Hoofdstuk 5

Limietonderzoek

Definities

Stel

- (M_1, d_1), (M_2, d_2): metrische ruimten
- f: niet-ledige $M_1 \to M_2$ functie
- $\varnothing \subset A \subseteq \mathrm{def}(f)$
- $a \in \bar{A}, \quad L \in M_2$

Definitie

L is een *limiet* van f in a

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(B_1(a;\delta)) \subseteq B_2(L;\varepsilon))$

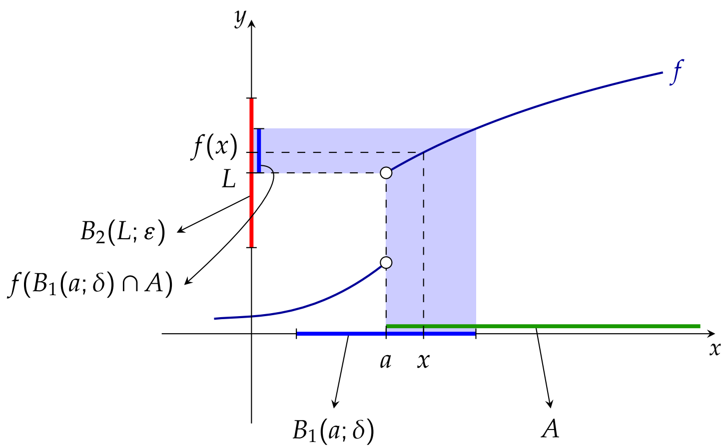
$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathrm{def}(f))(d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),L) < \varepsilon)$

- f bezit een limiet in a

L is een limiet t.o.v. A in a

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(B_1(a;\delta) \cap A) \subseteq B_2(L;\varepsilon))$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(d_1(x,a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),L) < \varepsilon)$



<u>Eigenschap</u>

Er bestaat hoogstens één element $L \in M_2$ waarvoor geldt dat L een limiet van f in a is

- *de* limiet van f in a:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x)}$$

Limiet van functies met waarden in een cartesiaans product

Stelling

Stel

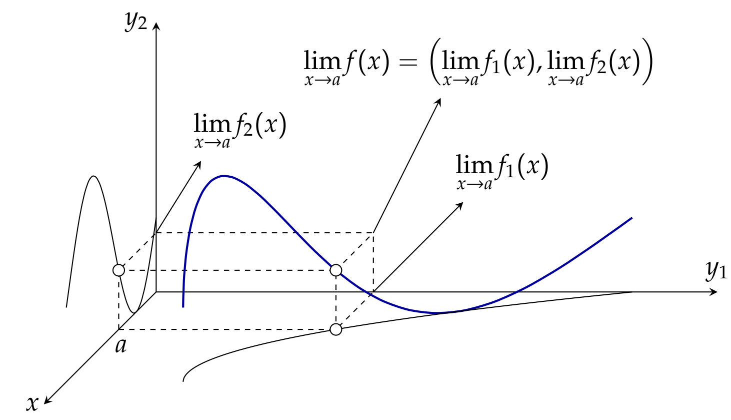
- $(M_1, d_1), (M_2, d_2), (E, d_E)$: metrische ruimten
- $f = (f_1, f_2)$: niet-ledige $E \to M_1 \times M_2$ functie
- $\varnothing \subset A \subseteq \mathrm{def}(f)$
- $a \in \bar{A}$

Dan: f bezit een limiet in a

$\Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2\})(f_i$ bezit een limiet in $a)$

- er geldt dan $\lim\limits_{x \to a} (f_1, f_2)(x) = \Big(\lim\limits_{x \to a} f_1(x), \lim\limits_{x \to a} f_2(x)\Big)$

f bezit een limiet in $a \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2\})(f_i$ bezit een limiet in $a)$



Basiseigenschappen

Stelling (Limietbegrip is een lokaal begrip)

Stel

- $f \colon M_1 \to M_2$ functie
- $\varnothing \subset A \subseteq \mathrm{def}(f)$
- $a \in \bar{A}, \quad L \in M_2$

Dan $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L \Leftrightarrow (\exists r > 0)\Big(\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A \cap B(a;r)}} f(x) = L\Big)$

Stelling (Limiet t.o.v. een kleinere verzameling)

Stel

- $f \colon M_1 \to M_2$ functie
- $\varnothing \subset A \subseteq \mathrm{def}(f)$
- $a \in \bar{A}, \quad L \in M_2$
- $B \subseteq A$ zo dat $a \in \bar{B}$

Als $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = L$

Stelling (Beperking van de kandidaat-limiet)

Stel

- $f\colon M_1 \to M_2$ functie
- $\varnothing \subset A \subseteq \operatorname{def}(f)$
- $a \in \bar{A}, \quad L \in M_2$

Er geldt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow L \in \overline{\operatorname{wd}(f)}$$

Gevolg

f bezit een limiet in $a \Leftrightarrow (\exists L \in \overline{\operatorname{wd}(f)})(\forall \varepsilon > 0)$
$(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{def}(f))(d_1(a,x) < \delta \Rightarrow d_2(f(x),L) < \varepsilon)$

Stelling (Verband tussen limiet en functiewaarde)

Stel f een $M_1 \to M_2$ functie en $a \in \operatorname{def}(f)$.

Er geldt:

- f bezit een limiet in $a \Rightarrow f(a)$ is de limiet van f in a
- $f(a)$ is niet de limiet van f in $a \Rightarrow f$ bezit geen limiet in a

Stelling (Verband limiet – continuïteit)

Stel f een $M_1 \to M_2$ functie en $a \in \overline{\operatorname{def}(f)}$.

Er geldt:

- Als $a \in \operatorname{def}(f)$, dan: f bezit een limiet in $a \Leftrightarrow f$ is continu in a
- Als $a \in \overline{\operatorname{def}(f)} \setminus \operatorname{def}(f)$, dan:

  f bezit L tot limiet in $a \Leftrightarrow \bar{f}$ is continu in a met $\bar{f} = f \cup \{(a,L)\}$

Stelling (Kettingregel voor limieten)

Stel

- $(M_1,d_1), (M_2,d_2), (M_3,d_3)$: metrische ruimten
- $f\colon M_1 \to M_2$ functie
- $g\colon M_2 \to M_3$ functie
- $a \in \overline{\operatorname{def}(g \circ f)}$
- $k \in M_2, \quad L \in M_3$

Als

- $\lim_{x\to a} f(x) = k$
- $\lim_{y\to k} g(y) = L$

dan $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = L$

<u>Gevolg: substitutieprincipe</u>

Stel

- $f\colon M_1 \to M_2$ functie
- $g\colon M_2 \to M_3$ functie
- $a \in \overline{\operatorname{def}(g \circ f)}$
- $k \in M_2$

Als

- $\lim_{x\to a} f(x) = k$
- g is continu in k

dan $\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$

Overzicht

- Definitie
- Limiet van functies met waarden in een cartesiaans product
- Basiseigenschappen
  - Limietbegrip is een lokaal begrip
  - Limiet t.o.v. een kleinere verzameling
  - Beperking van de kandidaat-limiet
  - Verband tussen limiet en functiewaarde
  - Verband limiet-continuïteit
  - Kettingregel voor limieten

Limietonderzoek van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies

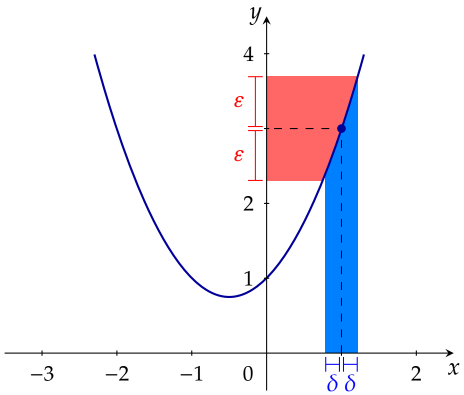
- Limietonderzoek t.o.v. $(\mathbb{R}, d_{|.|})$
  - $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (\mathbb{R}, d_{|.|})$
    - dus $a \in \mathbb{R}$ en $L \in \mathbb{R}$
  - $B(a;\delta) =]a-\delta, a+\delta[$, $B(L;\varepsilon) =]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$
  - Stel
    - $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie
    - $A \subseteq \operatorname{def}(f)$
    - $a \in \bar{A}, \quad L \in \mathbb{R}$

    dan
    - $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = L$
      $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$
    - $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
      $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \operatorname{def}(f))(|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$

- Voorbeeld:

  $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 3$

  $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-1| < \delta \Rightarrow |(x^2+x+1) - 3| < \varepsilon)$



- Limietonderzoek t.o.v. $(\bar{\mathbb{R}}, d')$
  - $(M_1, d_1) = (M_2, d_2) = (\bar{\mathbb{R}}, d')$
    - dus ook $a \in \{-\infty, +\infty\}$ of $L \in \{-\infty, +\infty\}$
  - open ballen:
    - voor $a \in \mathbb{R}$: $(]a-\varepsilon, a+\varepsilon[)_{\varepsilon \in]0,+\infty[}$
    - voor $a = +\infty$: $(]\varepsilon, +\infty])_{\varepsilon \in]0,+\infty[}$
    - voor $a = -\infty$: $([-\infty, -\varepsilon[)_{\varepsilon \in]0,+\infty[}$
  - Voorbeelden:
    - stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie, $A \subseteq \operatorname{def}(f)$, $3 \in \bar{A}$

      $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x \in A}} f(x) = +\infty$

      $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(A \cap]3-\delta, 3+\delta[) \subseteq]\varepsilon, +\infty])$

      $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x-3| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon)$
    - stel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie, $A \subseteq \operatorname{def}(f)$, $-\infty \in \bar{A}$

      $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ x \in A}} f(x) = +\infty$

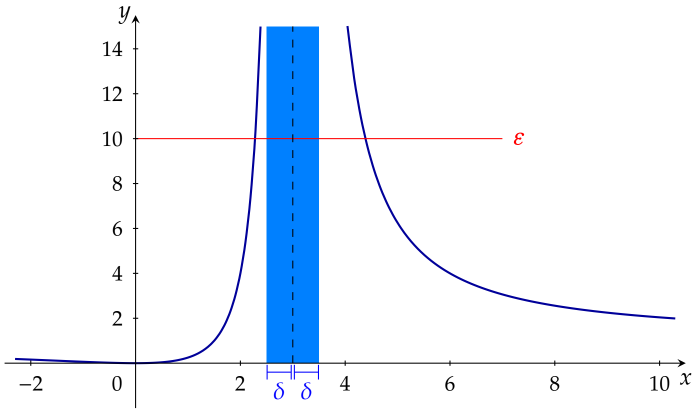
      $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(A \cap [-\infty, -\delta[) \subseteq]\varepsilon, +\infty])$

      $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon)$

- Voorbeeld 1:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2}{(x-3)^2} = +\infty$$

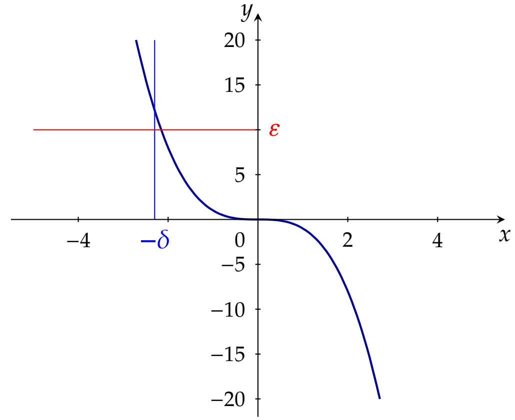
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})\left(|x-3| < \delta \Rightarrow \frac{x^2}{(x-3)^2} > \varepsilon\right)$$



- Voorbeeld 2:

$$\lim_{x\to -\infty} (-x^3) = +\infty$$

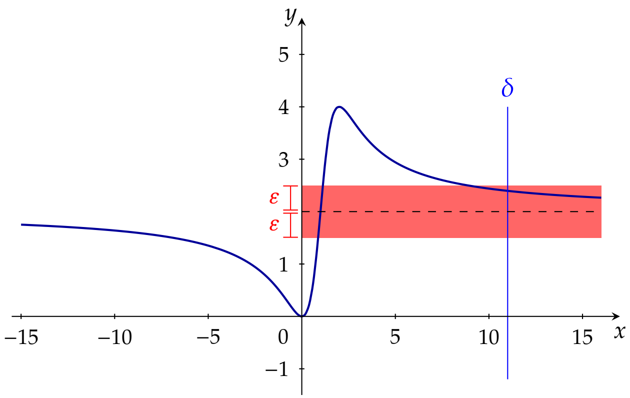
$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(x < -\delta \Rightarrow -x^3 > \varepsilon)$$



- Voorbeeld 3:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2-2x+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\left(x > \delta \Rightarrow \left|\frac{2x^2}{x^2-2x+2} - 2\right| < \varepsilon\right)$$



- Linker- en rechterlimiet
  - Stel

    $A_+ = \{x \mid x \in \mathrm{def}(f) \wedge x > a\}$

    $A_- = \{x \mid x \in \mathrm{def}(f) \wedge x < a\}$

  - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A_+}} f(x)$:

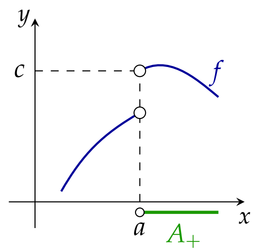
    rechterlimiet van f in a

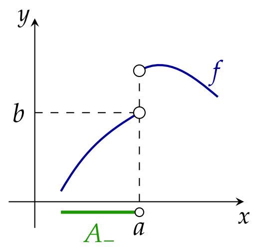
    Notatie: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x), f(a_+)$

  - $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A_-}} f(x)$:

    linkerlimiet van f in a

    Notatie: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x), f(a_-)$





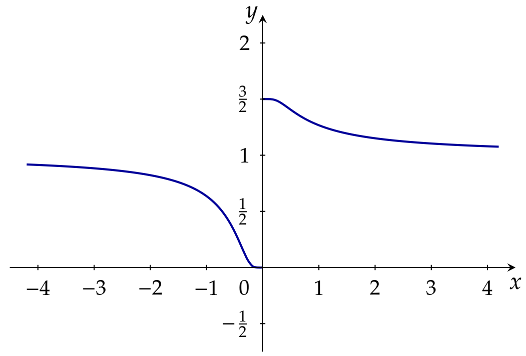
- $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x)$: enkel ingevoerd voor $a \in \bar{A}$
- dus gelijktijdig linker- en rechterlimietonderzoek: enkel voor $a \in \overline{\mathrm{def}(f) \cap]a,+\infty[} \cap \overline{\mathrm{def}(f) \cap]-\infty,a[}$

Stelling (Verband limiet, linker- en rechterlimiet)

- als f bezit een limiet in a, dan bezit f een rechter- en een linkerlimiet in a en $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a_+) = f(a_-)$
- als f bezit geen rechterlimiet in $a \vee f$ bezit geen linkerlimiet in a, dan bezit f geen limiet in a
- als f bezit een rechterlimiet in $a \wedge f$ bezit een linkerlimiet in a, dan
  - $f(a_+) \neq f(a_-) \Rightarrow f$ bezit geen limiet in a
  - $a \notin \mathrm{def}(f) \wedge f(a_+) = f(a_-) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a_+)$
  - $a \in \mathrm{def}(f) \wedge f(a_+) = f(a_-) \wedge f(a_+) \neq f(a) \Rightarrow f$ bezit geen limiet in a
  - $a \in \mathrm{def}(f) \wedge f(a_+) = f(a_-) = f(a) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a_+)$

- Voorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{3}{2+e^{-\frac{1}{x}}} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{3}{2+e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}$$



Stelling (Gedrag van een functie f in de omgeving van een punt waar f een limiet bezit)

Stel

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie
- $a \in \bar{\mathbb{R}}, \quad L \in \bar{\mathbb{R}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, dan

$$L > \alpha \Rightarrow (\exists r > 0)(\forall x \in B(a;r) \cap \mathrm{def}(f))(f(x) > \alpha)$$
$$L < \alpha \Rightarrow (\exists r > 0)(\forall x \in B(a;r) \cap \mathrm{def}(f))(f(x) < \alpha)$$

Stelling (Monotoniciteit van de limietbewerking)

Stel

- $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies
- $a \in \bar{\mathbb{R}}, \quad L \in \bar{\mathbb{R}}, \quad M \in \bar{\mathbb{R}}$
- $a \in \overline{\mathrm{def}(f) \cap \mathrm{def}(g)}$

Als

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$
- $(\exists r > 0)(\forall x \in B(a;r) \cap \mathrm{def}(f) \cap \mathrm{def}(g))(f(x) \leqslant g(x))$

dan $L \leqslant M$

Stelling (Sandwichregel)

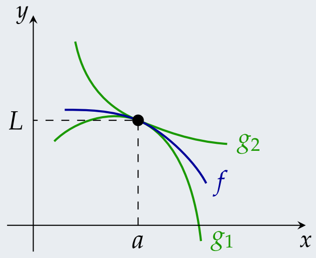
Stel

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie
- $L \in \mathbb{R}, \quad a \in \overline{\mathrm{def}(f)} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$
- $g_1, g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies gedefinieerd over $B(a;r) \cap \mathrm{def}(f)$ met $r > 0$

Als

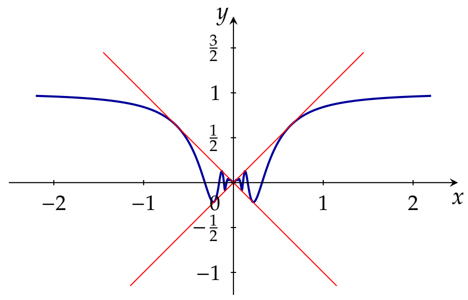
- $\lim_{x\to a} g_1(x) = L$
- $\lim_{x\to a} g_2(x) = L$
- $(\forall x \in B(a;r) \cap \mathrm{def}(f))$ $(g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x))$

dan $\lim_{x\to a} f(x) = L$



- Voorbeeld:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Stelling (Stelling van de monotone limiet)

Stel

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functie
- $a = \sup(\mathrm{def}(f)) \notin \mathrm{def}(f), \quad b = \inf(\mathrm{def}(f)) \notin \mathrm{def}(f)$

Als f is monotoon

dan f bezit een limiet in $a \wedge f$ bezit een limiet in b

en

$$\lim_{x\to \sup(\mathrm{def}(f))} f(x) = \begin{cases} \sup(\mathrm{wd}(f)), & \text{als } f \text{ stijgend is} \\ \inf(\mathrm{wd}(f)), & \text{als } f \text{ dalend is} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \inf(\mathrm{def}(f))} f(x) = \begin{cases} \inf(\mathrm{wd}(f)), & \text{als } f \text{ stijgend is} \\ \sup(\mathrm{wd}(f)), & \text{als } f \text{ dalend is} \end{cases}$$

Overzicht

- Limietonderzoek t.o.v. $(\mathbb{R}, d_{|.|})$
- Limietonderzoek t.o.v. $(\bar{\mathbb{R}}, d')$
- Linker- en rechterlimiet
  - Verband limiet, linker- en rechterlimiet
- Eigenschappen
  - Gedrag van een functie f in de omgeving van een punt waar f een limiet bezit
  - Monotoniciteit van de limietbewerking
  - Sandwichregel voor limieten
  - Stelling van de monotone limiet

Convergentie van rijen in een metrische ruimte

- stel (M, d): metrische ruimte
- rij in M: $\mathbb{N}^* \to M$ afbeelding
  - domeinruimte voor elke rij: $(\bar{\mathbb{R}}, d')$
- Continuïteit
  - stel $m \in \mathbb{N}^*$
  - $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(d_{|.|}(n, m) < \delta \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon)$
    - geldig voor $\delta = \frac{1}{2}$
  - dus: elke rij is continu, $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, M) = \mathcal{C}(\mathbb{N}^*, M)$
- Limietonderzoek
  - enkel in punten van $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$
  - $(\forall m \in \mathbb{N}^*)\big(\lim\limits_{n \to m} x_n = x_m\big)$
  - enkel onderscheid tussen rijen in $+\infty$

- Definitie

  stel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: rij in (M, d), $a \in M$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bezit een limiet in $+\infty$
  - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar a

    $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

    $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n > N \Rightarrow x_n \in B(a; \varepsilon))$

    $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n > N \Rightarrow d(a, x_n) < \varepsilon)$
- Voorbeelden
  - Reële rij: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(x_n \in \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$
    - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar a

      $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon)$
    - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar $+\infty$

      $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n > N \Rightarrow x_n > \varepsilon)$
    - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar $-\infty$

      $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n > N \Rightarrow x_n < -\varepsilon)$

- Rij met waarden in een cartesiaans product: (M_1, d_1), (M_2, d_2): metrische ruimten, $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: rij in $M_1 \times M_2$, $(a, b) \in M_1 \times M_2$

  $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar (a, b)

  $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (a, b)$

  $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$

  $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar a

  $\wedge$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent naar b

- Stel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: rij in $\mathbb{C}$:

  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is convergent

  $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $(\mathrm{Im}(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ zijn beide convergent

  in geval van convergentie:

$$\mathrm{Re}\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(x_n)$$

$$\mathrm{Im}\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(x_n)$$

- Notatie: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

Stelling (Verband tussen continuïteit en convergentie)

Stel

- (M_1, d_1), (M_2, d_2): metrische ruimten
- f: $M_1 \to M_2$ functie
- $a \in \operatorname{def}(f)$

Er geldt:

$$
\begin{aligned}
& f \text{ is continu in } a \\
& \Leftrightarrow (\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ een rij in } \operatorname{def}(f)) \\
& \quad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \to f(a))
\end{aligned}
$$

Gevolg

$$
\begin{aligned}
& f \text{ is niet continu in } a \\
& \Leftrightarrow (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ een rij in } \operatorname{def}(f)) \\
& \quad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \wedge (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \not\to f(a))
\end{aligned}
$$

Stelling (Verband tussen het bestaan van een limiet en convergentie)

Stel

- (M_1, d_1), (M_2, d_2): metrische ruimten
- f: $M_1 \to M_2$ functie
- $a \in \overline{\operatorname{def}(f)}$, $L \in M_2$

Er geldt:

$$
\begin{aligned}
& f \text{ bezit een limiet in } a \Leftrightarrow (\exists L \in \overline{\operatorname{wd}(f)}) \\
& (\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ een rij in } \operatorname{def}(f))((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} \to L)
\end{aligned}
$$

Overzicht

- Continuïteit van een rij
- Limietonderzoek van een rij — convergentie
- Eigenschappen
  - Verband tussen continuïteit en convergentie
  - Verband tussen het bestaan van een limiet en convergentie

Limietonderzoek van algebraïsch samengestelden van reële functies

- We veronderstellen:
  - (M, d): domeinruimte van f en g,
$(\bar{\mathbb{R}}, d')$: codomeinruimte van f en g
  - de algebraïsch samengestelden van f en g zijn gedefinieerd over A, met $\emptyset \neq A \subseteq M$
  - $a \in \bar{A}$
  - $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \bar{\mathbb{R}}$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \bar{\mathbb{R}}$

- Rekenregels voor eigenlijke limieten:
  - stel $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}$, dan:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \\
\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \\
\lim_{x\to a} -f(x) &= -\lim_{x\to a} f(x) \\
\lim_{x\to a}(f(x)+\alpha) &= \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) + \alpha && (\alpha \in \mathbb{R}) \\
\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) &= \lambda \lim_{x\to a} f(x) && (\lambda \in \mathbb{R}^*)
\end{aligned}$$

- stel $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x) \in \mathbb{R}^*$, dan:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{1}{g}(x) &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \\
\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}
\end{aligned}$$

- Rekenregels m.b.t. $+\infty$ en $-\infty$:
  Zij $a \in \mathbb{R}$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
+\infty \pm a &= +\infty \\
-\infty \pm a &= -\infty \\
+\infty + \infty &= +\infty \\
-\infty - \infty &= -\infty \\
(+\infty)\cdot(-\infty) &= -\infty \\
(\pm\infty)^2 &= +\infty
\end{aligned}$$

$$(+\infty)\cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{als } a > 0 \\ -\infty & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

$$(-\infty)\cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{als } a > 0 \\ +\infty & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty & \text{als } a > 0 \\ \mp\infty & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{0} = \pm\infty \text{ (afh. teken)}$$

Onbepaaldheden:

$+\infty-\infty$, $(\pm\infty)\cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\dfrac{0}{0}$

- De kennis van $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ leidt tot de bepaling van de limiet van de algebraïsch samengestelden van f en g in a, uitgezonderd:
  - $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ is nog niet bepaald als
    $$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$$
    - onbepaaldheid $\infty - \infty$
  - $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ is nog niet bepaald als
    $$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$
    - onbepaaldheid $0\cdot\infty$
  - $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$ is nog niet bepaald als
    $$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
    $$\text{of } \lim_{x\to a} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \wedge \lim_{x\to a} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$
    - onbepaaldheid $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Limietonderzoek van de elementaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies

- Limietonderzoek van de machtfunctie:

a	$\lim\limits_{x\to a} x^r$, met $r > 0$
$\in \operatorname{def}(.^r)$	a^r
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$\begin{cases} +\infty, \text{ als } r = \frac{m}{n} \text{ met } m \text{ even en } n \text{ oneven} \\ -\infty, \text{ als } r = \frac{m}{n} \text{ met } m \text{ en } n \text{ oneven} \end{cases}$

a	$\lim\limits_{x\to a} x^r$, met $r < 0$
$\in \operatorname{def}(.^r)$	a^r
$+\infty$	0
$-\infty$	0, als $r = -\frac{m}{n}$ met n oneven
0	$\begin{cases} +\infty, \text{ als } r = -\frac{m}{n} \text{ met } n \text{ even of met } m \text{ even en } n \text{ oneven} \\ \quad \text{of als } r \in \,]-\infty, 0[\, \setminus \mathbb{Q} \\ \text{bestaat niet, als } r = -\frac{m}{n} \text{ met } m \text{ en } n \text{ oneven} \end{cases}$

- Limietonderzoek van de exponentiële functie met grondtal a, $a \in \,]0, +\infty[$:

α	$\lim\limits_{x\to \alpha} a^x$
$\in \mathbb{R}$	a^α
$+\infty$	$\begin{cases} 0\,, \text{ als } a \in \,]0,1[\\ 1\,, \text{ als } a = 1 \\ +\infty\,, \text{ als } a \in \,]1, +\infty[\end{cases}$
$-\infty$	$\begin{cases} +\infty\,, \text{ als } a \in \,]0,1[\\ 1\,, \text{ als } a = 1 \\ 0\,, \text{ als } a \in \,]1, +\infty[\end{cases}$

- Limietonderzoek van de logaritmische functie met grondtal a, $a \in \,]0, +\infty[\, \setminus \{1\}$:

α	$\lim\limits_{x\to \alpha} \log_a^x$
$\in \,]0, +\infty[$	$\log_a(\alpha)$
$+\infty$	$\begin{cases} -\infty\,, \text{ als } a \in \,]0,1[\\ +\infty\,, \text{ als } a \in \,]1, +\infty[\end{cases}$
0	$\begin{cases} +\infty\,, \text{ als } a \in \,]0,1[\\ -\infty\,, \text{ als } a \in \,]1, +\infty[\end{cases}$

- Limietonderzoek van de hyperbolische functies:

a	$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sh}(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{ch}(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{th}(x)$
$\in \mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(a)$	$\operatorname{ch}(a)$	$\operatorname{th}(a)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	-1

- Limietonderzoek van de invers-hyperbolische functies:

a	$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{argsh}(x)$
$\in \mathbb{R}$	$\operatorname{argsh}(a)$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$

a	$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{argch}(x)$
$\in [1, +\infty[$	$\operatorname{argch}(a)$
$+\infty$	$+\infty$

- Limietonderzoek van de goniometrische functies:

a	$\lim_{x\to a} \sin(x)$	$\lim_{x\to a} \cos(x)$
$\in \mathbb{R}$	$\sin(a)$	$\cos(a)$
$+\infty$	bestaat niet	bestaat niet
$-\infty$	bestaat niet	bestaat niet

a	$\lim_{x\to a} \mathrm{tg}(x)$
$\in \mathrm{def}(\mathrm{tg})$	$\mathrm{tg}(a)$
$\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	bestaat niet
$+\infty$	bestaat niet
$-\infty$	bestaat niet

- Limietonderzoek van de invers-goniometrische of cyclometrische functies:

a	$\lim_{x\to a} \arcsin(x)$	$\lim_{x\to a} \arccos(x)$
$\in [-1,1]$	$\arcsin(a)$	$\arccos(a)$

a	$\lim_{x\to a} \mathrm{arctg}(x)$
$\in \mathbb{R}$	$\mathrm{arctg}(a)$
$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$
$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$

- Praktisch ($x \to a$):
  - veeltermfuncties:

$a \in \mathrm{def}(f)$	$\Rightarrow$	limiet = functiewaarde
$a = \pm\infty$	$\Rightarrow$	limiet = limiet v/d hoogstegraadsterm

  - rationale functies:

$a \in \mathrm{def}(f)$	$\Rightarrow$	limiet = functiewaarde
$\frac{r}{0}$	$\Rightarrow$	linker- en rechterlimiet zijn ∞; de limiet kan bestaan
$\frac{0}{0}$	$\Rightarrow$	teller en noemer zijn deelbaar door $(x-a)$; afzonderen
$a = \pm\infty$	$\Rightarrow$	limiet = limiet v/h quotiënt v/d hoogstegraadstermen

- irrationale functies:

$a \in \mathrm{def}(f)$	$\Rightarrow$	limiet = functiewaarde
$\frac{r}{0}$	$\Rightarrow$	linker- en rechterlimiet zijn, indien ze bestaan, ∞
$\frac{0}{0}$	$\Rightarrow$	vermenigvuldig T en N met de toegevoegde wortelvorm; T en N zijn dan deelbaar door $(x-a)$; afzonderen
$\frac{\infty}{\infty}$	$\Rightarrow$	zet in T en N de hoogste macht voorop en vereenvoudig
$+\infty - \infty$	$\Rightarrow$	vermenigvuldig T en N met de toegevoegde wortelvorm
$a = \pm\infty$	$\Rightarrow$	zet de hoogste macht voorop

- goniometrische functies:

$a \in \text{def}(f)$	$\Rightarrow$	limiet = functiewaarde
$\frac{r}{0}$	$\Rightarrow$	linker- en rechterlimiet zijn, indien ze bestaan, ∞
$\frac{0}{0}$	$\Rightarrow$	tracht gebruik te maken van de goniometrische formules, en van $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = 1$

Convergentie van algebraïsch samengestelden van reële rijen

Definitie

Reële rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: afbeelding $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$
m.a.w. $x_n \in \mathbb{R}$, voor alle $n \in \mathbb{N}^*$

Definitie

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is *convergent* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}$
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ is *divergent* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in \{-\infty, +\infty\}$

- Eigenschappen
  - Stel
    - $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^*$
    - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a$
    - $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to b$

    dan

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a + b \qquad (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to ab$$
$$(-x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to -a \qquad (x_n + \alpha)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a + \alpha$$
$$(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \lambda a$$

  - Stel
    - $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
    - $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a$
    - $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to b$

    dan

$$\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{1}{b}$$
$$\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \to \frac{a}{b}$$

- Stel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: reële rijen
  - Als
    - * $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \in \mathbb{R}$
    - * $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to +\infty$

    dan $(x_n + y_n)_{n\to\mathbb{N}^*} \to +\infty$
  - Als
    - * $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \in]0, +\infty]$
    - * $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to -\infty$

    dan $(x_n y_n)_{n\to\mathbb{N}^*} \to -\infty$
  - Als
    - * $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to a \in \mathbb{R}$
    - * $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \to +\infty$, $\quad y_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}^*$

    dan $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\to\mathbb{N}^*} \to 0$

Overzicht

- Limiet van een functie tussen metrische ruimten
  - Definitie
  - Limiet van functies met waarden in een cartesiaans product
  - Basiseigenschappen
    - Limietbegrip is een lokaal begrip
    - Limiet t.o.v. een kleinere verzameling
    - Beperking van de kandidaat-limiet
    - Verband tussen limiet en functiewaarde
    - Verband limiet-continuïteit
    - Kettingregel voor limieten

- Limietonderzoek van $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies
  - Limietonderzoek t.o.v. $(\mathbb{R}, d_{|.|})$
  - Limietonderzoek t.o.v. $(\bar{\mathbb{R}}, d')$
  - Linker- en rechterlimiet
    - Verband limiet, linker- en rechterlimiet
  - Eigenschappen
    - Gedrag van een functie f in de omgeving van een punt waar f een limiet bezit
    - Monotoniciteit van de limietbewerking
    - Sandwichregel voor limieten
    - Stelling van de monotone limiet

- Convergentie van rijen in een metrische ruimte
  - Continuïteit van een rij
  - Limietonderzoek van een rij — convergentie
  - Eigenschappen
    - Verband tussen continuïteit en convergentie
    - Verband tussen het bestaan van een limiet en convergentie
- Limietonderzoek van algebraïsch samengestelden van functies
  - Limietonderzoek van algebraïsch samengestelden van reële functies
  - Limietonderzoek van de elementaire $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies
  - Convergentie van algebraïsch samengestelden van reële rijen