

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	ii
Inleiding	vii
Waarover gaat het?	vii
Redeneren	vii
Abstraheren	viii
Formuleren	viii
Belang in informatica	ix
Enkele afspraken	xi
Notaties: Funmath	xi
Alternatieve formele notaties	xii
Cursusversie (academiejaar 2024-2025)	xii
1 Propositielogica	1
1.1 Wat en waarom?	1
1.2 Van mensentaal naar proposities	2
1.2.1 (Geldige) gevolgtrekkingen	2
1.2.2 Proposities	3
1.2.3 Symbolen voor proposities	5
1.2.4 Logische structuur in proposities	6
1.2.5 Taalsubtiliteiten	7
1.2.6 Beperkingen van proposities	9
1.3 Mogelijke aanpakken	12
1.3.1 Semantisch of axiomatisch?	12
1.3.2 Semantisch: waarheidstabellen	13
1.4 Basisoperatoren	15
1.4.1 Waarheidsconstanten	15
1.4.2 Negatie (logische NIET) ($\neg$)	16
1.4.3 Conjunctie (logische EN) ($\wedge$)	16
1.4.4 Disjunctie (logische OF) ($\vee$)	17
1.4.5 Implicatie ($\Rightarrow$)	17
1.4.5.1 Valkuilen in de formulering met implicaties . .	19
1.4.5.2 Logisch gevolg ($\Leftarrow$)	21

1.4.5.3	Voldoende en nodige voorwaarden	22
1.4.6	Equivalentie ($\equiv$)	23
1.4.7	Propositionele ongelijkheid (XOR/Exclusieve OF) ($\neq$)	24
1.4.8	Haakjesconventies	24
1.4.8.1	Associatieve operatoren	25
1.4.8.2	Prioriteitsregels	26
1.4.8.3	Conventie voor implicatie (en logisch gevolg)	27
1.5	Enkele eigenschappen	28
1.5.1	Rekenen met waarheidstabellen	29
1.5.2	Uitgebreide waarheidstabellen	30
1.5.3	Calculatieve aanpak	35
1.5.3.1	Stellingen en instantiatie	35
1.5.3.2	Enkele basisstellingen	37
1.5.3.3	Geldige gevolgtrekking herbekeken	47
1.5.3.4	Calculatieve stijl voor bewijzen	49
1.6	Enkele bewijstechnieken	55
1.6.1	Stellingen, bewijzen en tegenvoorbeelden	56
1.6.2	Direct bewijs	61
1.6.2.1	Met equivalentie	61
1.6.2.2	Met gelijkheid	62
1.6.2.3	Met implicatie	64
1.6.3	Aanname van het antecedent	67
1.6.3.1	Gevolgtrekkingen en implicaties: deductiestelling	67
1.6.3.2	Bewijs van $p \Rightarrow q$ door aanname van het antecedent	68
1.6.4	Extra technieken in een direct bewijs $p \Rightarrow q$	70
1.6.4.1	Versterking van het antecedent	70
1.6.4.2	Verzwakking van het consequent	71
1.6.5	Bewijs door contrapositie	73
1.6.6	Bewijs uit het ongerijmde	73
1.6.7	Wederzijdse implicatie	75
1.6.8	Gevalsonderscheiding	76
2	Verzamelingen	78
2.1	Wat en waarom?	78
2.2	Notaties	79
2.2.1	Element van een verzameling	79
2.2.2	Als opsomming van elementen	80
2.2.3	Lege verzameling	80
2.2.4	Singleton (Funmath)	81
2.2.5	Enkele praktische notaties voor (gehele) getallen	81
2.3	Operaties op verzamelingen	82
2.3.1	Unie	83

2.3.2	Doorsnede	83
2.3.3	Verschil	83
2.3.4	Symmetrisch verschil	84
2.3.5	Enkele voorbeelden	85
2.3.6	Deelverzameling	85
2.4	Universa	85
2.4.1	Context-specifieke universa	86
2.4.2	Generieke universa	86
2.4.2.1	Een beetje voorzichtigheid	87
2.5	Wordt vervolgd...	87
3	Functies (een korte inleiding)	88
3.1	Definitie van een functie: domein en mapping	88
3.1.1	Functies in Funmath	88
3.1.2	Domein en mapping	89
3.2	Bereik	90
3.3	Type van een functie	91
3.4	Tupels	92
3.4.1	Speciale notaties voor 0- en 1-tupels	93
3.4.2	Typering van tupels	94
3.5	Abstracties	95
3.5.1	Notatie voor abstracties	96
3.5.2	Domein en mapping van abstracties	96
3.5.3	Haakjesconventie met abstracties	97
3.5.4	Alternatieve notaties voor abstracties	97
3.5.5	Enkele rekenregels met abstracties	98
3.5.6	Abstracties naar meerdere veranderlijken	99
3.5.6.1	Geneste abstracties	99
3.5.6.2	Abstracties naar tupels	101
4	Predicaatlogica	103
4.1	Beperkingen van propositielogica	103
4.2	Formulering en predicaten als functies	104
4.2.1	Typering	104
4.2.2	Eigenschappen van entiteiten	105
4.2.3	Predicaten als functies	107
4.2.4	Formulering met predicaten	108
4.3	Kwantoren	112
4.3.1	Universele kwantor $\forall$	112
4.3.2	Existentiële kwantor $\exists$	117
4.3.3	Geneste kwantoren	120
4.3.4	Van mensentaal naar kwantoren	123
4.4	Rekenregels	126
4.4.1	Predicaatlogica	126

4.4.2	Constante predicaten	127
4.4.3	Dualiteit	129
4.4.4	Interactie tussen kwantoren en propositie-operatoren . .	131
4.4.5	Bijkomende rekenregels met kwantoren	136
4.4.6	Bewijstechnieken met kwantoren	142
4.4.6.1	Universele instantiatie / $\forall$ -eliminatie	143
4.4.6.2	Generalisatie / universele veralgemening	146
4.4.6.3	Existentiële veralgemening	151
4.4.6.4	Getuige / existentiële instantiatie	154
4.4.6.5	Bekende bewijsmethoden toegepast op predi- caatlogica	158
4.4.7	Kwantoren en functies	165
4.5	Toepassing op verzamelingen	167
4.5.1	Verzamelingcomprehensie	168
4.5.2	Gelijkheid van verzamelingen	173
4.5.3	Verzamelingoperatoren herbekeken	174
4.5.4	Overeenkomst tussen verzamelingen en proposities . . .	179
4.5.5	Formulering met predicaten of met verzamelingen	182
5	Relaties	184
5.1	Wat en waarom?	184
5.2	Formulering en relaties als functies of predicaten	185
5.2.1	Binaire en n -aire relaties	185
5.2.2	Notatie in Funmath	187
5.2.3	Grafische representatie	190
5.3	Bewerkingen op relaties	190
5.3.1	Bewerkingen afgeleid van verzamelingen	191
5.3.2	Converse relatie	192
5.3.3	Samenstelling van relaties	193
5.4	Eigenschappen van (binaire) relaties	195
5.4.1	Equivalentierelatie	201
5.5	Orderrelaties	203
5.5.1	Belang van orde	203
5.5.2	Soorten orderrelaties	203
5.5.3	Posets	208
5.5.3.1	Hasse-diagram	209
5.5.3.2	(Anti)monotoniciteit	212
5.6	Extreme elementen	213
5.6.1	Definities en eigenschappen	214
5.6.2	Topologisch sorteren	218
5.6.3	Predicaten of verzamelingen?	220
5.6.4	Welgefundeerde relatie	221
6	Inductie en recursie	222

6.1	Wat en waarom?	222
6.2	Link met welgefundeerde relaties	224
6.3	Verschillende vormen van inductie	228
6.3.1	Sterke inductie over de natuurlijke getallen	228
6.3.2	Zwakke inductie over de natuurlijke getallen	232
6.3.3	Recursieve definities	239
6.3.4	Inductie over andere structuren	241
6.3.4.1	Inductie op basis van een maatfunctie	242
6.3.4.2	Zwakkere vormen van inductie	244
6.3.4.3	Sequenties	245
6.3.4.4	Inductie en recursie over rijen/lijsten	247
6.3.4.5	Structurele inductie	251
6.3.4.6	Meerdimensionale inductie	254
6.3.4.7	Afleidende van een bewijsmethode	259
6.4	Redeneren over functionele programma's	265
6.4.1	Functionele programmeertalen	266
6.4.2	Correctheidsbewijzen	268
6.4.2.1	Inductie over lijsten	272
6.4.2.2	Inductie over binaire bomen	276
Bibliografie		280