$  en  $R_2$  neemt men voor de breedte de gemiddelde breedte van de beschouwde boog, zodat

$$\text{Arc } B_1 = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi'_1)\right)\right)^{3/2}} \cdot (\varphi'_1 - \varphi_1)^{(\circ)} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{Vgl. 2-10}$$

$$\text{Arc } B_2 = \frac{a(1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \sin^2\left(\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi'_2)\right)\right)^{3/2}} \cdot (\varphi'_2 - \varphi_2)^{(\circ)} \cdot \frac{\pi}{180} \quad \text{Vgl. 2-11}$$

In deze twee vergelijkingen zijn  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi'_1$  en  $\varphi'_2$  waargenomen grootheden, zodat men hieruit de waarde van  $a$  en  $e$  kan berekenen.

Hieruit volgt dan ook  $b$  uit  $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$  en de afplatting uit  $f = \frac{a - b}{a}$ .

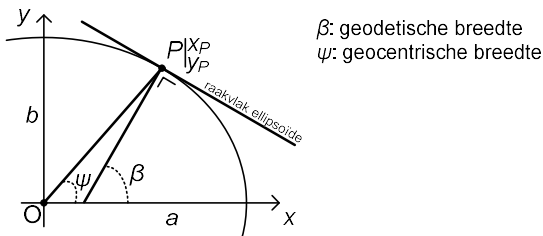
Om dan zo precies mogelijk de vorm van de ellipsoïde te bepalen werden in het verleden verschillende meridiaangraadmetingen gebruikt welke men vereffende met de methode der kleinste kwadraten.

#### 2.2.4.4 Thans

Moderne technieken gebaseerd op satellietplaatsbepaling laten toe met hoge nauwkeurigheid de vorm en afmetingen van de aarde vast te leggen. Dit gaf uiteraard aanleiding tot het gebruik van aangepaste ellipsoïden, zoals GRS1980.

### 2.2.5 Berekeningen op de ellipsoïde

#### 2.2.5.1 Geocentrische breedte $\psi$ , geodetische breedte $\beta$ , geografische breedte $\varphi$ en astronomische breedte



Figuur 15 – Geocentrische breedte  $\Psi$  vs. geodetische breedte  $\beta$

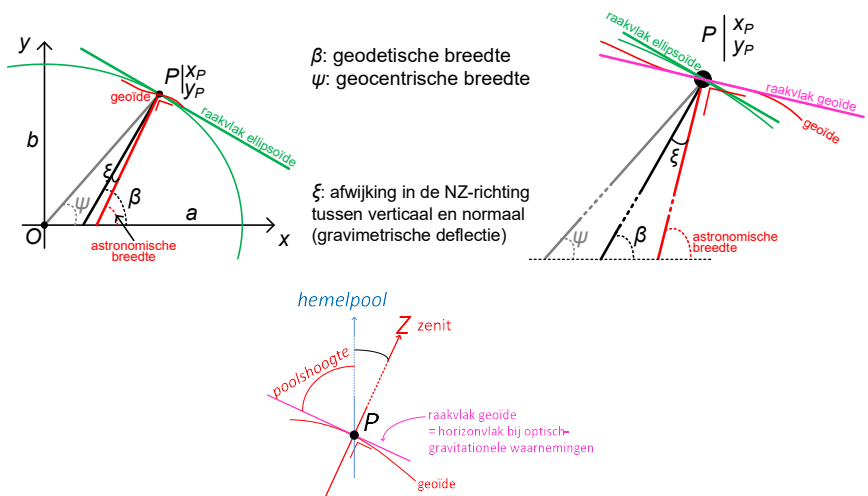
De **geocentrische breedte**  $\psi$  van het punt  $A$  is de hoek in het centrum van de sfeer gemeten in het meridiaanvlak van het punt  $A$  tussen de equator en het punt  $A$ . Dit komt overeen met de boogafstand  $A'A$  van de meridiaanboog door  $A$ . Deze hoek wordt positief gemeten naar de Noordpool, negatief naar de Zuidpool.

De **geodetische breedte**  $\beta$  is bepaald door de normale op het tangent-vlak aan de ellipsoïde in  $A$ . Indien aan de polen en evenaar beide breedtes gelijk zijn verschillen zij maximaal op een breedte van  $45^\circ$ .

Bij een ellipsoïdale aarde wordt de breedte geocentrisch of geodetisch uitgedrukt. Bij een sferische aarde vallen geocentrische en geodetische breedte samen.

**Geografische breedte**  $\varphi$  is een verzamelnaam en geeft geen uitsluitel of men nu geodetische dan wel geocentrische breedte bedoelt (indien niet gespecificeerd zal men veelal de geodetische breedte bedoelen).

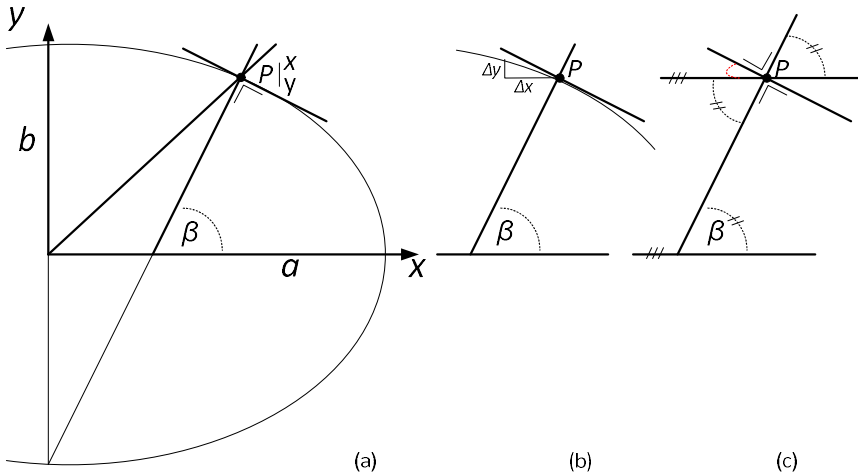
De **astronomische breedte** van het punt  $P$  is de hoek tussen de hemelequator en de vertikale van de plaats. Het is dezelfde hoek welke een waarnemer in het punt  $P$  uit de observatie van de zenit  $Z$  en de hemelpool zal waarnemen (complement van de poolshoogte).



Figuur 16 – Geodetische breedte  $\beta$  vs. astronomische breedte

Uiteraard valt het centrum van de ellipsoïde van een datum (*infra*) en het massacentrum van de aarde niet noodzakelijk samen (zie paragraaf 2.3).

2.2.5.2 *Cartesische coördinaten van een punt P op een geodetische breedte  $\beta$*



*Figuur 17 – Graadmeting*

Uit Vgl. 2-1, met name de vergelijking van de ellips,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , kan worden afgeleid dat  $\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy = 0$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Vgl. 2-12}$$

Beschouwt men de richting van de raaklijn in x en y en de corresponderende toename (zie (b) in *Figuur 17*)

$$\tan(90^\circ - \beta) = -\frac{dy}{dx} \quad \left(-\frac{dy}{dx} \text{ omdat een positieve } dy \rightarrow \text{negatieve } dx\right)$$

$$\cot \beta = -\frac{dy}{dx} \quad \text{Vgl. 2-13}$$

Uit Vgl. 2-12 en Vgl. 2-13  $\Rightarrow \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} (-\cot \beta) = 0$

$$\frac{y}{b^2} \cot \beta = \frac{x}{a^2}$$

$$\begin{array}{l}
 y = x \frac{b^2}{a^2} \tan \beta \quad \text{Vgl. 2-14} \\
 b^2 = a^2 (1 - e^2)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} y = x \frac{b^2}{a^2} \tan \beta \\ b^2 = a^2 (1 - e^2) \end{array}} \right\}
 \begin{array}{l}
 y = x(1 - e^2) \tan \beta \quad \text{Vgl. 2-15}
 \end{array}$$

Uit de vergelijking van de ellips en Vgl. 2-14 volgt dat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2 b^4}{b^2 a^4} \tan^2 \beta = 1$$

$$x^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} \tan^2 \beta \right) = 1$$

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + b^2/a^2 \tan^2 \beta}$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \beta + b^2/a^2 \sin^2 \beta} \quad [ \times \cos^2 \beta ]$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta} \quad [ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rightarrow b^2/a^2 = (1 - e^2) ]$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 \beta}{1 - e^2 \sin^2 \beta}$$

$$\rightarrow x = \frac{a \cos \beta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \beta}} = \frac{a \cos \beta}{W}, \quad \text{met } W = (1 - e^2 \sin^2 \beta)^{1/2} \quad \text{Vgl. 2-16}$$

Uit Vgl. 2-14  $\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2} \tan \beta$ ,  $\frac{b^2}{a^2} = (1 - e^2)$  en vgl. Vgl. 2-16 volgt dat

$$y = x \cdot \frac{b^2}{a^2} \tan \beta = \frac{a \cos \beta (1 - e^2) \tan \beta}{W} = \frac{a(1 - e^2) \sin \beta}{W}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x = \frac{a \cos \beta}{W} \\
 y = \frac{a(1 - e^2) \sin \beta}{W}
 \end{array} \right. , \quad \text{met } W = (1 - e^2 \sin^2 \beta)^{1/2} \quad \text{Vgl. 2-17}$$

### 2.2.5.3 Hoekverschil tussen geocentrische en geodetische breedte

Uit Vgl. 2-15  $y = x(1 - e^2) \tan \beta$  volgt dat  $\frac{y}{x} = (1 - e^2) \tan \beta$ .

Uit *Figuur 15* leidt men af dat  $\tan \psi = \frac{y}{x}$ , m.a.w.

$$\tan \psi = (1 - e^2) \tan \beta.$$

Vgl. 2-18

Daar  $b < a \Rightarrow |\psi| \leq \beta$ , met op de pool  $\beta = \psi = 90^\circ$  en op de evenaar  $\beta = \psi = 0^\circ$  en tussen evenaar en pool  $|\psi| < \beta$ . De vraag stelt zich dan uiteraard hoe groot het hoekverschil  $V$  tussen de geocentrische breedte en geodetische breedte bedraagt of wat is de waarde  $V = \beta - \psi$

Uit de verschilregel van de tangens volgt dat  $\tan(\beta - \psi) = \frac{\tan \beta - \tan \psi}{1 + \tan \beta \tan \psi}$

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \psi) &= \frac{\tan \beta - \tan \psi}{1 + \tan \beta \tan \psi} = \frac{\tan \beta - (1 - e^2) \tan \beta}{1 + \tan \beta \cdot (1 - e^2) \tan \beta} \\ &= \tan \beta \frac{1 - (1 - e^2)}{1 + \tan^2 \beta \cdot (1 - e^2)} \\ &= \tan \beta \frac{e^2}{1 + \tan^2 \beta - e^2 \tan^2 \beta} \\ &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{e^2}{1 + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} - e^2 \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} \\ &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{e^2}{\frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} \\ &= \frac{2}{2} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{e^2}{\frac{\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}} \\ &= \frac{2 \sin \beta \cdot e^2 \cdot \cos^2 \beta}{2 \cos \beta \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta (1 - e^2))} \\ &= \frac{2 \sin \beta \cdot e^2 \cdot \cos \beta}{2 \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta (1 - e^2))} \end{aligned}$$

$$\frac{2 \sin \beta \cdot e^2 \cdot \cos \beta}{2 \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - e^2 \sin^2 \beta)}$$

$$= \frac{e^2 \sin 2\beta}{2 \cdot (1 - e^2 \sin^2 \beta)} = \frac{e^2 \sin 2\beta}{2 - e^2 (2 \cdot \sin^2 \beta)}$$

gelet op  $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta - 2 \sin^2 \beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$  of

$$2 \sin^2 \beta = 1 - \cos 2\beta$$

volgt dat

$$\tan(\beta - \psi) = \frac{e^2 \sin 2\beta}{2 - e^2(1 - \cos 2\beta)}$$

$$= \frac{e^2 \sin 2\beta}{2 - e^2 + e^2 \cos 2\beta} = \frac{\frac{e^2 \sin 2\beta}{2 - e^2}}{\frac{2 - e^2 + e^2 \cos 2\beta}{2 - e^2}} = \frac{\frac{e^2}{2 - e^2} \cdot \sin 2\beta}{\frac{2 - e^2}{2 - e^2} + \frac{e^2 \cos 2\beta}{2 - e^2}}$$

$$= \frac{\frac{e^2}{2 - e^2} \cdot \sin 2\beta}{1 + \frac{e^2}{2 - e^2} \cdot \cos 2\beta}$$

$$\tan(\beta - \psi) = \frac{n \cdot \sin 2\beta}{1 + n \cdot \cos 2\beta} \quad \text{Vgl. 2-19}$$

daar  $n = \frac{e^2}{2 - e^2}$  voldoende klein is kan men dit benaderen door een reeksontwikkeling

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - \dots$$

waaruit volgt dat

$$\tan(\beta - \psi) = \frac{n \cdot \sin 2\beta}{1 + n \cdot \cos 2\beta} = n \cdot \sin 2\beta (1 - n \cdot \cos 2\beta + n^2 \cdot \cos^2 \beta - \dots)$$

$$= n \cdot \sin 2\beta - n^2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \dots$$

met toepassing van de verdubbelingsformule ( $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$ ) geeft dit



$$\tan(\beta - \psi) = n \cdot \sin 2\beta - \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sin 4\beta + \dots$$

gelet op het kleine hoekverschil is  $\tan V \approx V$  waaruit volgt dat

$$\begin{aligned} V^{(n)} \sin 1'' &= n \cdot \sin 2\beta - \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sin 4\beta + \dots \\ &= \frac{e^2}{2 - e^2} \cdot \sin 2\beta - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2 - e^2}\right)^2 \cdot \sin 4\beta + \dots \end{aligned}$$

Substitueert men de excentriciteit  $e$  door de afplatting  $f$  (zie Vgl. 2-6) bekomt men

$$e^2 = 2f - f^2, \text{ met } f = \frac{1}{297} \text{ geeft dit}$$

$$V^{(n)} = (\beta - \psi)^{(n)} = 695,65 \cdot \sin 2\beta - 1,17 \cdot \sin 4\beta + \dots \quad \text{Vgl. 2-20}$$

Bij  $\sin 2\beta = 1$ , m.a.w. bij  $\beta = 45^\circ$ , bereikt de hoek  $V$  zijn maximum afwijkingswaarde (= 11'36'') tussen de geocentrische en de geodetische breedte.

#### 2.2.5.4 Plaatselijke waarde van de voerstraal

De plaatselijke waarde van de voerstraal<sup>7</sup>  $\rho$  als een functie van de geodetische breedte

$$\beta, \text{ kan men bepalen uit Vgl. 2-17, } \begin{cases} x = \frac{a \cos \beta}{W} \\ y = \frac{a(1-e^2) \sin \beta}{W} \end{cases}, \text{ met } W = (1 - e^2 \sin^2 \beta)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Immers } \rho^2 &= x^2 + y^2 = \frac{1}{W^2} [a^2 \cos^2 \beta + a^2(1 - e^2)^2 \sin^2 \beta] \\ &= \frac{1}{W^2} [a^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta + a^2 e^4 \sin^2 \beta - 2 a^2 e^2 \sin^2 \beta] \\ &= \frac{1}{W^2} [a^2 + a^2 e^4 \sin^2 \beta - 2 a^2 e^2 \sin^2 \beta] \\ &= \frac{a^2}{W^2} [1 + e^4 \sin^2 \beta - 2 e^2 \sin^2 \beta] \\ &= \frac{a^2}{W^2} [1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta] \end{aligned}$$

<sup>7</sup> niet te verwarren met de kromtestralen (*infra*)

$$\varrho = \frac{a}{W} \sqrt{[1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta]}, \quad \text{Vgl. 2-21}$$

met  $a$  de grote halve as of met andere woorden de equatoriale straal en  $W = (1 - e^2 \sin^2 \beta)^{1/2}$ .

Aan de **evenaar** ( $\beta = 0^\circ$ ) wordt  $\varrho = \frac{a}{W} \sqrt{[1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta]}$

$$\varrho = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)^{1/2}} \sqrt{[1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta]} = a, \quad \text{Vgl. 2-22}$$

Uit  $\varrho^2 = \frac{a^2}{W^2} [1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta] = \frac{a^2}{(1 - e^2 \sin^2 \beta)} [1 - (2 e^2 - e^4) \sin^2 \beta]$

volgt dat aan de **pool** ( $\beta = 90^\circ$ )

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{a^2}{(1 - e^2)} [1 - (2 e^2 - e^4)] = a^2 \cdot \frac{1 - 2e^2 - e^4}{1 - e^2} = a^2 \cdot (-1 - e^2) \\ &= a^2 \cdot \left( -1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \right) = b^2 \end{aligned}$$

of  $\rho = b$

Vgl. 2-23

In astronomische almanakken<sup>8</sup> vindt men de waarde van de geodetische breedte  $\beta$  van de sterrenwachten:

| Observatory Name           | Location | East Longitude |        | Latitude | Height (m.s.l.) |
|----------------------------|----------|----------------|--------|----------|-----------------|
|                            |          | °              | '      | °        | m               |
| <b>Belgium</b>             |          |                |        |          |                 |
| Ast. and Astrophys. Inst.  | Brussels | +              | 4 23.0 | +50 48.8 | 147             |
| Cointe Obs.                | Liège    | +              | 5 33.9 | +50 37.1 | 127             |
| Royal Obs. of Belgium      | R Uccle  | +              | 4 21.5 | +50 47.9 | 105             |
| Royal Obs. Radio Ast. Sta. | R Humain | +              | 5 15.3 | +50 11.5 | 293             |

<sup>8</sup> in het jaarboek van de Koninklijke Sterrenwacht vindt men aldus (GRS80 ellipsoïde) voor de Schmidttelescoop (top van de koepel) te Ukkel:

|   |                |                     |                    |
|---|----------------|---------------------|--------------------|
| X | 4 027 931,23 m | breedte             | + 50° 47' 51",0663 |
| Y | 306 956,59 m   | lengte              | + 4° 21' 28",5002  |
| Z | 4 919 459,90 m | lengte              | + 0h 17m 25s,9000  |
|   |                | ellipsoïdale hoogte | 157,22 m           |
|   |                | hoogte TAW          | 114,29 m           |