ANALYSE 2

Eerste Bachelor Wiskunde

Universiteit Gent

Hans Vernaeve

Editie 2021–2022

Hoofdstuk 1

Differentiaalrekening met verschillende veranderlijken

1.1 De euclidische ruimte

Zij $n \in \{1, 2, \ldots\}$ en
$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

1.1.1 Definitie. Elementen van $\mathbb{R}^n$ noemen we **punten** of **vectoren**, en noteren we vetjes ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ enz.) of met vectorpijltjes ($\vec{x}$, $\vec{y}$ enz.). In beide gevallen gaat het om afkortingen van geordende n-tallen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, enz.

1.1.2 Definitie. De **n-dimensionale euclidische ruimte** is de verzameling $\mathbb{R}^n$ die voorzien wordt van het inproduct
$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$
dat voldoet aan

1. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
3. $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$
4. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ en $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0})$ (positief definiet)
5. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ (ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)

voor $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ (zie cursus *Lineaire Algebra*).
Hieruit leiden we de lengte of norm $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ af, die voldoet aan

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ en $(\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0})$
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (driehoeksongelijkheid)

voor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$ (zie cursus *Lineaire Algebra*).
Op zijn beurt definieert dit de afstand

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

die voldoet aan de driehoeksongelijkheid $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ voor $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Definities, eigenschappen en bewijzen zullen vaak, omwille van de aanschouwelijkheid, gegeven worden voor het geval $n = 2$.

1.1.3 Definities.

1. De **open bal** met middelpunt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en straal $R > 0$ wordt gedefinieerd door
$$B(\mathbf{a}, R) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < R \,\}.$$
2. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ heet een **omgeving** van $\mathbf{a}$, en $\mathbf{a}$ zelf heet een **inwendig punt** van V, als er een $R > 0$ bestaat waarvoor $B(\mathbf{a}, R) \subseteq V$.
3. Het **inwendige** V° van een verzameling V bestaat uit alle inwendige punten van die verzameling. (Uiteraard is $V^\circ \subseteq V$.)
4. Is V een omgeving van $\mathbf{a}$, dan noemt men $V \setminus \{\mathbf{a}\}$ een **doorprikte omgeving** van $\mathbf{a}$.
5. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ heet **open** als elk punt van V inwendig is.
6. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ heet **gesloten** als haar complement $\mathbb{R}^n \setminus V$ open is.[1]
7. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ heet **begrensd** als er een $R > 0$ bestaat met $\|\mathbf{x}\| \leqslant R$ voor alle $\mathbf{x} \in V$, m.a.w. als V deelverzameling is van een open bal met de oorsprong als middelpunt (en eindige straal).
8. Een deelverzameling V van $\mathbb{R}^n$ heet **compact** als V tegelijk gesloten en begrensd is.
9. Het punt $\mathbf{a}$ is een **adherent[2] punt** van een verzameling V (waartoe het niet hoeft te behoren) als elke open bal met middelpunt $\mathbf{a}$ een punt van V bevat, m.a.w. als voor elke $R > 0$ geldt dat $B(\mathbf{a}, R) \cap V \neq \varnothing$. (Elk punt van V zelf is natuurlijk een adherent punt van V, want voor elke $\mathbf{a} \in V$ is $\mathbf{a} \in B(\mathbf{a}, R) \cap V$.)
10. De **sluiting** van $V \subseteq \mathbb{R}^n$, genoteerd $\overline{V}$, is de verzameling van alle adherente punten van V. (We hebben steeds $V \subseteq \overline{V}$.)
11. Het punt $\mathbf{a}$ is een **ophopingspunt** van een verzameling V (waartoe het niet hoeft te behoren) als elke open bal met middelpunt $\mathbf{a}$ een punt van V bevat verschillend van $\mathbf{a}$ zelf, m.a.w. als voor elke $R > 0$ geldt dat $\varnothing \neq B(\mathbf{a}, R) \cap V \neq \{\mathbf{a}\}$. (Een ophopingspunt is een bijzonder soort adherent punt, zie definitie 9.)
12. De **gesloten bal** met middelpunt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en straal $R > 0$ wordt gedefinieerd door
$$\overline{B}(\mathbf{a}, R) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leqslant R \,\}.$$

[1] De meeste verzamelingen zijn noch open noch gesloten; $\varnothing$ en $\mathbb{R}^n$ zijn het allebei tegelijk.
[2] betekent *aanklevend*

13. Het punt $\mathbf{a}$ is een **geïsoleerd punt** van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ als het tot V behoort en er geen ophopingspunt van is, m.a.w. als er een $R > 0$ bestaat waarvoor $B(\mathbf{a}, R) \cap V = \{\mathbf{a}\}$.

14. De **grens** of **rand** van $V \subseteq \mathbb{R}^n$, genoteerd[3] ∂V, is $\overline{V} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus V}$. Een punt van die verzameling is een **grenspunt** of **randpunt** van V.

15. De **diameter** van een nietlege verzameling V is gedefinieerd als

$$\operatorname{diam}(V) = \sup\{\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V \,\}.$$

Als de verzameling $\{\, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V \,\}$ niet naar boven begrensd is spreken we af dat $\operatorname{diam}(V) = +\infty$. Bijgevolg hebben we steeds dat $0 \leqslant \operatorname{diam}(V) \leqslant +\infty$.

1.1.4 Stelling.

1. Het inwendige van een verzameling is open.
2. De sluiting van een verzameling is gesloten.
3. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is open als en slechts als $V^\circ = V$.
4. $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is gesloten als en slechts als $\overline{V} = V$.

Bewijs. (1) Als $\mathbf{a} \in V^\circ$, dan bestaat er een $B(\mathbf{a}, R) \subseteq V$. We tonen aan dat $B(\mathbf{a}, R)$ enkel punten bevat van V°. Als $\mathbf{b}$ tot $B(\mathbf{a}, R)$ behoort, kies dan R' zo klein dat $B(\mathbf{b}, R') \subseteq B(\mathbf{a}, R)$.[4] Dan is $B(\mathbf{b}, R') \subseteq V$, zodat $\mathbf{b} \in V^\circ$.
(2) Uit de definities volgt dat $\mathbf{a} \notin \overline{V} \iff \mathbf{a} \in (\mathbb{R}^n \setminus V)^\circ$. Het complement van $\overline{V}$ is dus $(\mathbb{R}^n \setminus V)^\circ$, hetgeen open is door deel (1).
(3) Onmiddellijk uit de definities.
(4) V is gesloten $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus V$ is open $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus \overline{V} = (\mathbb{R}^n \setminus V)^\circ = \mathbb{R}^n \setminus V \iff \overline{V} = V$. □

1.1.5 Stelling.

1. Elke open bal is een open verzameling.
2. Elke gesloten bal is een gesloten verzameling.

Bewijs. Bewijs als oefening. □

1.1.6 Stelling.

1. *$\varnothing$ en $\mathbb{R}^n$ zijn open.*
2. *De doorsnede van een eindig(!!) aantal open verzamelingen is open.*
3. *De vereniging van een willekeurig aantal[5] open verzamelingen is open.*

[3] Het symbool ∂ is een 'ronde d' en geen delta.
[4] $R' := R - \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ voldoet wegens de driehoeksongelijkheid
[5] ook oneindig (eventueel niet aftelbaar) aantal

Bewijs. 1. Elk punt van $\varnothing$ is een inwendig punt van $\varnothing$, omdat een uitspraak $(\forall \mathbf{x} \in \varnothing)(\dots)$ altijd waar is; zo'n uitspraak komt immers neer op $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\mathbf{x} \in \varnothing \implies \dots)$. Elke $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is een inwendig punt van $\mathbb{R}^n$, want $B(\mathbf{x}, R) \subseteq \mathbb{R}^n$ voor elke $R > 0$.
2. Neem twee open verzamelingen G_1 en G_2. Neem $\mathbf{x} \in G_1 \cap G_2$.[6] Dan bestaat er een $R_1 > 0$ met $B(\mathbf{x}, R_1) \subseteq G_1$ en een $R_2 > 0$ met $B(\mathbf{x}, R_2) \subseteq G_2$. Noemt men R het kleinste van de twee positieve getallen R_1 en R_2, dan volgt $B(\mathbf{x}, R) \subseteq (G_1 \cap G_2)$.
3. Zij $\{ G_\alpha, G_\beta, G_\gamma, \dots \}$ een verzameling van open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, en stel $G = G_\alpha \cup G_\beta \cup G_\gamma \cup \dots$. Dan is G open, want als $\mathbf{x} \in G$, dan $\mathbf{x} \in G_\alpha$ of $\mathbf{x} \in G_\beta$ of $\mathbf{x} \in G_\gamma$ enz., stel $\mathbf{x} \in G_\beta$. Er bestaat dan een $R_\beta > 0$ met $B(\mathbf{x}, R_\beta) \subseteq G_\beta \subseteq G$. $\square$

De eigenschappen van gesloten verzamelingen zijn uiteraard de duale van die voor open verzamelingen.

1.1.7 Stelling.

1. *$\varnothing$ en $\mathbb{R}^n$ zijn gesloten.*
2. *De doorsnede van een willekeurig aantal[7] gesloten verzamelingen is gesloten.*
3. *De vereniging van een eindig(!!) aantal gesloten verzamelingen is gesloten.*

1.2 Rijen

1.2.1 Definitie. Een **rij** in $\mathbb{R}^n$ is een afbeelding f die elk natuurlijk getal vanaf een zekere k_0 (doorgaans 0 of 1) op een element van $\mathbb{R}^n$ afbeeldt.

Een rij in $\mathbb{R}^n$ is dus een bijzonder geval van een $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}^n$ functie. Bijgevolg zijn de eigenschappen voor zulke rijen gewoonweg de gemeenschappelijke eigenschappen van alle projecties. Als b.v. $n = 2$ en $\mathbf{z}_k = (x_k, y_k)$, $\boldsymbol{\gamma} = (a, b)$, dan definieert men

$$(\mathbf{z}_k \to \boldsymbol{\gamma}) \overset{\text{def}}{\iff} ((x_k \to a) \wedge (y_k \to b)).$$

Bewijs als oefening dat die definitie gelijkwaardig is met

$$d(\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\gamma}) < \varepsilon \quad \text{zodra } k \text{ groot genoeg is.}$$

1.2.2 Stelling (Rijenkenmerk voor de sluiting). *Zij $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dan is de sluiting van A de verzameling van alle limieten van convergente rijen van elementen van A, m.a.w.*

$$\overline{A} = \{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{z}_k \in A,\, \mathbf{z}_k \to \mathbf{z} \}.$$

Bewijs. $\subseteq$: neem willekeurig $\mathbf{x} \in \overline{A}$. Dan heeft elke $B(\mathbf{x}, R)$ een nietlege doorsnede met A. Kiezen we achtereenvolgens $R = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ dan vinden we in A een rij $(\mathbf{a}_n)_n$ die convergeert naar $\mathbf{x}$.

$\supseteq$: zij $\mathbf{z}$ de limiet van een rij $(\mathbf{z}_k)_k$ uit A. We tonen aan dat $\mathbf{z}$ adherent is aan A. Kies daartoe willekeurig $R > 0$. Doordat $\mathbf{z}_k \to \mathbf{z}$ liggen alle $\mathbf{z}_k$'s vanaf zeker rangnummer in de bal $B(\mathbf{z}, R)$. Die bal bevat dus zeker punten van A. $\square$

[6] Als zulke $\mathbf{x}$ niet bestaat, m.a.w., als G_1 en G_2 disjunct zijn, dan valt er opnieuw niets te bewijzen.
[7] ook oneindig (eventueel niet aftelbaar) aantal

1.2.3 Gevolg. *De limiet van een convergente rij uit een gesloten verzameling behoort tot die verzameling. Omgekeerd: als alle limieten van convergente rijen uit een verzameling tot die verzameling behoren, dan is die verzameling gesloten.*

Bewijs. A is gesloten $\iff \overline{A} = A \iff \overline{A} \subseteq A \iff \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \exists \mathbf{z}_k \in A, \mathbf{z}_k \to \mathbf{z}\} \subseteq A$. $\square$

1.2.4 Stelling. *Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij.*

Bewijs. Zij $(\mathbf{z}_n)_n$, stel $\mathbf{z}_n = (x_n, y_n)$ met $\|\mathbf{z}_n\| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leqslant M$, een begrensde rij in $\mathbb{R}^2$. Dan is ook $|x_n| \leqslant M$ en $|y_n| \leqslant M$. Door de stelling van de convergente deelrij in $\mathbb{R}$ bezit $(x_n)_n$ een convergente deelrij $x_{n_k} \to x_0$. Beschouw dan de overeenkomstige rij $(y_{n_k})_k$. Ook dit is een begrensde rij want $|y_{n_k}| \leqslant M$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Vandaar heeft $(y_{n_k})_k$ op haar beurt een convergente deelrij $y_{n_l} \to y_0$. Nu beschouwen we de hiermee overeenkomende rij $(x_{n_l})_l$. Dit is een deelrij van de eerste deelrij $(x_{n_k})_k$, en zal bijgevolg naar dezelfde limiet x_0 convergeren. Combineren we dit, dan hebben we een rij $((x_{n_l}, y_{n_l}))_l$ gevonden die naar (x_0, y_0) convergeert. $\square$

1.2.5 Stelling (Stelling van de convergente deelrij, stelling van Bolzano-Weierstrass). *Zij K een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Als $\mathbf{z}_n \in K$ voor alle n, dan bezit de rij $(\mathbf{z}_n)_n$ een deelrij die convergeert naar een punt van K.*

Bewijs. Wegens de vorige stelling bezit $(\mathbf{z}_n)_n$ een convergente deelrij $(\mathbf{z}_{n_k})_k$. Omdat $(\mathbf{z}_{n_k})_k$ een rij uit de gesloten verzameling K is, behoort haar limiet tot K. $\square$

Zoals voor $n = 1$ (en met een identiek bewijs) leidt 1.2.4 onmiddellijk tot

1.2.6 Stelling (Kenmerk van Cauchy). *Een rij $(\mathbf{z}_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ convergeert dan en slechts dan als er bij elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijke N_ε bestaat met de eigenschap*

$$d(\mathbf{z}_p, \mathbf{z}_q) < \varepsilon \quad \textit{zodra } p > N_\varepsilon \textit{ en } q > N_\varepsilon.$$

1.2.7 Definitie. De **afstand** tussen twee nietlege deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}^n$ wordt gedefinieerd als

$$d(A, B) = \inf\{\, \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B \,\} \in [0, +\infty[\,.$$

De afstand tussen twee nietlege verzamelingen is steeds nietnegatief, en (kenmerk van een infimum gelijk aan nul)

$$d(A, B) = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathbf{a} \in A)(\exists \mathbf{b} \in B)(\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \varepsilon). \tag{1.1}$$

Als $A \cap B \neq \varnothing$, dan is $d(A, B) = 0$ want we kunnen dan $A \ni \mathbf{a} = \mathbf{b} \in B$ kiezen, met natuurlijk $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = 0 < \varepsilon$. Het omgekeerde geldt niet: voor vele disjuncte verzamelingen A en B is $d(A, B) = 0$. Er bestaan zelfs disjuncte *gesloten* verzamelingen A en B met $d(A, B) = 0$, b.v. in $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x, \frac{1}{x}) \mid x > 0\}$ en $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

Daarentegen geldt

1.2.8 Stelling. *De afstand tussen twee disjuncte gesloten verzamelingen, waarvan minstens één compact is, is positief.*

Bewijs. Veronderstel K compact, F gesloten, en $K \cap F = \varnothing$. We gaan te werk uit het ongerijmde. Als $d(K, F) = 0$, dan bestaan er

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1 \in K, \mathbf{q}_1 \in F \quad \text{waarvoor } d(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) < 1, \\ &\mathbf{p}_2 \in K, \mathbf{q}_2 \in F \quad \text{waarvoor } d(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) < 1/2, \\ &\mathbf{p}_3 \in K, \mathbf{q}_3 \in F \quad \text{waarvoor } d(\mathbf{p}_3, \mathbf{q}_3) < 1/3, \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

Doordat K compact is, bestaat er een deelrij $\mathbf{p}_{n_k} \to \mathbf{p}_0 \in K$. Maar dan convergeert de overeenkomstige deelrij $(\mathbf{q}_{n_k})_k$ eveneens naar $\mathbf{p}_0$ want

$$d(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_{n_k}) \leqslant d(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_{n_k}) + d(\mathbf{p}_{n_k}, \mathbf{q}_{n_k}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k} < \varepsilon$$

zodra k groot genoeg is. Zo zou er in F een rij bestaan die convergeert naar een punt $\mathbf{p}_0 \notin F$. Dit kan niet, want F is gesloten. □

1.2.9 Notatie. Voor de afstand tussen een singleton $\{\mathbf{a}\}$ en een nietlege verzameling V schrijven we $d(\mathbf{a}, V)$ i.p.v. $d(\{\mathbf{a}\}, V)$.

Bewijs als oefening dat

$$d(\mathbf{a}, V) = 0 \iff \mathbf{a} \in \overline{V}.$$

De Stelling van de Vernestelde Compacte Intervallen uit *Analyse I* kunnen we, met een volkomen analoog bewijs, veralgemenen tot:

1.2.10 Stelling (vernestelde compacta[8]). *Is $K_1, K_2, \ldots$ een rij van nietlege[9] compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ met de eigenschap*

1. $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots,$

dan is $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \varnothing$, m.a.w. er bestaat minstens één $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ die tot alle K_n's behoort. Als bovendien

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$

dan is die $\boldsymbol{\xi} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ uniek.

Nu komen we tot de fundamentele eigenschap van compacte verzamelingen.

1.2.11 Definitie. Men zegt dat een verzameling V **bedekt** wordt door de verzamelingen $W_\alpha, W_\beta, \ldots$ als elk punt van V tot minstens één van de W's behoort.

1.2.12 Stelling (Heine-Borel[10]). *Wordt de compacte verzameling $K \subset \mathbb{R}^n$ bedekt door de open verzamelingen $G_\alpha, G_\beta, \ldots$, dan is het ook mogelijk K te bedekken met een* eindig aantal *van die open verzamelingen.*

[8] Cantor, 1884

[9] Als een van de K_i's leeg is (ter herinnering: $\varnothing$ is compact), dan is de stelling natuurlijk vals.

[10] Heine 1871 impliciet, Borel 1895 in de huidige vorm

Bewijs. Omwille van de aanschouwelijkheid geven we het bewijs voor $n = 2$. Veronderstel dat K niét kan bedekt worden door een eindig aantal van de G's. We zullen aantonen dat die veronderstelling tot een strijdigheid leidt.

De compacte verzameling K is in het bijzonder begrensd. We kunnen dus een compact vierkant V, stel met diagonaal Δ, vinden waarvoor $K \subseteq V$. Door de middens van de overstaande zijden te verbinden maken we vier compacte vierkanten V_1, V_2, V_3, V_4, elk met een diagonaal gelijk aan $\Delta/2$. De vier verzamelingen $K \cap V_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ zijn eveneens compact: gesloten als doorsnede van twee gesloten verzamelingen, begrensd als deel van een begrensde verzameling. Als elk van die vier verzamelingen bedekt kon worden door een eindig aantal G's dan zouden we, door die vier eindige collecties samen te voegen, ook K zelf met een eindig aantal G's kunnen bedekken, tegen onze veronderstelling in. Minstens één van de vierkanten V_1, V_2, V_3, V_4, noem het $V^{(1)}$, heeft dus de eigenschap dat $K \cap V^{(1)}$ niet bedekt kan worden door een eindig aantal G's. Door de middens van de overstaande zijden van $V^{(1)}$ te verbinden maken we nu vier compacte vierkanten met diagonaal $\Delta/4$, en minstens één ervan, noem het $V^{(2)}$, heeft de eigenschap dat $K \cap V^{(2)}$ niet bedekt kan worden door een eindig aantal G's. Zo voortgaande bepalen we een rij van compacte verzamelingen $(K \cap V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ met de eigenschap dat geen enkele daarvan door een eindig aantal G's bedekt kan worden. De diameter van $K \cap V^{(k)}$ is hoogstens gelijk aan de diagonaal van $V^{(k)}$, zijnde $\Delta/2^k$, en nadert dus tot nul als $k \to +\infty$. Door de voorgaande stelling bestaat er juist één punt $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2$ dat tot elke $K \cap V^{(k)}$ behoort. Wegens $\boldsymbol{\xi} \in K$ behoort $\boldsymbol{\xi}$ ook tot minstens één van de G's, stel G_ω. Omdat die verzameling *open* is bestaat er een $R > 0$ waarvoor $B(\boldsymbol{\xi}, R) \subseteq G_\omega$. Als k zo groot is dat $\Delta/2^k < R$, dan is $K \cap V^{(k)} \subseteq B(\boldsymbol{\xi}, R)$ want wegens $\boldsymbol{\xi} \in K \cap V^{(k)}$ geldt voor elke $\mathbf{x} \in K \cap V^{(k)}$ dat

$$d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant \operatorname{diam}(K \cap V^{(k)}) \leqslant \Delta/2^k < R.$$

Voor zo'n k hebben we dus dat $K \cap V^{(k)} \subseteq G_\omega$, m.a.w. $K \cap V^{(k)}$ wordt bedekt door de ene verzameling G_ω uit de gegeven collectie. Dat is een strijdigheid, want we hebben de rij $(K \cap V^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ zó geconstrueerd dat geen enkele $K \cap V^{(k)}$ door een eindig aantal G's bedekt kon worden. □

1.2.13 Opmerking. De stelling van Heine-Borel zegt niet 'dat elke compacte verzameling door een eindig aantal open verzamelingen bedekt kan worden'. Die eigenschap is wel waar, maar volkomen triviaal: *elke* deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ kan door *één enkele* open verzameling bedekt worden, nl. door $\mathbb{R}^n$. Het punt is, dat men de verzameling moet bedekken met een eindig aantal open verzamelingen *uit een gegeven collectie.*

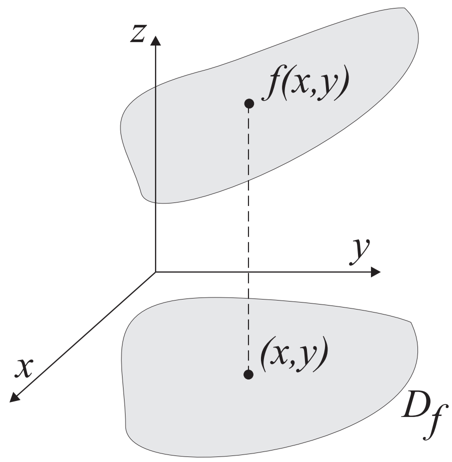
1.3 Limieten

Een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie noemt men een **(reële) functie van een vectorveranderlijke** of **(reële) functie van verschillende veranderlijken**. In het vervolg is vaak $n = 2$, omdat de functie dan nog voor te stellen is in de driedimensionale ruimte. De grafiek $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D_f\}$ (met $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ de definitieverzameling) is dan nl. een 'oppervlak'[11] in $\mathbb{R}^3$. (Zie figuur 1.1.)

1.3.1 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie, met domein D, en zij $\mathbf{a}$ een ophopingspunt van D. Men noemt A de **limiet van $\boldsymbol{f}$ voor $\boldsymbol{x}$ naderend tot $\boldsymbol{a}$** als

$$|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \quad \text{zodra } 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_\varepsilon,\ \mathbf{x} \in D.$$

[11] die benaming wordt hier informeel gebruikt, en niet in de zin van 'glad oppervlak' uit hoofdstuk 5



Figuur 1.1: Definitieverzameling en grafiek van een functie van twee veranderlijken.

Als die formule geldt noteren we $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A$ of kortweg "$f(\mathbf{x}) \to A$ als $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$".

Het rijenkenmerk voor limieten blijft geldig zoals voor $n = 1$ (bewijs dit!). Hetzelfde geldt voor de overige eigenschappen van limieten, voor zover de bestanddelen betekenis hebben voor $n > 1$. Zo bestaat er voor $n > 1$ geen orderelatie $\leqslant$, zodat b.v. eenzijdige limieten niet beschouwd kunnen worden.

1.4 Continuïteit

1.4.1 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie, met domein D, en zij $\mathbf{a}$ een niet-geïsoleerd punt van D. Men zegt dat f **continu in a** is als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat met de eigenschap dat

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon \quad \text{als } d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta, \mathbf{x} \in D.$$

Ook hier blijven definities (b.v. continuïteit over een verzameling) en eigenschappen (b.v. het rijenkenmerk) van het geval $n = 1$ *mutatis mutandis* gelden. We gaan wat dieper in op de analogen van de stellingen van Bolzano, van Weierstrass en van Heine.

1.4.2 Definities.

Het **gesloten lijnstuk met beginpunt *x* en eindpunt *y*** is de verzameling

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Het **open lijnstuk met beginpunt *x* en eindpunt *y*** is

$$]\mathbf{x}, \mathbf{y}[:= \{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \mid 0 < t < 1\} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \setminus \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}.$$

Een **gebroken lijn** is de vereniging van een eindig aantal gesloten lijnstukken, waarbij het eindpunt van het eerste lijnstuk samenvalt met het beginpunt van het tweede, het eindpunt van het tweede met het beginpunt van het derde enzovoort.

Een **open gebied**[12] is een open verzameling G met de bijkomende eigenschap dat elk tweetal punten van G verbonden kan worden door een gebroken lijn die volledig in G ligt.

[12] in het Engels: *domain*

Een **gebied** is de vereniging van een open gebied met een deel (eventueel leeg) van zijn grens.

1.4.3 Opmerking. Een gebied mag gaten vertonen.

1.4.4 Stelling (Tussenwaardestelling, Stelling van Bolzano). *Zij de* $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ *functie* f *continu over het open gebied* $G \subseteq \mathbb{R}^n$. *Als* f *in* G *zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, dan wordt zij in* G *ook ergens nul.*

Bewijs. Veronderstel $f(\mathbf{a}) > 0$ en $f(\mathbf{b}) < 0$, met $\mathbf{a} \in G$ en $\mathbf{b} \in G$. Er bestaat een gebroken lijn in G met beginpunt $\mathbf{a}$ en eindpunt $\mathbf{b}$. Neem b.v. aan dat die gebroken lijn uit de drie lijnstukken $[\mathbf{a}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ en $[\mathbf{d}, \mathbf{b}]$ bestaat.
Als $f(\mathbf{c}) = 0$, is het gevraagde bewezen. Als $f(\mathbf{c}) < 0$, dan is het gevraagde eveneens bewezen. Beschouw immers de $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie g, gegeven door

$$g(t) = f\big((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{c}\big) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Als samengestelde van twee continue functies is de $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie g zelf continu over het gesloten interval $[0, 1]$. Omdat $g(0) = f(\mathbf{a}) > 0$ en $g(1) = f(\mathbf{c}) < 0$ bestaat er (tussenwaardestelling) een $t_0 \in]0, 1[$ waarvoor $g(t_0) = 0$. Stellen we $\boldsymbol{\xi} = (1 - t_0)\mathbf{a} + t_0\mathbf{c}$, dan hebben we inderdaad dat $f(\boldsymbol{\xi}) = 0$, met $\boldsymbol{\xi} \in G$.
Als $f(\mathbf{c}) > 0$, beschouw dan $f(\mathbf{d})$ en herhaal de redenering. Als $f(\mathbf{d}) \leqslant 0$, dan is het gevraagde bewezen. Als $f(\mathbf{d}) > 0$, beschouw dan het laatste van de drie lijnstukken. Nu hebben we alleszins dat $f(\mathbf{b}) < 0$ (dit is zo verondersteld), zodat het gezochte nulpunt op het derde lijnstuk gevonden wordt. $\square$

1.4.5 Gevolg. *Zij de* $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ *functie* f *continu over het (niet noodzakelijk open) gebied* $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Als* f *in* D *zowel positieve als negatieve waarden aanneemt, dan wordt zij in* D *ook ergens nul.*

2. *Zijn* A *en* B *twee functiewaarden van* $f_{|D}$, *dan is elk getal tussen* A *en* B *dat ook.*

Bewijs. 1. Veronderstel $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{b} \in D$, $f(\mathbf{a}) > 0$, $f(\mathbf{b}) < 0$. Als $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ niet op de rand van D liggen, dan kunnen we de vorige stelling toepassen, want dan liggen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ in het inwendige van D, wat een open gebied is. Als $\mathbf{a}$ wel op de rand van D ligt, dan kunnen we in de nabijheid van $\mathbf{a}$ een punt $\mathbf{a}'$ vinden dat wél in het inwendige van D ligt en waar de functiewaarde ook positief is. (Behoud van teken, eigenschap van continue functies.) Analoog voor het geval waarbij $\mathbf{b}$ op de rand van D ligt. We passen dan de vorige stelling toe op de punten $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$.

2. Veronderstel $A < C < B$ met A de functiewaarde van f in $\mathbf{a} \in D$ en B die in $\mathbf{b} \in D$. De functie $f - C$ is negatief in $\mathbf{a}$ en positief in $\mathbf{b}$. Door 1. bestaat er een punt $\boldsymbol{\xi} \in D$ waar $f - C$ nul is, m.a.w. $f(\boldsymbol{\xi}) = C$. $\square$

1.4.6 Opmerking. Men kan de stelling van Bolzano samenvatten als: *het continu beeld van een gebied is een interval.*

1.4.7 Stelling (Extremumstelling van Weierstrass). *Zij* f *continu over de compacte verzameling* K. *Dan bereikt* f *in* K *minstens één keer haar absoluut maximum en minstens één keer haar absoluut minimum, d.w.z. er bestaan in* K *punten* $\mathbf{x}_1$ *en* $\mathbf{x}_2$ *waarvoor*

$$f(\mathbf{x}_1) \leqslant f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_2), \quad \textit{voor alle } \mathbf{x} \in K.$$

Bewijs. Zoals voor één veranderlijke. □

1.4.8 Stelling. *Is f continu over de compacte verzameling K, dan is de waardenverzameling $f(K)$ eveneens compact.*

Bewijs. (i) $f(K)$ is begrensd. De verzameling $f(K)$ heeft zelfs een grootste en een kleinste element (extremumstelling van Weierstrass).
(ii) $f(K)$ is gesloten. We zullen aantonen dat, als $(f(\mathbf{a}_n))_n$ een convergente rij uit $f(K)$ is, haar limiet tot $f(K)$ behoort. Omdat $(\mathbf{a}_n)_n$ een rij uit de compacte verzameling K is, heeft ze een convergente deelrij $\mathbf{a}_{n_k} \to \mathbf{a} \in K$. Wegens de continuïteit van f zal $f(\mathbf{a}_{n_k}) \to f(\mathbf{a}) \in f(K)$. De oorspronkelijke rij $(f(\mathbf{a}_n))_n$ heeft dezelfde limiet als de deelrij $(f(\mathbf{a}_{n_k}))_k$. Vandaar $f(\mathbf{a}_n) \to f(\mathbf{a}) \in f(K)$. □

1.4.9 Stelling (Heine). *Is f continu over de compacte verzameling K, dan is f over K gelijkmatig continu.*

Bewijs. Zoals voor één veranderlijke. □

1.5 Afleidbaarheid in twee veranderlijken

1.5.1 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie met domein D, en zij (a, b) een inwendig punt van D, zodat dus $f(a + h_1, b + h_2)$ bestaat als $|h_1|$ en $|h_2|$ klein genoeg zijn.
Als we de tweede veranderlijke gelijk aan b houden, en f enkel laten variëren als functie van de veranderlijke x, dan noemen we de afgeleide van deze (zgn. partiële) functie in $x = a$ de **partiële afgeleide** naar de eerste veranderlijke van f in (het punt) (a, b). Het is m.a.w. de afgeleide van de $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie $x \mapsto f(x, b)$ in het punt a.
Gangbare notaties zijn:

$$\partial_1 f(a,b) \quad \text{of} \quad f_x(a,b) \quad \text{of} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \text{of} \quad \partial_x f(a,b).$$

Bij de laatste drie notaties[13] is ervan uitgegaan dat uit de context blijkt dat de eerste van de twee veranderlijken als x genoteerd wordt.
Analoog noemen we de afgeleide van de partiële functie $y \mapsto f(a, y)$ in het punt b de **partiële afgeleide** naar de tweede veranderlijke van f in (a, b) met gangbare notaties

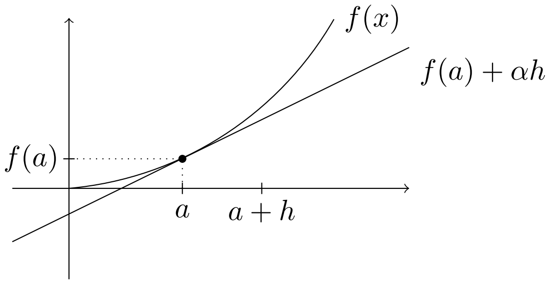
$$\partial_2 f(a,b) \quad \text{of} \quad f_y(a,b) \quad \text{of} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \quad \text{of} \quad \partial_y f(a,b).$$

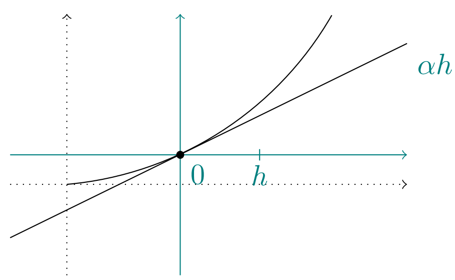
Partiële afgeleiden zijn gemakkelijk te berekenen als f gegeven wordt door een expliciet voorschrift (zie de oefeningen). Toch is hiermee de theorie van afleidbaarheid van functies van twee veranderlijken niet af. Dat merken we bijv. als we de afgeleide van een samengestelde functie willen berekenen:

1.5.2 Voorbeeld. Gegeven een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie f en twee $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functies u, v, kunnen we dan de afgeleide van de samengestelde functie $x \mapsto f(u(x), v(x))$ berekenen d.m.v. de afgeleide van u en v en de partiële afgeleiden van f?

[13] Het symbool ∂ is een 'ronde d' en geen delta.

Zo'n kettingregel in meerdere veranderlijken volgt niet meteen door de kettingregel in één veranderlijke op de juiste functies toe te passen. Om dit probleem op te lossen, is het nuttig om afleidbaarheid in een punt te beschouwen als *het bestaan van een (unieke) goede lineaire benadering* in de omgeving van dat punt. Voor een $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie f betekent afleidbaarheid in het punt a dat $f(a+h)$ voor kleine h goed benaderd wordt door $f(a)+\alpha h$, met $\alpha = f'(a)$. Meetkundig betekent dit dat de raaklijn aan de grafiek bestaat in het punt a.





M.a.w., als we de oorsprong op de x-as verleggen naar a en de oorsprong op de y-as naar $f(a)$,[14] dan wordt f goed benaderd door de lineaire afbeelding $l(h) = \alpha h$.

Een lineaire benadering van een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie f in het punt (a,b) betekent dan analoog: als we de oorsprong in het (x,y)-vlak verleggen naar (a,b) en de oorsprong in de beeldruimte naar $f(a,b)$, dan wordt f goed benaderd door een lineaire afbeelding $l(h_1,h_2) = \alpha h_1 + \beta h_2$. M.a.w., $f(a,b) + \alpha h_1 + \beta h_2$ is een goede benadering voor $f(a+h_1, b+h_2)$. Meetkundig betekent dit dat het raakvlak aan de grafiek bestaat in het punt (a,b). Zo komen we tot de volgende definitie:

1.5.3 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie met domein D, en zij (a,b) een inwendig punt van D, zodat dus $f(a+h_1,b+h_2)$ bestaat als $\|\mathbf{h}\| = \|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$ klein genoeg is.[15] We zeggen dat f in (a,b) **afleidbaar** is als er reële getallen α en β bestaan waarvoor

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(a+h_1,b+h_2) - f(a,b) - \alpha h_1 - \beta h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{1.2}$$

Net zoals voor $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functies volgt:

1.5.4 Hulpstelling. *f is afleidbaar in (a,b) juist als er reële getallen α en β en een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie r bestaan waarvoor (als $\|\mathbf{h}\|$ klein genoeg is)*

$$f(a+h_1,b+h_2) = f(a,b) + \alpha h_1 + \beta h_2 + r(h_1,h_2)\|\mathbf{h}\| \tag{1.3}$$

met $r(h_1,h_2) \to 0$ als $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.[16]

Is f afleidbaar in (a,b), dan is f zeker continu in (a,b), want $f(a+h_1,b+h_2) \to f(a,b)$ voor $(h_1,h_2) \to (0,0)$.

Het raakvlak aan de grafiek van f in (a,b) induceert raaklijnen aan de partiële functies $x \mapsto f(x,b)$ en $y \mapsto f(a,y)$:

[14] daarvoor zorgt juist de overgang van x naar $h = x - a$ op de x-as en van $f(x)$ naar $f(x) - f(a)$ op de y-as
[15] d.w.z., als $|h_1|$ en $|h_2|$ klein genoeg zijn
[16] d.w.z., als $h_1 \to 0$ en $h_2 \to 0$

1.5.5 Stelling. *Als f afleidbaar is in $(a,b) \in D^\circ$, dan bestaan de partiële afgeleiden van f in (a,b), en is in (1.2) en in (1.3)*

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \quad \textit{en} \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Bewijs. Zij f afleidbaar in (a,b). Uit (1.3) volgt voor $h_2 = 0$

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \frac{\alpha h + r(h,0)|h|}{h}$$

waaruit

$$\left| \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} - \alpha \right| = |r(h,0)| < \varepsilon \qquad \text{als } 0 < |h| < \delta,$$

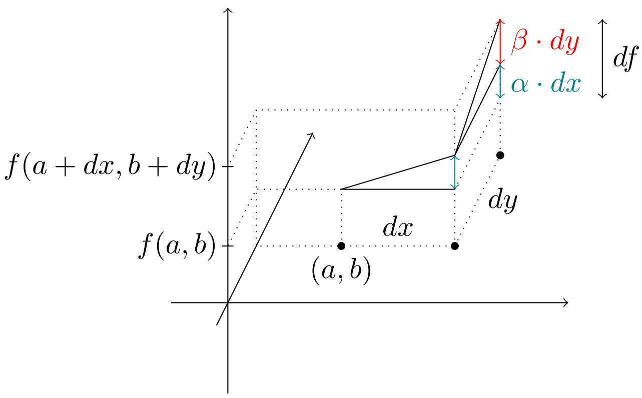
m.a.w.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = \alpha.$$

Op analoge wijze gaat men te werk voor β. □

Er volgt in het bijzonder dat de getallen α en β in (1.2) en in (1.3) uniek zijn als ze bestaan.

1.5.6 Opmerking. Het louter bestaan van de partiële afgeleiden van f in (a,b) volstaat *niet* om te besluiten dat f afleidbaar is in (a,b) (zelfs als f continu is in (a,b)). Meetkundig is dit duidelijk: het bestaan van de raaklijn aan elk van de twee partiële functies impliceert niet noodzakelijk het bestaan van het raakvlak. Dit doet zich al voor bij functies met onschuldig ogende voorschriften, zoals bij $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ in $(a,b) = (0,0)$.



Figuur 1.2: Heuristische gelijkheid $df \approx \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$, met dx en dy zeer klein ('infinitesimaal'), en $df(a,b) = f(a+dx, b+dy) - f(a,b)$ de resulterende zeer kleine wijziging van f.

Het klinkt aannemelijk om uit het bestaan van de partiële afgeleiden een lineaire benadering van f af te leiden. Je kunt immers van $f(a,b)$ naar $f(a+h_1, b+h_2)$ gaan door eerst van $f(a,b)$ naar $f(a+h_1, b)$ te gaan—waarvoor je enkel de eerste partiële functie nodig hebt, en vandaar naar $f(a+h_1, b+h_2)$ te gaan—waarvoor je enkel de tweede partiële functie nodig hebt, zij het in een lichtjes ander punt dan (a,b). In de toegepaste wiskunde wordt gemakkelijk verondersteld dat bij deze zeer kleine verschuivingen in de argumenten de gemaakte fouten in de berekening ook verwaarloosbaar klein blijven, maar dit vraagt een nauwkeuriger analyse:

1.5.7 Definitie. De **partieel afgeleide (functie) naar de eerste veranderlijke** van f, b.v. genoteerd $\frac{\partial f}{\partial x}$, is de $\mathbb{R}^2$–$\mathbb{R}$ functie met $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ als waarde in die punten (x,y) waar f afleidbaar is naar x.

Het domein van $\frac{\partial f}{\partial x}$ is uiteraard een deelverzameling (eventueel leeg) van het domein van f. Analoge definitie voor de **partieel afgeleide (functie) naar de tweede veranderlijke**.

1.5.8 Stelling. *Veronderstel dat* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *en* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *bestaan in een open bal* $B((a,b),R)$ *(met* $R>0$*), en continu zijn in* (a,b)*. Dan is* f *afleidbaar in* (a,b)*.*

Bewijs. We moeten aantonen dat (1.2) geldt. Wegens

$$f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)=f(a+h_1,b+h_2)-f(a+h_1,b)+f(a+h_1,b)-f(a,b)$$

is

$$\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|\mathbf{h}\|}$$
$$=\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a+h_1,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|\mathbf{h}\|}+\frac{f(a+h_1,b)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h_1}{\|\mathbf{h}\|}.$$

We zullen aantonen dat

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a+h_1,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|\mathbf{h}\|}=0. \tag{1.4}$$

(Analoog voor de tweede term.) Door de middelwaardestelling, toegepast op de functie $f(a+h_1,\boldsymbol{.})$, met $a+h_1$ vast, is

$$f(a+h_1,b+h_2)-f(a+h_1,b)=h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})$$

met $\tilde{h}$ (in feite $\tilde{h}$ afhankelijk van h_1) tussen 0 en h_2 gelegen. Vandaar is

$$\frac{f(a+h_1,b+h_2)-f(a+h_1,b)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)h_2}{\|\mathbf{h}\|}=\frac{h_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)}{\|\mathbf{h}\|}$$

met

$$\left|\frac{h_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)}{\|\mathbf{h}\|}\right|=\underbrace{\frac{|h_2|}{\|\mathbf{h}\|}}_{\leq 1}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$$

Als $(h_1,h_2)\to(0,0)$, dan ook $(h_1,\tilde{h})\to(0,0)$, en, doordat $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu is in (a,b), volgt $\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})\to\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Vandaar $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|\to 0$, en dus (1.4). □

1.5.9 Definitie. Een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie f heet **van klasse C^1** of **glad** (men zegt ook 'continu afleidbaar') over de open deelverzameling G van haar domein als de partieel afgeleide functies $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan en continu zijn over G.

1.5.10 Gevolg. *Een functie die over een open verzameling glad is, is in het bijzonder afleidbaar in die verzameling.*

D.m.v. afleidbaarheid kunnen we nu wel de kettingregel uit voorbeeld 1.5.2 vermoeden en bewijzen. Heuristisch betekent de afleidbaarheid van f in (a,b) immers dat we $f(x,y)-f(a,b)$ kunnen benaderen door $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$, zodat

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(u(x),v(x))) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(u(x+h),v(x+h))-f(u(x),v(x))}{h}\\ &\approx \lim_{h\to 0}\Big[\partial_1 f(u(x),v(x))\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\partial_2 f(u(x),v(x))\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\Big]\\ &= \partial_1 f(u(x),v(x))u'(x)+\partial_2 f(u(x),v(x))v'(x).\end{aligned}$$

Net zoals voor functies van één veranderlijke geeft de heuristische gelijkheid $df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy$ (zie figuur 1.2) een geheugensteuntje voor de kettingregel door het *symbolische(!!)* quotiënt $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$. Opnieuw vraagt dit een nauwkeurigere analyse:[17]

1.5.11 Stelling (Kettingregel). *Beschouw twee $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functies u en v en een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie $f(u,v)$, met samengestelde*

$$F(x)=f\big(u(x),v(x)\big)\quad \textit{voor } x\in D_F\subseteq\mathbb{R}.$$

Als u en v afleidbaar zijn in a, en f is afleidbaar in $(u(a),v(a))$, dan is F afleidbaar in a, en

$$F'(a)=\frac{\partial f}{\partial u}(u(a),v(a))u'(a)+\frac{\partial f}{\partial v}(u(a),v(a))v'(a).$$

Bewijs. Dat $a\in(D_F)^\circ$ gaat men na zoals voor $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functies. Voor $h\neq 0$ ($|h|$ voldoende klein) is dan door de afleidbaarheid van f in $(u(a),v(a))$

$$\begin{aligned}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} &= \frac{f(u(a+h),v(a+h))-f(u(a),v(a))}{h}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u(a),v(a))\frac{u(a+h)-u(a)}{h}+\frac{\partial f}{\partial v}(u(a),v(a))\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\\ &\quad+\tfrac{1}{h}\|(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\|\cdot r(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\end{aligned}$$

voor zekere r met $r(h_1,h_2)\to 0$ als $(h_1,h_2)\to 0$. Omdat u en v afleidbaar en dus continu zijn in a, is $(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\to(0,0)$ als $h\to 0$, en dus ook $r(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\to 0$ als $h\to 0$. Verder is

$$\begin{aligned}|\tfrac{1}{h}|\,\big\|(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\big\| &= \Big\|\Big(\frac{u(a+h)-u(a)}{h},\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\Big)\Big\|\\ &\overset{h\to 0}{\to}\big\|(u'(a),v'(a))\big\|.\end{aligned}$$

Daardoor is $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\|(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))\|\cdot r(u(a+h)-u(a),v(a+h)-v(a))=0.$ □

[17] in de overgang met $\approx$ hebben we weer verondersteld dat kleine verschuivingen in de argumenten ook klein blijven in de berekening

De partieel afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van f kunnen op hun beurt partiële afgeleiden hebben. Vier **tweede-orde partiële afgeleiden** (in een punt of over een verzameling) zijn mogelijk:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \text{genoteerd} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \text{of}\ \ \partial_{11}f = (\partial_1)_1 f & \text{of}\ \ f_{xx} = (f_x)_x, \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \text{genoteerd} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \text{of}\ \ \partial_{21}f = (\partial_2)_1 f & \text{of}\ \ f_{yx} = (f_y)_x, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & \text{genoteerd} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \text{of}\ \ \partial_{12}f = (\partial_1)_2 f & \text{of}\ \ f_{xy} = (f_x)_y, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) & \text{genoteerd} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \text{of}\ \ \partial_{22}f = (\partial_2)_2 f & \text{of}\ \ f_{yy} = (f_y)_y.
\end{array}$$

1.5.12 Opmerking. Uit voorbeelden blijkt dat er functies f bestaan waarvoor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$, wat de zaken erg ingewikkeld maakt. In 4.3.2 zullen we een voldoende voorwaarde opstellen die waarborgt dat $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Voor de partiële afgeleiden van derde orde heeft men

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \text{genoteerd} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \quad \text{of} \quad \partial_{111} f \quad \text{of} \quad f_{xxx}$$

enzovoort. Analoog voor partiële afgeleiden van hogere orde.

1.5.13 Definitie. Een functie f is van de **klasse $\boldsymbol{C^m}$** ($m \in \mathbb{N}$) over een open verzameling G als al haar partieel afgeleide functies tot en met de m-de orde in G bestaan en continu zijn. We schrijven dan $f \in C^m(G)$.

Voor een C^2-functie van twee veranderlijken bestaan dus de vier partieel afgeleide functies $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en ze zijn continu.

1.5.14 Stelling. *Is f gedefinieerd over de open verzameling $G \subseteq \mathbb{R}^2$, dan hebben we*

$$f \in C^2(G) \implies f \in C^1(G) \implies f \text{ is afleidbaar in } G \implies f \text{ is continu in } G.$$

Bewijs. Veronderstel $f \in C^2(G)$. Dan is $f \in C^1(G)$ want de twee functies $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan en zijn continu in G; ze zijn zelfs *afleidbaar* in G. Laten we dat eens nagaan voor $\frac{\partial f}{\partial x}$. De partieel afgeleiden van die functie zijn $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, en die zijn continu in G doordat $f \in C^2(G)$. Analoog voor $\frac{\partial f}{\partial y}$.
De tweede implicatie uit de opgave kennen we uit 1.5.10, de derde is triviaal. □

1.5.15 Opmerking. Algemeen geldt

$$f \in C^{m+1}(G) \implies f \in C^m(G).$$

1.6 Afleidbaarheid in $n \geqslant 2$ veranderlijken

1.6.1 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie met domein D, en zij $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ een inwendig punt van D, zodat dus $f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$ bestaat als $\|\mathbf{h}\|$ klein genoeg is ($\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$). De functie

f heet **afleidbaar in a** als er constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en een $\mathbb{R}^n$–$\mathbb{R}$ functie r bestaan waarvoor we kunnen schrijven

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_n h_n + \|\mathbf{h}\|\, r(h_1, \ldots, h_n) \tag{1.5}$$

met $r(h_1, \ldots, h_n) \to 0$ als $(h_1, \ldots, h_n) \to (0, \ldots, 0)$.

Zoals voor $n = 2$ bewijst men dat de constanten α_i, als ze bestaan, uniek zijn en gegeven worden door

$$\alpha_i = \lim_{h_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h_i} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n).$$

Als f afleidbaar is in $\mathbf{a}$, dan bestaan de n partieel afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \ldots, a_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, maar niet noodzakelijk omgekeerd.

1.6.2 Definitie. Een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ noemt men een **vectorwaardige functie**.

Een functie met waarden in $\mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ is eigenlijk een m-tal van $\mathbb{R}$-waardige functies, zodat we ook voluit kunnen schrijven $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$. Elke *projectie* f_i $(i = 1, \ldots, m)$ is een $\mathbb{R}$-waardige functie van n veranderlijken. Hiervoor hebben we de volgende

1.6.3 Definitie. Een eigenschap die voor elke projectie f_j geldt noemen we een eigenschap van $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$.

Zo noemen we $\mathbf{f}$ continu (in een punt of over een verzameling), afleidbaar, integreerbaar, etc. als elke f_i dat is. Gaat het, b.v., om functies van één veranderlijke, dan stellen we

$$\mathbf{f}' := (f_1', \ldots, f_m') \quad \text{en} \quad \int_a^b \mathbf{f} := \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_m \right).$$

Dat principe hebben we in *Analyse I* al gebruikt om de afgeleide van een $\mathbb{R}$-$\mathbb{C}$ functie te definiëren; de definitie $(u(x) + iv(x))' := u'(x) + iv'(x)$ betekent immers niets anders dan $(u, v)' = (u', v')$.

Een aantal stellingen voor $\mathbb{R}$-waardige functies veralgemenen tot vectorwaardige functies, bijv.:

1.6.4 Stelling. *Is $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}^m$ continu over de compacte verzameling $K \subset \mathbb{R}^n$, dan is ook de waardenverzameling $\mathbf{f}(K)$ compact.*

Bewijs. Gemakshalve nemen we $m = 2$. Uit 1.4.8 weten we dat $f_1(K) \subset \mathbb{R}$ en $f_2(K) \subset \mathbb{R}$ beide compact zijn.
1. $\mathbf{f}(K)$ *is begrensd.* Als $|f_1(\mathbf{x})| \leqslant M$ en $|f_2(\mathbf{x})| \leqslant M$ voor alle $\mathbf{x} \in K$ (beide verzamelingen $f_1(K)$ en $f_2(K)$ zijn begrensd), dan is

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\| = \sqrt{(f_1(\mathbf{x}))^2 + (f_2(\mathbf{x}))^2} \leqslant M\sqrt{2}.$$

2. $\mathbf{f}(K)$ *is gesloten.* Zoals in 1.4.8(ii). □

Met deze notaties kunnen we nu ook een algemene kettingregel formuleren:

1.6.5 Stelling (Kettingregel). *Beschouw een* $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$ *functie* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big)$ *en een* $\mathbb{R}^m$-$\mathbb{R}$ *functie* $g(y_1, \ldots, y_m)$,[18] *met samengestelde*

$$F(\mathbf{x}) = g\big(\mathbf{f}(\mathbf{x})\big) = g\big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big) \quad \text{voor } \mathbf{x} \in D_F \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Als $\mathbf{f}$ *afleidbaar is in* $\mathbf{a}$, *en* g *is afleidbaar in* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, *dan is* F *afleidbaar in* $\mathbf{a}$, *en*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{a}), \quad \text{voor } j = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

Schets van bewijs. Het bewijs voor $n = 1$ is volledig analoog als het bewijs van stelling 1.5.11. De formule (1.6) voor willekeurige n volgt hier direct uit: omdat de partiële afgeleiden juist de afgeleiden zijn van de partiële functies van 1 veranderlijke, kunnen we de kettingregel voor $n = 1$ toepassen op de partiële functies. We vinden dat de partiële afgeleiden van F bestaan, en dat ze gegeven worden door (1.6).
In de extra veronderstelling dat $\mathbf{f}$ en g C^1-functies zijn in een omgeving van $\mathbf{a}$, resp. $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, volgt de stelling: uit het rechterlid van (1.6) blijkt dan dat de partiële afgeleiden van F continu zijn, zodat F dan zelf een C^1-functie is (in een omgeving van $\mathbf{a}$), en i.h.b. afleidbaar in $\mathbf{a}$.
Onder de gegeven voorwaarden op $\mathbf{f}$ en g volgt de afleidbaarheid van F in $\mathbf{a}$ door een nauwkeurige analyse van de resttermen, analoog (maar bewerkelijker) als in stelling 1.5.11. □

1.6.6 Oefeningen. Geef de formules voor de partieel afgeleiden van de samengestelde $F := g \circ \mathbf{f}$ als $\mathbf{f}$ en g de volgende gedaante hebben:

1. $\mathbf{f}(x, y, z) = \big(f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)\big)$ en $g(u, v)$
2. $\mathbf{f}(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$ en $g(u, v)$
3. $f(x, y)$ en $g(u)$

Voor een functie f van één veranderlijke, continu over $[a, b]$ en afleidbaar over $]a, b[$, zegt de middelwaardestelling dat er een $a < \xi < b$ bestaat waarvoor

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

Hier de veralgemening tot twee veranderlijken.

1.6.7 Stelling (Middelwaardestelling). *Zij gegeven een functie* f *van twee veranderlijken, en twee punten* (a, b) *en* (c, d) *in het vlak. Als* f *continu over het gesloten lijnstuk* $[(a, b), (c, d)]$ *en afleidbaar over het open lijnstuk* $](a, b), (c, d)[$ *is, dan bestaat er op het open lijnstuk een punt* (ξ, η) *met*

$$f(c, d) - f(a, b) = (c - a)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) + (d - b)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta).$$

Bewijs. Definieer een functie $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ d.m.v.

$$F(t) = f((1 - t)a + tc, (1 - t)b + td), \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Deze functie van één veranderlijke is de samengestelde van de $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}^2$-afbeelding $t \mapsto ((1 - t)a + tc, (1 - t)b + td)$ en de $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$-functie f. Bijgevolg is ze continu over $[0, 1]$, als samengestelde

[18] In feite volgt hier ook een kettingregel uit voor vectorwaardige $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_l)$: de afleidbaarheid is dan immers gedefinieerd door de afleidbaarheid van elk van de componenten g_j, en $\partial_i \mathbf{g} = (\partial_i g_1, \ldots, \partial_i g_l)$.

van twee continue functies. Ook is ze afleidbaar over $]0,1[$, want de eerste functie is afleidbaar in elk punt van $]0,1[$ (afgeleide: $(-a+c,-b+d)$), de tweede in elk punt van het open lijnstuk. Door de kettingregel is dan

$$F'(t) = (c-a)\frac{\partial f}{\partial x}((1-t)a+tc,(1-t)b+td)+(d-b)\frac{\partial f}{\partial y}((1-t)a+tc,(1-t)b+td) \qquad (0<t<1).$$

Wegens de middelwaardestelling bestaat er een $0<\theta_0<1$ waarvoor $F(1)-F(0)=F'(\theta_0)$, d.i.

$$\begin{aligned}&f(c,d)-f(a,b) = \\ &(c-a)\frac{\partial f}{\partial x}((1-\theta_0)a+\theta_0 c,(1-\theta_0)b+\theta_0 d)+(d-b)\frac{\partial f}{\partial y}((1-\theta_0)a+\theta_0 c,(1-\theta_0)b+\theta_0 d).\end{aligned}$$

Dit is wat we wensten te vinden, met

$$(\xi,\eta) = ((1-\theta_0)a+\theta_0 c,(1-\theta_0)b+\theta_0 d).$$

□

1.6.8 Gevolg. *Is* $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ *in het open gebied* $G \subseteq \mathbb{R}^2$*, dan is* f *constant in* G*.*

Bewijs. Merk eerst op dat f automatisch glad (en dus zeker afleidbaar) is in G: de partieel afgeleide functies van f bestaan en zijn continu in G, want ze zijn daar door het gegeven identisch nul.

Voor elk gesloten lijnstuk $[(a,b),(c,d)] \subset G$ levert de middelwaardestelling op dat

$$f(c,d)-f(a,b)=0$$

want

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta) = 0.$$

Bijgevolg is f constant op elk gesloten lijnstuk in G. Vandaar is f constant in heel G, want elke twee punten van G kunnen verbonden worden door een gebroken lijn die uit aaneensluitende lijnstukken in G bestaat. □

1.7 Richtingsafgeleiden

1.7.1 Definitie. Zij f een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie en $\mathbf{a}$ een inwendig punt van haar domein. Zij $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ met $\|\mathbf{v}\| = 1$. De **richtingsafgeleide** (of **directionele afgeleide**) van f in $\mathbf{a}$ in de richting $\mathbf{v}$ is bij definitie

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) := \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h} \in \mathbb{R}.$$

1.7.2 Opmerkingen.

1. De richtingsafgeleide is de afgeleide van de $\mathbb{R}$-$\mathbb{R}$ functie $t \mapsto f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$ in $t=0$. We zullen losweg[19] zeggen dat dit de afgeleide in $\mathbf{a}$ is van de beperking van f tot de rechte L door $\mathbf{a}$ en met richtingsvector $\mathbf{v}$.

[19] we identificeren hier eigenlijk stilzwijgend de rechte $L \subseteq \mathbb{R}^2$ met de reële rechte $\mathbb{R}$

2. Als f afleidbaar is in $\mathbf{a}$, dan bestaat de richtingsafgeleide van f in $\mathbf{a}$ in elke richting $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, en ze is gelijk aan $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})v_n$ (kettingregel).[20]

3. I.h.b. is $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$ voor $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, ... , $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

1.8 Elementaire vectoranalyse

Een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functie noemt men ook wel een **scalair(en)veld**, en een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^n$ functie een **vector(en)veld**.

De gradiënt van een scalairenveld

1.8.1 Definitie. Met een scalairenveld $f(\mathbf{x})$ associeert men het vectorveld[21]

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

in die punten $\mathbf{x}$ waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt $(\nabla f)(\mathbf{x})$ de **gradiënt** van f in $\mathbf{x}$. I.h.b. hebben we dus respectievelijk voor $n = 2$ en $n = 3$

$$(\nabla f)(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \text{ en } (\nabla f)(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right)$$

1.8.2 Opmerking. Voor ∇f is ook de notatie $\operatorname{grad} f$ in gebruik.

1.8.3 Opmerkingen. M.b.v. de gradiënt kunnen we enkele eigenschappen herformuleren:

1. (1.5): is f afleidbaar in $\mathbf{a}$, dan is

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + (\nabla f)(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| \, r(\mathbf{h})$$

met $r(\mathbf{h}) \to 0$ als $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

2. Gevolg 1.6.8: een functie met gradiënt nul in een open gebied is constant in dat gebied.

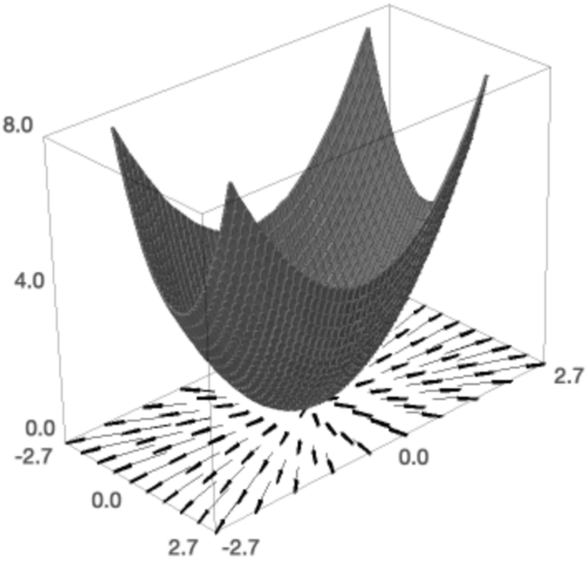
3. Opm. 1.7.2: de richtingsafgeleide $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$.

Uit deze schrijfwijze van de richtingsafgeleide volgt dat de vector $(\nabla f)(\mathbf{x})$ de *richting van de steilste* (opwaartse) *helling* van f in het punt $\mathbf{x}$ weergeeft: van alle eenheidsvectoren $\mathbf{v}$ is immers $\mathbf{v} = (\nabla f)(\mathbf{x}) / \|(\nabla f)(\mathbf{x})\|$ degene waarvoor het inproduct $(\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}$ de grootste waarde heeft.[22] Voor deze richting $\mathbf{v}$ van steilste helling is de norm van de gradiënt $\|(\nabla f)(\mathbf{x})\|$ gelijk aan de norm van de richtingsafgeleide $\left\| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) \right\|$.

[20] Omgekeerd impliceert het bestaan van alle richtingsafgeleiden van f in $\mathbf{a}$ *niet* dat f afleidbaar is in $\mathbf{a}$ (zelfs als f continu is in $\mathbf{a}$). Voorbeeld: $f(x, y) = \operatorname{sign}(x)\sqrt{|xy|}$ in $\mathbf{a} = (0, 0)$. Hierbij is $\operatorname{sign}(x) = 1$ als $x > 0$, $\operatorname{sign}(x) = 0$ als $x = 0$ en $\operatorname{sign}(x) = -1$ als $x < 0$. Meetkundig betekent dit ($n = 2$): een oppervlak dat bestaat uit rechten door het punt $\mathbf{a}$ hoeft geen vlak te zijn.

[21] ∇ leest men als *nabla* (Grieks voor harp).

[22] We nemen hierbij aan dat $(\nabla f)(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$: anders is de helling in het punt $\mathbf{x}$ in elke richting gelijk aan 0.



Figuur 1.3: De functie $f(x, y) = x^2 + y^2$ en haar gradiënt

De divergentie van een vectorveld

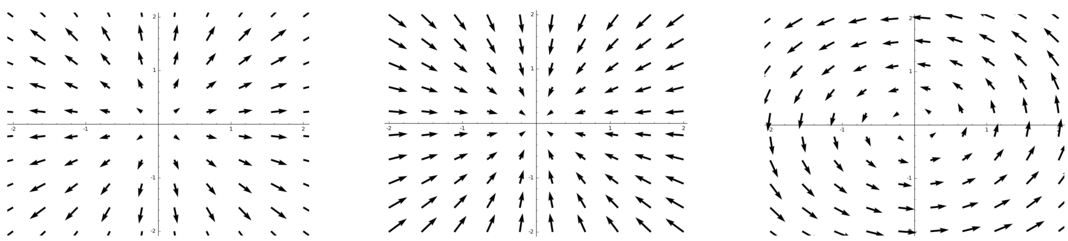
1.8.4 Definitie. Met een vectorveld $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)$ (F_j zijn $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}$ functies) associeert men het scalairenveld

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})$$

in die punten $\mathbf{x}$ waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt $(\operatorname{div} \mathbf{F})(\mathbf{x})$ de **divergentie** van $\mathbf{F}$ in $\mathbf{x}$. I.h.b. hebben we dus voor $n = 2$ en $n = 3$

$$(\operatorname{div} \mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)$$

$$\text{en } (\operatorname{div} \mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z)$$



Figuur 1.4: Vectorvelden (x, y), $(-x, -y)$ en $(-y, x)$ met constante divergentie 2, -2 en 0.

Als voor een vectorveld $\mathbf{F}$ in $\mathbb{R}^2$ het punt $\mathbf{x}$ een *bron* is, zoals de oorsprong in figuur 1.4(1),[23] dan zal in dit punt de x-component van het vectorveld toenemen in de x-richting (van negatief

[23] bij de meetkundige interpretatie van een vectorveld $\mathbf{F}$ grijpt de vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ steeds aan in het punt $\mathbf{x}$, d.w.z., in de figuren wordt de vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ voorgesteld met een pijltje dat vertrekt vanuit $\mathbf{x}$

naar positief), zodat $\frac{\partial F_1}{\partial x}(\mathbf{x}) > 0$. Analoog zal $\frac{\partial F_2}{\partial y}(\mathbf{x}) > 0$, zodat $(\operatorname{div}\mathbf{F})(\mathbf{x}) > 0$. Bij een *zinkgat*, zoals de oorsprong in figuur 1.4(2), zal analoog $(\operatorname{div}\mathbf{F})(\mathbf{x}) < 0$. We zien de oorsprong als een bron (resp. zinkgat) als we ons voorstellen dat een vloeistof stroomt volgens de snelheid aangegeven door het vectorveld $\mathbf{F}$. Ook verder verwijderd van een bron of een zinkgat kan $\operatorname{div}\mathbf{F} \neq 0$: als een vloeistof (of een gas) stroomt volgens de snelheid aangegeven door het vectorveld, dan zet ze uit[24] waar $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$, en wordt ze samengedrukt[25] waar $\operatorname{div}\mathbf{F} < 0$; bij een niet-samendrukbare vloeistof is $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ zoals op figuur 1.4(3).[26] De intuïtie voor de divergentie van een vectorveld in drie dimensies is analoog.

De rotor van een vectorveld

Is $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$, dan associeert men met een vectorveld $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ het vectorveld[27]

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\mathbf{F})(x,y,z) &:= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&:= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x,y,z)\,\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)(x,y,z)\,\mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y,z)\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}
$$

in die punten (x, y, z) waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt $(\operatorname{rot}\mathbf{F})(x, y, z)$ de **rotor**[28] van $\mathbf{F}$ in (x, y, z).

1.8.5 Opmerking. Voor $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ is ook de notatie $\nabla \times \mathbf{F}$ in gebruik.

Meetkundige betekenis: $n = 2$

Om de meetkundige betekenis van de rotor te begrijpen, is het nuttig om eerst een 2-dimensionaal vectorveld $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ te bekijken. Voor het corresponderende 3-dimensionale vectorveld $\mathbf{G}(x, y, z) = (P(x, y, 0), Q(x, y, 0), 0)$ vinden we

$$
(\operatorname{rot}\mathbf{G})(x,y,z) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y,0)\,\mathbf{e}_3.
$$

Het getal $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y)$ wordt soms de 2-dimensionale rotor van het (2-dimensionale) vectorveld $\mathbf{F}$ genoemd en geeft aan hoe sterk het vectorveld in het punt (x, y) roteert in tegenwijzerzin. Bijv., in figuur 1.4(3) is de oorsprong een punt waarrond $\mathbf{F}$ roteert in tegenwijzerzin: in zulk punt zal de x-component van $\mathbf{F}$ afnemen in de y-richting (van positief naar negatief), zodat $\dfrac{\partial P}{\partial y}(\mathbf{0}) < 0$. Analoog zal de y-component van $\mathbf{F}$ toenemen in de x-richting (van negatief naar positief), zodat $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(\mathbf{0}) > 0$. Hierdoor is de 2-dimensionale rotor van $\mathbf{F}$

[24] d.w.z., de dichtheid neemt af
[25] d.w.z., de dichtheid neemt toe
[26] waarbij niet stiekem vloeistof bijgevoegd of afgevoerd wordt zoals dat bij bronnen of zinkgaten het geval is
[27] de notatie met de determinant is symbolisch, maar ze is wel beknopt en gemakkelijker te onthouden
[28] In het Engels: *curl*, wat 'krul' betekent.

positief in $\mathbf{0}$. De vectorvelden in figuur 1.4 hebben een constante rotor, respectievelijk 0, 0 en 2. Als we ons opnieuw voorstellen dat een vloeistof stroomt volgens de snelheid aangegeven door het vectorveld $\mathbf{F}$, en we stellen ons voor dat een klein voorwerp dat vastgepind is in het punt (x, y) (bijv. een rond blaadje, in het midden vastgepind) drijft op de vloeistof, dan is de rotor evenredig met de snelheid waarmee het voorwerp begint te roteren onder invloed van de stroom.

Meetkundige betekenis: $n = 3$

Om de rotatie van een voorwerp in de 3-dimensionale ruimte vast te leggen hebben we zowel de as nodig waarrond het voorwerp roteert als de rotatiesnelheid rond die as. Voor een 3-dimensionaal vectorveld $\mathbf{F}$ geeft $(\operatorname{rot}\mathbf{F})(\mathbf{x})$ de rotatie weer van een klein voorwerp dat in $\mathbf{x}$ vastgepind is: de vector $(\operatorname{rot}\mathbf{F})(\mathbf{x})$ is parallel met de rotatieas, en de rotatiesnelheid is evenredig met de lengte van die vector.[29]

De Laplaciaan van een scalairenveld

Met een scalairenveld $f(\mathbf{x})$ associeert men het scalairenveld

$$\left(\nabla^2 f\right)(\mathbf{x}) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x})$$

in die punten $\mathbf{x}$ waar de gebruikte afgeleiden bestaan. Men noemt $(\nabla^2 f)(\mathbf{x})$ de **Laplaciaan** van f in $\mathbf{x}$. I.h.b. hebben we dus voor $n = 2$ en $n = 3$

$$\left(\nabla^2 f\right)(x, y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

$$\text{en} \quad \left(\nabla^2 f\right)(x, y, z) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

1.8.6 Opmerking. Voor $\nabla^2 f$ is ook de notatie Δf in gebruik.

Differentiaaloperatoren

Hier een overzicht met de vier bewerkingen, het veld waarop ze gedefinieerd zijn en het veld dat ze definiëren:

oorspronkelijk veld	bewerking	resulterend veld
scalair	∇^2	scalair
scalair	∇	vector
vector	div	scalair
vector	rot	vector

Men noemt zulke bewerking een **operator**:

[29] Zo begrijpen we ook waarom de (3-dimensionale) rotor van een 2-dimensionaal vectorveld parallel is met $\mathbf{e}_3$: een rotatie in het (x, y)-vlak kunnen we altijd opvatten als een rotatie rond de z-as in 3 dimensies.

1.8.7 Definitie. Een scalairwaardige operator is een functie die een scalairenveld f of een vectorveld $\mathbf{F}$ afbeeldt op een scalairenveld.
Een vectorwaardige operator is een is een functie die een scalairenveld f of een vectorveld $\mathbf{F}$ afbeeldt op een vectorveld.

We kunnen dan de som van twee operatoren D, E van hetzelfde type[30] 'puntsgewijs' definiëren

$$(D+E)(f) := D(f) + E(f)$$

evenals het product van een vectorveld $\mathbf{F}$ met een scalairwaardige operator D

$$(\mathbf{F}D)(f) := \mathbf{F}D(f)$$

en analoog voor andere bewerkingen. Zo schrijven we bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \Big(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) f \\ \nabla \boldsymbol{\cdot} \mathbf{F} &= \Big(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \boldsymbol{\cdot} (F_1\mathbf{e}_1 + \cdots + F_n\mathbf{e}_n) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} (= \operatorname{div} \mathbf{F})\end{aligned}$$

zodat ook

$$\nabla \boldsymbol{\cdot} (\nabla f) = \Big(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}\Big) \boldsymbol{\cdot} \Big(\mathbf{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \mathbf{e}_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} (= \nabla^2 f)$$

Merk in de vorige berekeningen op dat de operator $\frac{\partial}{\partial x_j}$ niet alleen inwerkt op scalairenvelden, maar ook (overeenkomstig definitie 1.6.3) op vectorvelden.
Merk ook op dat de rekenregel $\Big(\mathbf{F} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \boldsymbol{\cdot} \mathbf{G} = \mathbf{F} \boldsymbol{\cdot} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_j}$ in veel gevallen een praktische manier geeft om het inproduct van een operator met een vectorveld uit te rekenen.[31]

Rekenregels

Voor een functie f van drie veranderlijken zegt men 'dat de gemengde afgeleiden van tweede orde onderling gelijk zijn' in een bepaalde verzameling, als in die verzameling[32]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}.$$

In 5.4.11 resp. 6.2.6 gebruiken we

1.8.8 Stelling.

1. *Is f een scalairenveld waarvoor de gemengde afgeleiden van tweede orde onderling gelijk zijn, dan is* $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.
2. *Is $\mathbf{F}$ een vectorveld waarvoor de gemengde afgeleiden van tweede orde onderling gelijk zijn, dan is* $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0$.

[30] d.w.z., ze zijn beide gedefinieerd op hetzelfde soort veld, en hebben hetzelfde soort veld als resultaat
[31] beide leden zijn immers gelijk aan $F_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_j} + \cdots + F_n \frac{\partial G_n}{\partial x_j}$
[32] we zullen in 4.3.2 zien dat een voldoende voorwaarde is dat f van de klasse C^2 is

Bewijs. 1.
$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{e}_1 + \text{cyclische termen} = (0,0,0).$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0.\end{aligned}$$

□

Hieronder nog enkele andere rekenregels.

1.8.9 Stelling. *Voor vectorvelden* $\mathbf{F} = (P, Q, R) = (f_1, f_2, f_3)$, $\mathbf{G} = (g_1, g_2, g_3)$, *een scalairenveld* f, *en met in de laatste formule de notatie* $\nabla^2\mathbf{F} := \big(\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R\big)$, *hebben we*

1. $\operatorname{div}(\nabla f) = \nabla^2 f$
2. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \boldsymbol{.} \mathbf{F} + f \operatorname{div}\mathbf{F}$
3. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \boldsymbol{.} \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \boldsymbol{.} \operatorname{rot}\mathbf{G}$
4. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}\mathbf{F}$
5. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$ *als de gemengde partiële afgeleiden gelijk zijn.*

Bewijs. 1.
$$\operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

2.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \operatorname{div}(fP, fQ, fR) &= \frac{\partial f}{\partial x}P + f\frac{\partial P}{\partial x} + \text{twee cyclische termen} \\ &= \nabla f \boldsymbol{.} \mathbf{F} + f \operatorname{div}\mathbf{F}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_2 g_3 - g_2 f_3) + \text{twee cyclische termen} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x} g_3 + f_2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} f_3 - g_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} + \text{twee cyclische termen} \\ &= g_1\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) - f_1\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + \text{twee cyclische termen} \\ &= \mathbf{G} \boldsymbol{.} \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \boldsymbol{.} \operatorname{rot}\mathbf{G}\end{aligned}$$

4.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) &= \operatorname{rot}(fP, fQ, fR)\\
&= \left(\frac{\partial(fR)}{\partial y} - \frac{\partial(fQ)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \text{twee cyclische termen}\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}R + f\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}Q - f\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \text{twee cyclische termen}\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}R - \frac{\partial f}{\partial z}Q\right)\mathbf{e}_1 + f\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 + \text{twee cyclische termen}\\
&= \nabla f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}\mathbf{F}
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\right)\right)\mathbf{e}_1 + \text{cycl.}\\
&= \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial x}\right)\mathbf{e}_1 + \text{cycl.}\\
&= \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)\mathbf{e}_1 + \text{cycl.}\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathbf{e}_1 - \nabla^2 P\mathbf{e}_1 + \text{cycl.}\\
&= \nabla(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}
\end{aligned}
$$

□

Poolcoördinaten

Voor problemen met een rotatie-symmetrie is het handig om de gradiënt, divergentie en Laplaciaan uit te drukken in poolcoördinaten. De verwantschap tussen de cartesische coördinaten en de poolcoördinaten wordt gegeven door $\mathbf{p}(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
We definiëren in deze context ook de vectorvelden

$$\mathbf{e}_r(\theta) := (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{en} \quad \mathbf{e}_\theta(\theta) := (-\sin\theta, \cos\theta).$$

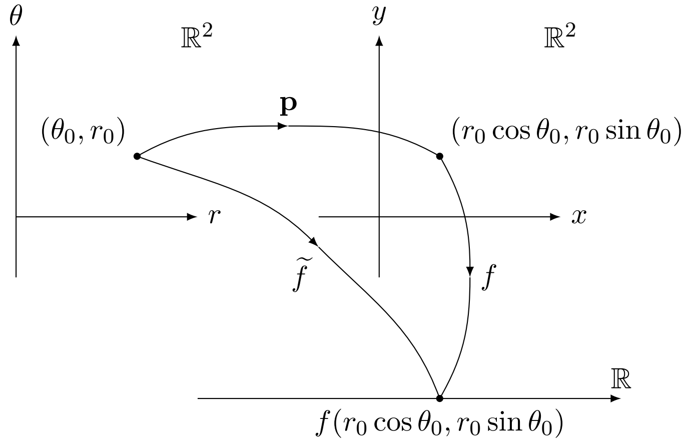
1.8.10 Stelling (Gradiënt in poolcoördinaten). *Zij f een reële functie van twee veranderlijken en stel*

$$\widetilde{f}(\theta, r) := f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Als f afleidbaar is in het punt $(r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0,0)$, dan is

$$(\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r) + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\theta, r). \tag{1.7}$$

Bewijs. Vooreerst een bemerking bij de opgave. De gradiënt $(\nabla f)(x, y)$ is een functie van x en y. Het linkerlid van (1.7) krijgt men door die afgeleiden te berekenen in het punt $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Beide leden zijn dus functies van (θ, r).



Figuur 1.5: $f(x, y)$ in poolcoördinaten

Door de kettingregel hebben we

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\theta, r) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,(r\cos\theta) \\
\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta.
\end{aligned}$$

De vectorvelden $\mathbf{e}_\theta$ en $\mathbf{e}_r$ zijn m.a.w. zo gekozen dat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\theta, r) &= r(\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta) \centerdot \mathbf{e}_\theta(\theta) \\
\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r) &= (\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta) \centerdot \mathbf{e}_r(\theta).
\end{aligned}$$

Vermits $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ en $\mathbf{e}_r(\theta)$ orthonormale vectoren zijn, geldt voor elke vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ dat

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \centerdot \mathbf{e}_r(\theta))\mathbf{e}_r(\theta) + (\mathbf{v} \centerdot \mathbf{e}_\theta(\theta))\mathbf{e}_\theta(\theta).$$

Kiezen we i.h.b. $\mathbf{v} = (\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta)$, dan volgt de gezochte formule als $r \neq 0$. □

1.8.11 Opmerking. Louter bekeken als functies van twee reële veranderlijken zijn f en $\widetilde{f}$ twee verschillende functies. Maar als we (x, y) en (θ, r) zoals gewoonlijk opvatten als twee verschillende manieren om hetzelfde punt in de 2-dimensionale ruimte in coördinaten te beschrijven, dan zien we ook f en $\widetilde{f}$ als twee verschillende manieren om dezelfde meetkundige functie te beschrijven. Men vat dan $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ en $\frac{\partial}{\partial r}$ op als vier operatoren die inwerken op dezelfde meetkundige functie (en die in de verschillende coördinatenstelsels hun natuurlijke betekenis hebben). Men zou trouwens even goed (x, y) als onafhankelijke veranderlijken kunnen opvatten, en (θ, r) als functie van (x, y).[33] Ook dan vindt men dezelfde verwantschap tussen de Laplaciaan in cartesische coördinaten en in poolcoördinaten, wat erop wijst dat dit een intrinsiek meetkundige verwantschap is.[34]

[33]Technisch gezien is dit iets lastiger omdat de natuurlijke uitdrukkingen $\theta(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ en $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ slechts op delen van $\mathbb{R}^2$ geldig zijn.

[34]De studie van zulke intrinsiek meetkundige begrippen wordt *Differentiaalmeetkunde* genoemd.

Vandaar laat men in de praktijk in de notatie het onderscheid tussen f en $\widetilde{f}$ weg, en schrijft men (1.7) als[35]

$$\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

1.8.12 Stelling (Divergentie in poolcoördinaten). *Zij* $\mathbf{F}$ *een 2-dimensionaal vectorveld en stel*

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r) := \mathbf{F}(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Noteer $\widetilde{F}_r(\theta, r)$ *en* $\widetilde{F}_\theta(\theta, r)$ *de componenten van* $\widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r)$ *volgens* $\mathbf{e}_r(\theta)$ *en* $\mathbf{e}_\theta(\theta)$*, respectievelijk.*[36] *M.a.w., de scalairenvelden* $\widetilde{F}_r$ *en* $\widetilde{F}_\theta$ *zijn zo gekozen dat*

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r) = \widetilde{F}_r(\theta, r)\mathbf{e}_r(\theta) + \widetilde{F}_\theta(\theta, r)\mathbf{e}_\theta(\theta).$$

Als $\mathbf{F}$ *afleidbaar is in het punt* $(r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0, 0)$*, dan is*

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial \widetilde{F}_r}{\partial r}(\theta, r) + \frac{1}{r}\widetilde{F}_r(\theta, r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}_\theta}{\partial \theta}(\theta, r). \tag{1.8}$$

Bewijs. Omdat $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$, $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$ en $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0$, vinden we d.m.v. de bewerkingen op operatoren (definitie 1.8.7)

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathbf{F})(r\cos\theta, r\sin\theta) &= (\nabla \cdot \mathbf{F})(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\overset{(*)}{=} \left(\mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r) \\
&= \left(\mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\widetilde{F}_r(\theta, r)\mathbf{e}_r(\theta) + \widetilde{F}_\theta(\theta, r)\mathbf{e}_\theta(\theta)\right) \\
&= \frac{\partial \widetilde{F}_r}{\partial r}(\theta, r) + \frac{1}{r}\widetilde{F}_r(\theta, r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}_\theta}{\partial \theta}(\theta, r).
\end{aligned}$$

De overgang $(*)$ is zeer suggestief wegens (1.7). Nochtans hebben we daar enkel ∇f in poolcoördinaten uitgedrukt, met f een scalairenveld. De overgang is gerechtvaardigd omdat

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathbf{F})(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \mathbf{e}_1 \cdot (\nabla F_1)(r\cos\theta, r\sin\theta) + \mathbf{e}_2 \cdot (\nabla F_2)(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&\overset{(1.7)}{=} \mathbf{e}_1 \cdot \left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\widetilde{F}_1(\theta, r) + \mathbf{e}_2 \cdot \left(\mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\widetilde{F}_2(\theta, r) \\
&= \left(\mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\widetilde{F}_1(\theta, r)\mathbf{e}_1 + \widetilde{F}_2(\theta, r)\mathbf{e}_2\right) \\
&= \left(\mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \cdot \widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r)
\end{aligned}$$

□

1.8.13 Opmerking. Om zowel de gradiënt van een scalairenveld als de divergentie van een vectorveld te berekenen in poolcoördinaten volstaat het dus om te onthouden dat in poolcoördinaten $\boxed{\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}}$.

[35] men schrijft de vectorvelden $\mathbf{e}_r$ en $\mathbf{e}_\theta$ doorgaans vóór de partiële afgeleide, zodat het duidelijk is dat de partiële afgeleide niet inwerkt op het vectorveld

[36] In elk punt (r, θ) zijn de vectoren $\mathbf{e}_r(\theta, r)$ en $\mathbf{e}_\theta(\theta, r)$ loodrecht, zodat ze heel $\mathbb{R}^2$ voortbrengen.

1.8.14 Stelling (Laplaciaan in poolcoördinaten). *Zij f een reële functie van twee veranderlijken en stel*

$$\widetilde{f}(\theta, r) := f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Als f van de klasse C^2 is in een omgeving van $(r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0,0)$, dan is

$$\nabla^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial r^2}(\theta, r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \theta^2}(\theta, r).$$

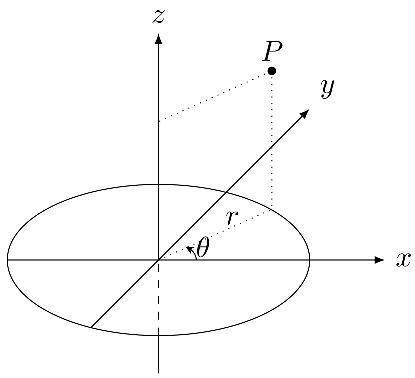
Bewijs. Wegens (1.7) en (1.8) is

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \operatorname{div}(\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}\Big)(\theta, r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}\Big)(\theta, r).\end{aligned}$$

□

Cilindercoördinaten

1.8.15 Definitie. Het drietal **cilindercoördinaten** van een punt $P(x, y, z)$ noteren wij als (θ, r, z). De verwantschap tussen de cartesische coördinaten (x, y, z) en de cilindercoördinaten (θ, r, z) van eenzelfde punt P wordt gegeven door $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$.



Ligt P niet op de z-as, dan heeft zijn projectie $(x, y, 0)$ juist één stel poolcoördinaten (θ, r), wat de eerste twee cilindercoördinaten zijn (terwijl de hoogte z in cartesiaanse en in cilindercoordinaten dezelfde is). Alle punten P van de xyz-ruimte, behalve punten op de z-as, hebben dus juist één stel cilindercoördinaten (θ, r, z), met $r > 0$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ en $z \in \mathbb{R}$. Elk punt van de vorm $P(0, 0, z)$ $(z \in \mathbb{R})$ heeft oneindig veel stellen cilindercoördinaten, nl. alle drietallen $(\theta, 0, z)$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$.

Zoals voor poolcoördinaten bewijst men

1.8.16 Stelling (Gradiënt in cilindercoördinaten). *Zij f een reële functie van drie veranderlijken en stel*

$$\widetilde{f}(\theta, r, z) := f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Als f afleidbaar is in het punt $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ dat niet op de z-as ligt, dan is

$$(\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \mathbf{e}_r(\theta)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r, z) + \mathbf{e}_\theta(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\theta, r, z) + \mathbf{e}_3\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial z}(\theta, r, z).$$

1.8.17 Stelling (Divergentie in cilindercoördinaten). *Zij* $\mathbf{F}$ *een 3-dimensionaal vectorveld en stel*

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r, z) := \mathbf{F}(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Noteer $\widetilde{F}_r(\theta, r, z)$, $\widetilde{F}_\theta(\theta, r, z)$ *en* $\widetilde{F}_3(\theta, r, z)$ *de componenten van* $\widetilde{\mathbf{F}}(\theta, r, z)$ *volgens* $\mathbf{e}_r(\theta)$, $\mathbf{e}_\theta(\theta)$ *en* $\mathbf{e}_3$, *respectievelijk.*
Als $\mathbf{F}$ *afleidbaar is in het punt* $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ *dat niet op de* z*-as ligt, dan is*

$$(\operatorname{div}\mathbf{F})(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial \widetilde{F}_r}{\partial r}(\theta, r, z) + \frac{1}{r}\widetilde{F}_r(\theta, r, z) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}_\theta}{\partial \theta}(\theta, r, z) + \frac{\partial \widetilde{F}_3}{\partial z}(\theta, r, z).$$

1.8.18 Opmerking. Het volstaat opnieuw om te onthouden dat in cilindercoördinaten

$$\boxed{\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}}$$

1.8.19 Stelling (Laplaciaan in cilindercoördinaten). *Zij* f *een reële functie van drie veranderlijken en stel*

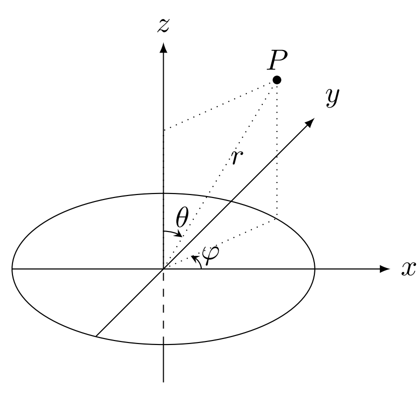
$$\widetilde{f}(\theta, r, z) := f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

Als f *van de klasse* C^2 *is in een omgeving van het punt* $(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ *dat niet op de* z*-as ligt, dan is*

$$(\nabla^2 f)(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial r^2}(\theta, r, z) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\theta, r, z) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \theta^2}(\theta, r, z) + \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial z^2}(\theta, r, z).$$

Bolcoördinaten

1.8.20 Definitie. Wij[37] noteren het drietal **bolcoördinaten** van een punt $P(x, y, z)$ als (φ, θ, r), waarvan we nu de betekenis vastleggen. Als P niet op de z-as ligt, bepalen P en de z-as ondubbelzinning een vlak. Zij α_P hiervan het halfvlak waarin P ligt, begrensd door de z-as. De z.g. **azimuthoek** φ definiëren we als de hoek tussen het halfvlak α_P en het halfvlak $\{\,(x, 0, z) \mid x \geqslant 0\,\}$. Wij stellen $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, zodat het halfvlak α_P, als dit om de z-as wentelt, de gehele ruimte bestrijkt. In het halfvlak α_P zijn (θ, r) de poolcoördinaten van P. De **zenitsafstand** θ laten we variëren van 0 (zenit) tot π (nadir).



[37] er zijn ook andere conventies

Uit deze beschrijving blijkt dat alle punten P van de xyz-ruimte, behalve punten op de z-as, juist één stel bolcoördinaten hebben, met $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$, $r > 0$. Elk punt van de vorm $P(0,0,z)$ heeft oneindig veel stellen bolcoördinaten, nl. alle drietallen $(\varphi, 0, z)$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ als $z > 0$, alle drietallen $(\varphi, \pi, -z)$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ als $z < 0$, en alle drietallen $(\varphi, \theta, 0)$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ als $z = 0$.
De verwantschap tussen de cartesiaanse coördinaten (x, y, z) en de bolcoördinaten (φ, θ, r) van eenzelfde punt P wordt gegeven door $x = r \sin\theta \cos\varphi, y = r \sin\theta \sin\varphi, z = r\cos\theta$.

Bepaal nu in de volgende opdrachten zelf de gradiënt, divergentie en Laplaciaan in bolcoordinaten. Laat je hierbij inspireren door de werkwijze die we volgden voor poolcoördinaten!

1.8.21 Opdracht (Gradiënt in bolcoördinaten).
Zij f een reële functie van drie veranderlijken en stel

$$\widetilde{f}(\varphi, \theta, r) := f(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{p}(\varphi, \theta, r) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$

1. Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{e}_r(\varphi, \theta)$ zo dat $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\varphi, \theta, r) = (\nabla f)(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) \cdot \mathbf{e}_r(\varphi, \theta)$.
2. Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta)$ zo dat voor een zeker scalairenveld λ geldt dat $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta, r) = \lambda(\varphi, \theta, r)(\nabla f)(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) \cdot \mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta)$.
3. Bepaal een eenheidsvector $\mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)$ zo dat voor een zeker scalairenveld μ geldt dat $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\varphi, \theta, r) = \mu(\varphi, \theta, r)(\nabla f)(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) \cdot \mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)$.
4. Ga na dat de vectoren $\mathbf{e}_r(\varphi, \theta)$, $\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta)$ en $\mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)$ loodrecht staan op mekaar.
5. Besluit uit het vorige deel dat voor elke vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ en voor elke φ, θ

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta))\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta))\mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r(\varphi, \theta))\mathbf{e}_r(\varphi, \theta).$$

6. Toon aan dat

$$(\nabla f)(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) = \frac{\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta)}{r \sin\theta} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta, r) + \frac{\mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)}{r} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(\varphi, \theta, r) + \mathbf{e}_r(\varphi, \theta) \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(\varphi, \theta, r)$$

als $\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)$ niet op de z-as ligt.

1.8.22 Opdracht (Divergentie in bolcoördinaten).
Zij $\mathbf{F}$ een 3-dimensionaal vectorveld en stel

$$\widetilde{\mathbf{F}}(\varphi, \theta, r) := \mathbf{F}(\mathbf{p}(\varphi, \theta, r)) \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{p}(\varphi, \theta, r) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$

Noteer $\widetilde{F}_\varphi(\varphi, \theta, r)$, $\widetilde{F}_\theta(\varphi, \theta, r)$ en $\widetilde{F}_r(\varphi, \theta, r)$ de componenten van $\widetilde{\mathbf{F}}(\varphi, \theta, r)$ volgens $\mathbf{e}_\varphi(\varphi, \theta)$, $\mathbf{e}_\theta(\varphi, \theta)$ en $\mathbf{e}_r(\varphi, \theta)$, respectievelijk.

1. Toon aan dat $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$, $\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta \mathbf{e}_\varphi$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$.

2. Als $\mathbf{F}$ afleidbaar is in het punt $\mathbf{p}(\varphi,\theta,r)$ dat niet op de z-as ligt, toon dan aan dat

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mathbf{F})(\mathbf{p}(\varphi,\theta,r)) &= \Big(\frac{\mathbf{e}_\varphi(\varphi,\theta)}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\mathbf{e}_\theta(\varphi,\theta)}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_r(\varphi,\theta)\frac{\partial}{\partial r}\Big) \centerdot \widetilde{\mathbf{F}}(\varphi,\theta,r)\\ &= \Big(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\widetilde{F}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\tan\theta}\widetilde{F}_\theta + \frac{2}{r}\widetilde{F}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{F}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\widetilde{F}_r}{\partial r}\Big)(\varphi,\theta,r).\end{aligned}$$

1.8.23 Opmerking. Het volstaat opnieuw te onthouden dat in bolcoördinaten

$$\boxed{\nabla = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r}}$$

1.8.24 Opdracht (Laplaciaan in bolcoördinaten).
Zij f een reële functie van drie veranderlijken en stel

$$\widetilde{f}(\varphi,\theta,r) := f(\mathbf{p}(\varphi,\theta,r)) \quad \text{waarbij} \quad \mathbf{p}(\varphi,\theta,r) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Als f van de klasse C^2 is in een omgeving van het punt $\mathbf{p}(\varphi,\theta,r)$ dat niet op de z-as ligt, toon dan aan dat

$$(\nabla^2 f)(\mathbf{p}(\varphi,\theta,r)) = \Big(\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial\theta^2}\Big)(\varphi,\theta,r).$$

1.9 Oefeningen

1. Toon de volgende eigenschappen aan:
   (a) Elk inwendig punt van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is een ophopingspunt van V.
   (b) Voor elke $V \subseteq \mathbb{R}^n$ hebben we $V^\circ \cap \partial V = \varnothing$ en $V^\circ \cup \partial V = \overline{V}$.
   (c) Als $\mathbf{a}$ een ophopingspunt van $V \subset \mathbb{R}^n$ is, dan bevat $B(\mathbf{a},R)$ een oneindig aantal elementen van V voor alle $R > 0$.
   (d) Alle adherente punten van $V \subset \mathbb{R}^n$ zijn ofwel ophopingspunten ofwel geïsoleerde punten van V.
   (e) Als $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ en $R > 0$, dan is $\overline{B}(\mathbf{a},R) = \overline{B(\mathbf{a},R)}$.
   (f) Een nietlege $V \subseteq \mathbb{R}^n$ is begrensd als en slechts als $\operatorname{diam}(V) < +\infty$.

2. Bepaal en schets het domein van de volgende functies:

$(a)\ f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$	$(b)\ f(x,y) = 1 + \sqrt{-(x-y)^2}$
$(c)\ f(x,y) = \ln(x+y)$	$(d)\ f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$
$(e)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{4-y^2}$	$(f)\ f(x,y) = \sqrt{y\sin x}$
$(g)\ f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$	$(h)\ f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-a^2)(2a^2-x^2-y^2)} \quad (a>0)$
$(i)\ f(x,y) = \ln(x^2+y)$	$(j)\ f(x,y) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y}$
$(k)\ f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$	$(l)\ f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

3. Bereken de functiewaarde van $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$ in de punten (x,y) die op de cirkel $x^2 + y^2 = R^2$ $(R \neq 1)$ liggen.

4. Bepaal $f(x)$ als
$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \qquad (xy > 0).$$

5. Bepaal $f(x,y)$ als
$$f(x+y, x-y) = xy + y^2.$$

6. Bereken de partiële afgeleiden $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ van de volgende functies:

$(a)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$(b)\ f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

$(c)\ f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$(d)\ f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

$(e)\ f(x,y) = x^y$

$(f)\ f(x,y) = e^{\sin \frac{y}{x}}$

$(g)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$

$(h)\ f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$(i)\ f(x,y) = \arcsin \sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$

$(j)\ f(x,y) = \ln\left(\sin\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}\right)\right).$

7. Bereken
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$
als $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.

8. Bewijs dat $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$ als $z(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

9. Bewijs dat $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ als $u(x,y,z) = (x-y)(y-z)(z-x)$.

10. Bewijs dat $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$ als $u(x,y,z) = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

11. Bepaal $z(x,y)$ als $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

12. Bepaal $z(x,y)$ als
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x}, \quad z(1,y) = \sin y.$$

13. Bereken (bij benadering):
(a) $(2,01)^3(0,97)^2$ (b) $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$
Hint: $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}$ met $\|\mathbf{h}\|$ voldoende klein als f afleidbaar is in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

14. Bereken $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ als
$$z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{met} \quad x = u\sin v,\ y = u\cos v.$$

15. Bereken $\dfrac{du}{dx}$ als
$$u = f(x,y,z), \quad \text{met} \quad y = \varphi(x),\ z = \psi(x,y).$$

16. Veronderstel dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ afleidbaar is. Bewijs dat $\dfrac{\partial z}{\partial y} = a\dfrac{\partial z}{\partial x}$ als $z(x,y) = f(x+ay)$.

17. Bewijs dat de functie $w = f(u,v)$, met $u = x + at$, $v = y + bt$, een oplossing is van de differentiaalvergelijking
$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

18. Bewijs dat de functies $g(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ en $h(x,y) = \ln\left(\dfrac{1}{r}\right)$, met $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, oplossingen zijn van de Laplace-vergelijking
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

19. Bewijs dat de functie $u(x,t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin(\lambda x)$ een oplossing is van de *golfvergelijking*
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

20. Bewijs dat de functie
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$
een oplossing is van de *warmtevergelijking*
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

21. Zij G een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. De functie $f : G \to \mathbb{R}$ heet homogeen van graad k, als voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en alle $\mathbf{x} \in G$ geldt $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x})$. Bijvoorbeeld is $f(x,y) = x^7 + 3x^5y^2 + 9xy^6$ homogeen van graad 7. Bewijs de *homogene functiestelling van Euler*: als f afleidbaar is in $\mathbf{x} \in G$, dan geldt dat
$$\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad \text{of} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}).$$
Hint: Beschouw de functie $g(\lambda) = f(\lambda\mathbf{x})$ en bereken g'.

Hoofdstuk 2

Impliciete functies

2.1 Jacobiaan van een afbeelding

Een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$ vectorwaardige functie $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ is afleidbaar in een inwendig punt $\mathbf{a}$ van haar domein juist als elke component afleidbaar is in $\mathbf{a}$, nl. als voor elke $i = 1, 2, \ldots, m$ en voor elke $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ met $\|\mathbf{h}\|$ voldoende klein

$$f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f_i(\mathbf{a}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_n + \|\mathbf{h}\| r_i(\mathbf{h})$$

met $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r_i(\mathbf{h}) = 0$. Met behulp van het matrixproduct kunnen we dit herschrijven als

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}}_{=:\, D\mathbf{f}(\mathbf{a})} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \|\mathbf{h}\| \begin{pmatrix} r_1(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ r_m(\mathbf{h}) \end{pmatrix}$$

met $r_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r_i(\mathbf{h}) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$.

2.1.1 Definitie. Als de functie $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afleidbaar is in $\mathbf{a}$, dan wordt de matrix $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ de **Jacobiaanse matrix** (of **totale afgeleide**) van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$ genoemd. Als $m = n$, dan wordt de determinant $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ de **Jacobiaanse determinant** van $\mathbf{f}$ genoemd.

2.1.2 Opmerkingen.

1. We zullen ook $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{a}))$ als $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a})$ noteren.[1]

2. Als $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ afleidbaar is in $\mathbf{a}$, dan is haar Jacobiaanse matrix een rijvector, gegeven door haar gradiënt in $\mathbf{a}$, nl. $Df(\mathbf{a}) = (\nabla f)(\mathbf{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$ (zie 1.8.3).

[1] zie §4.4 en 6.3.1

We kunnen de afleidbaarheid van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$ hiermee beknopt vectorieel noteren als[2]

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\, \mathbf{r}(\mathbf{h}),$$

met $\mathbf{r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{h}) = 0$.

2.1.3 Opmerking. $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is de matrix-voorstelling van de lineaire benadering van $\mathbf{f}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in de omgeving van $\mathbf{a}$, als we zoals vroeger de oorsprong in $\mathbb{R}^n$ verplaatsen naar het punt $\mathbf{a}$ en de oorsprong in $\mathbb{R}^m$ naar het punt $\mathbf{f}(\mathbf{a})$. We noemen deze lineaire afbeelding de **Jacobiaan-afbeelding** van $\mathbf{f}$ in $\mathbf{a}$ en blijven deze met $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ noteren. Meetkundig gezien betekent dit opnieuw dat de raakruimte aan de grafiek van $\mathbf{f}$ in het punt $(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{a})) \in \mathbb{R}^{n+m}$ bestaat: die raakruimte is juist de grafiek van de lineaire afbeelding $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Dat dit een conceptuele manier is om afleidbaarheid te benaderen, blijkt ondermeer uit de kettingregel: als $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ afleidbaar is in $\mathbf{a}$ en $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ afleidbaar in $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, dan is volgens de kettingregel in meerdere veranderlijken

$$\frac{\partial((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_i)}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial(g_i\circ\mathbf{f})}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_q}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(\mathbf{a})\,, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

of, in matrixnotatie,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_1)}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_1)}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_k)}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial((\mathbf{g}\circ\mathbf{f})_k)}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

m.a.w.,

$$\boxed{D(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(a) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{a})}$$

zodat 'de beste lineaire benadering van de samenstelling gelijk is aan de samenstelling[3] van de beste lineaire benaderingen', wat we ook zonder formeel bewijs hadden durven vermoeden.

2.1.4 Oefening. *Als* $\mathbf{f}$ *zelf een lineaire afbeelding is* $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^m$ *met matrixvoorstelling* A*, dan is* $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = A$ *in elk punt* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*.*

Het resultaat uit de vorige oefening hoeft niet te verbazen: het drukt uit dat de beste lineaire benadering van een lineaire afbeelding juist die afbeelding zelf is.

[2] het product in het rechterlid is het matrixproduct van $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ met de kolomvector $\mathbf{h}$

[3] het matrixproduct komt immers overeen met de samenstelling van de corresponderende lineaire afbeeldingen

2.2 Impliciete functies

Als een gegeven vlakke kromme Γ bepaald is door een vergelijking $\Gamma\colon\ f(x,y)=0$, dan kan het gebeuren dat we deze vergelijking *expliciet* kunnen oplossen naar y, en zo een functie $y(x)$ kunnen definiëren waarvan de grafiek juist samenvalt met de kromme Γ (m.a.w., waarvoor $f(x,y(x))=0$). We zeggen dan dat de functie $y(x)$ *impliciet* bepaald is door de vergelijking $f(x,y)=0$.

2.2.1 Voorbeeld. $\Gamma\colon\ x^2+y^2=1$ bepaalt een cirkel met middelpunt 0 en straal 1. We kunnen hier de vergelijking expliciet oplossen naar y, en vinden $y(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Zoals uit het voorbeeld blijkt, zullen we er rekening moeten mee houden dat zo'n impliciete vergelijking niet steeds een eenduidige expliciete functie bepaalt.
Voor minder eenvoudige vergelijkingen $f(x,y)=0$ is het meestal moeilijk (of zelfs onmogelijk) om $y(x)$ expliciet op te lossen in termen van elementaire functies (zelfs als f een elementaire functie is die continu afleidbaar is), zoals bijv. $\Gamma\colon\ \sin y = xy$. Het is daardoor ook moeilijker te zien in welk(e) interval(len) we de vergelijking kunnen oplossen naar y. Toch kunnen we zonder $y(x)$ expliciet te bepalen al informatie krijgen over de afgeleide $y'(x)$:

2.2.2 Voorbeeld. Als $x^2+(y(x))^2=1$ op een open interval $I\subseteq\mathbb{R}$, dan kunnen we beide leden van de gelijkheid afleiden op I. We vinden dat $2x+2y(x)y'(x)=0$ op I, zodat $y'(x)=-x/y(x)$ als $y(x)\neq 0$.

In het algemeen vinden we voor een kromme $\Gamma\colon\ f(x,y)=0$ door impliciet afleiden dat een expliciete functie $y(x)$ voldoet aan (kettingregel in meerdere veranderlijken)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))y'(x)=0. \tag{2.1}$$

We hebben hierbij wel verondersteld:
(i) een expliciete functie $y(x)$ bestaat op een gepast open interval $I\subseteq\mathbb{R}$
(ii) $y(x)$ is afleidbaar op I.
We zullen een voldoende voorwaarde geven waaronder een (eenduidige) expliciete functie $y(x)$ bestaat in een voldoende kleine omgeving van een gegeven punt $(a,b)\in\Gamma$.

2.2.3 Voorbeeld. De kromme $\Gamma\colon\ x^2+y^2=1$ bepaalt een eenduidige oplossing $y(x)$ in een omgeving van elk punt (a,b) op Γ waarvoor $-1<a<1$, maar geen eenduidige oplossing in een omgeving (hoe klein ook) van $(\pm1,0)$.

Meetkundig gezien verwachten we een eenduidige oplossing $y(x)$ in een omgeving van een punt $(x,y(x))\in\Gamma$ op voorwaarde dat de raaklijn aan Γ in $(x,y(x))$ niet verticaal is. In de vergelijking (2.1) is $y'(x)$ eenduidig bepaald zodra $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\neq 0$.[4] Dit zal inderdaad een voldoende voorwaarde blijken:

2.2.4 Stelling (Stelling van de impliciete functies in het vlak). *Zij f een $\mathbb{R}^2$-$\mathbb{R}$ functie die van de klasse C^1 is in een omgeving van $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Als $f(a,b)=0$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$, dan geldt:*

[4] terwijl het geval $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))=0$ intuïtief overeenkomt met $y'(x)=\pm\infty$, d.w.z., een verticale raaklijn (de raaklijn aan Γ in $(x_0,y(x_0))$ heeft idd. als vergelijking $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y(x_0))(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y(x_0))(y-y(x_0))=0$)

1. *Er bestaan $\delta > 0$ en $\varepsilon > 0$ zo dat voor elke $x \in]a-\delta, a+\delta[$ een unieke $y(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ bestaat waarvoor*
$$f(x, y(x)) = 0.$$
2. *De afbeelding $y\colon]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}$ is van de klasse C^1.*
3. *Als $f(x,y)$ bovendien van de klasse C^k ($k > 1$) is in een omgeving van (a,b), dan is ook $y(x)$ van de klasse C^k in een omgeving van a.*

Bewijs. We mogen aannemen dat $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) > 0$ (het geval $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) < 0$ volgt analoog).

1. Omdat $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu is, volgt door behoud van teken dat ook $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$ in een zekere rechthoek $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \times [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Daardoor is de functie $y \mapsto f(a,y)$ strikt stijgend in $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$. Omdat $f(a,b) = 0$ is dus $f(a, b-\varepsilon) < 0$ en $f(a, b+\varepsilon) > 0$. Omdat f continu is, volgt (opnieuw door behoud van teken) dat $f(x, b-\varepsilon) < 0$ en $f(x, b+\varepsilon) > 0$ voor elke x in een zeker interval $]a-\delta, a+\delta[$.
Kies nu willekeurig $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Dan is ook de functie $y \mapsto f(x,y)$ strikt stijgend op $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ (verklein desnoods δ zo dat $\delta \leqslant \varepsilon$). Door de tussenwaardestelling heeft deze functie een (uniek, omdat ze strikt stijgend is) nulpunt $y(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$.

2. I.h.b. is $y(a) = b$. In feite kunnen we in deel 1. $\varepsilon > 0$ zo veel verkleinen als we willen. We vinden dus voor elke (voldoend kleine) $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor elke $x \in]a-\delta, a+\delta[$ een unieke $y(x)$ bestaat met $|y(x) - b| < \varepsilon$ waarvoor $f(x, y(x)) = 0$. De functie $y(x)$ is dus continu in a. Wat we juist bewezen hebben, kunnen we ook toepassen in een willekeurig punt $(x, y(x))$ in de plaats van het punt (a,b): f voldoet ook in dit punt aan de voorwaarden van de stelling. We besluiten dat y continu is in elk punt $x \in]a-\delta, a+\delta[$.[5]
Door de middelwaardestelling is
$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)\cdot k$$
voor zekere $\theta \in [0,1]$ (afhankelijk van h, k). Kiezen we i.h.b. (x,y) en $(x+h, y+k)$ op de kromme met vergelijking $f(x,y) = 0$, m.a.w. kiezen we $y := y(x)$ en $k := y(x+h) - y(x)$, dan vinden we
$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, y+\theta k)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x+\theta h, y+\theta k)}. \tag{2.2}$$
Omdat $y(x)$ continu is, is dus ook $|\theta k| \leqslant |k| = |y(x+h) - y(x)| \to 0$ als $h \to 0$. Uit (2.2) volgt dus dat
$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))} \tag{2.3}$$
omdat ook $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu zijn. Uit de gelijkheid (2.3) volgt dat $y(x)$ van de klasse C^1 is op een omgeving van a.

[5] Tot hier in het bewijs hoeven we niet te vragen dat f van de klasse C^1 is: het volstaat dat f en $\frac{\partial f}{\partial y}$ bestaan en continu zijn op een omgeving van (a,b).

3. Per inductie: als f van klasse C^2 is, dan zijn $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van klasse C^1, en bewezen we al dat $y(x)$ van klasse C^1 is. Door (2.3) is dan ook $y'(x)$ van klasse C^1, m.a.w. $y(x)$ is van klasse C^2, enz. $\square$

Meer algemeen vragen we ons af wanneer we in een stelsel vergelijkingen, bijv.

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

twee van de veranderlijken (lokaal) kunnen oplossen als functie van de derde veranderlijke, laat ons zeggen y en z als functie van x. (Meetkundig gezien bepaalt het stelsel nu een kromme in de drie-dimensionale ruimte, en we vragen ons af wanneer de veranderlijke x de parameter in een parametervoorstelling van de kromme kan zijn.)
Laat ons voor het gemak aannemen dat de oorsprong $\mathbf{0} = (0,0,0)$ op de kromme ligt. Omdat we aannemen dat f_1 en f_2 continu afleidbaar zijn, en afleidbaarheid betekent dat f_1 en f_2 goed benaderd kunnen worden door lineaire functies, bekijken we eerst het stelsel van de lineaire benaderingen in $\mathbf{0}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{0}) \cdot x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{0}) \cdot y + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{0}) \cdot z = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{0}) \cdot x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{0}) \cdot y + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(\mathbf{0}) \cdot z = 0 \end{cases}$$

Bij een gegeven vaste $x \in \mathbb{R}$ moeten we dus een lineair stelsel in y, z oplossen. Een voldoende voorwaarde dat dit stelsel een unieke oplossing heeft is dat

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{0}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(\mathbf{0}) \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{0}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(\mathbf{0}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

De algemene vorm van de stelling van de impliciete functies zegt dat dit ook een voldoende voorwaarde is voor het (uniek) oplosbaar zijn van het oorspronkelijk (niet-gelineariseerd) stelsel in functie van x in een omgeving van $\mathbf{0}$.
In het algemeen, voor een stelsel van m vergelijkingen in $n+m$ veranderlijken (dat we willen oplossen in functie van de eerste n veranderlijken) noteren we de optredende functies $f_1, \ldots, f_m$ vectorieel als $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ en noteren we de veranderlijken als $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Het stelsel

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2 \ldots, y_m) = 0 \\ \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

is dan

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

We noteren d.m.v. $D_1\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, resp. $D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, de Jacobiaanse matrix van de functie $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (bij vaste $\mathbf{y}$), resp. $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (bij vaste $\mathbf{x}$), m.a.w.

$$D_1\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

en

$$D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

2.2.5 Stelling (Stelling van de impliciete functies). *Zij* $\mathbf{f}$ *een functie* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *van de klasse* C^k *(*$k \geqslant 1$*) in een omgeving van* $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*. Als* $\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ *en* $\det(D_2\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})) \neq 0$*, dan geldt:*

1. *Er bestaan* $\delta > 0$ *en* $\varepsilon > 0$ *zo dat voor elke* $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta)$ *een unieke* $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{b},\varepsilon)$ *bestaat waarvoor*
$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}.$$
2. *De afbeelding* $\mathbf{y}\colon B(\mathbf{a},\delta) \to \mathbb{R}^m$ *is van de klasse* C^k*.*

De stelling van de impliciete functies speelt een belangrijke rol bij het ontwikkelen van de theorie van deelvariëteiten van $\mathbb{R}^n$ (cursus *Differentiaalmeetkunde*).
De partiële afgeleiden van $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vinden we opnieuw door de identiteit $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ impliciet af te leiden. Stellen we $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}\colon \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))$, dan is

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} D_1\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)} \quad \text{en} \quad D\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} I_{n\times n} \\ D\mathbf{y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times n}$$

(met $I_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de eenheidsmatrix) zodat (kettingregel)

$$D_1\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) + D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) \cdot D\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Omdat $\det(D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))) \neq 0$ in een omgeving van $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, besluiten we dat

$$\boxed{D\mathbf{y}(\mathbf{x}) = -(D_2\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})))^{-1} \cdot D_1\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))}.$$

Opnieuw geeft de notatie met afgeleiden als matrices/lineaire afbeeldingen een beknopte schrijfwijze die de analogie met het geval $m = n = 1$ duidelijk weergeeft.

2.3 Stelling van de inverse functies

Als toepassing van de stelling van de impliciete functies geven we een meerdimensionale veralgemening van de stelling i.v.m. afleidbaarheid van de inverse van een (inverteerbare) afleidbare functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uit *Analyse I*:[6]

Als $f'(a) \neq 0$, dan is de inverse f^{-1} afleidbaar in $f(a)$ en is $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

2.3.1 Definitie. Een C^k**-diffeomorfisme** van $G_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ op $G_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ (G_1 en G_2 open) is een bijectie $\mathbf{f}\colon G_1 \to G_2$ waarvoor zowel $\mathbf{f}$ als $\mathbf{f}^{-1}\colon G_2 \to G_1$ van de klasse C^k zijn.
Een $\mathbb{R}^n$-$\mathbb{R}^n$ functie $\mathbf{f}$ is een **lokaal** C^k**-diffeomorfisme** in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ als

1. $\mathbf{f}$ een bijectie is van een omgeving W_1 van $\mathbf{a}$ naar een omgeving W_2 van $\mathbf{f}(\mathbf{a})$[7]
2. $\mathbf{f}$ van de klasse C^k is op een (open)[8] omgeving U_1 van $\mathbf{a}$
3. $\mathbf{f}^{-1}$ van de klasse C^k is op een (open) omgeving U_2 van $\mathbf{f}(\mathbf{a})$.

2.3.2 Opmerking. Men kan aantonen dat men steeds $U_1 = W_1$ en $U_2 = W_2$ kan kiezen,[9] zodat $\mathbf{f}$ een lokaal C^k-diffeomorfisme is in $\mathbf{a}$ als en slechts als een open omgeving U van $\mathbf{a}$ en een open omgeving V van $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ bestaan zo dat $\mathbf{f}_{|U}\colon U \to V$ een C^k-diffeomorfisme is (stelling 2.3.B).

2.3.3 Stelling (Stelling van de inverse functies). *Zij* $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *een functie van klasse* C^k *(*$k \geqslant 1$*) in een omgeving van* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*.*
Als $\det(D\mathbf{f}(\mathbf{a})) \neq 0$*, dan geldt:*

1. $\mathbf{f}$ *is een lokaal* C^k*-diffeomorfisme in* $\mathbf{a}$*.*

2. $D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) = (D\mathbf{f}(\mathbf{a}))^{-1}$*.*

Bewijs. 1. We kunnen de inverse functie $\mathbf{f}^{-1}$ beschouwen als de functie die impliciet gedefinieerd wordt door de vergelijking $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Stel dus

$$\mathbf{F}:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n:\ \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}.$$

We gaan de voorwaarden van stelling 2.2.5 na: $D_2\mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{a}),\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ is inverteerbaar, en $\mathbf{F}$ is van de klasse C^k in een omgeving van $(\mathbf{f}(\mathbf{a}),\mathbf{a})$, omdat $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ constant zijn en

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_j}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y_j}(\mathbf{y}).$$

Wegens stelling 2.2.5 bestaan dus $\delta > 0$ en $\varepsilon > 0$ zo dat voor elke $\mathbf{x} \in U := B(\mathbf{f}(\mathbf{a}),\delta)$ een unieke $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{a},\varepsilon)$ bestaat waarvoor $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ en is $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ een C^k-afbeelding $U \to \mathbb{R}^n$. Dit toont aan dat $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ de inverse afbeelding is van de bijectie $\mathbf{f}\colon \mathbf{y}(U) \to U$.[10] (De afbeelding $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ is niet noodzakelijk surjectief op $B(\mathbf{a},\varepsilon)$.) We gaan na dat $\mathbf{y}(U)$ een omgeving is van $\mathbf{a}$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is, vinden we een $r \in \,]0,\varepsilon[$ met de eigenschap dat $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \in U$ voor elke $\boldsymbol{\xi} \in B(\mathbf{a},r)$. Dan is $B(\mathbf{a},r) \subseteq \mathbf{y}(U)$, want als $\boldsymbol{\xi} \in B(\mathbf{a},r)$, dan is $\boldsymbol{\xi}$ het unieke element $\mathbf{z} \in B(a,\varepsilon)$ waarvoor $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \in U$, m.a.w. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})) \in y(U)$.

[6] we zullen nu wel veronderstellen dat f minstens continu afleidbaar is in een omgeving van a

[7] W_1, W_2 zijn niet noodzakelijk open

[8] noodzakelijk open, want we hebben klasse C^k enkel gedefinieerd op open verzamelingen

[9] vergewis je ervan dat dat niet vanzelfsprekend kan!

[10] omdat $\mathbf{f}(\mathbf{y}(U)) = U$, is $\mathbf{f}\colon \mathbf{y}(U) \to U$ surjectief; ook is $\mathbf{f}$ injectief op $\mathbf{y}(U)$: als $\mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}_1)) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(\mathbf{x}_2))$ voor zekere $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, dan is $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, en dus ook $\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}(\mathbf{x}_2)$

2. Deze uitdrukking volgt door de gelijkheid $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ af te leiden in $\mathbf{a}$ en de kettingregel toe te passen. $\square$

2.3.A Eigenschap. *Zij $G \subseteq \mathbb{R}^n$ een open verzameling en $\mathbf{f}$ een continue afbeelding $G \to \mathbb{R}^m$. Als $U \subseteq \mathbb{R}^m$ open is, dan is ook $\mathbf{f}^{-1}(U) := \{\mathbf{x} \in G : \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n$ open.*

Bewijs. Kies willekeurig $\mathbf{a} \in \mathbf{f}^{-1}(U)$. Het volstaat aan te tonen dat $B(\mathbf{a}, \delta) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(U)$ voor zekere $\delta > 0$. Bij definitie is $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in U$. Omdat U open is, bestaat $\varepsilon > 0$ zo dat $B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon) \subseteq U$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is in $\mathbf{a}$, bestaat $\delta > 0$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon) \subseteq U$ voor elke $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta)$ (omdat G open is, behoort zulke $\mathbf{x}$ automatisch tot het domein van $\mathbf{f}$ als we $\delta > 0$ klein genoeg kiezen), d.w.z. dat $B(\mathbf{a}, \delta) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(U)$. $\square$

We kunnen nu de equivalente definitie 2.3.2 van lokaal C^k-diffeomorfisme aantonen:

2.3.B Stelling. *Als een functie $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lokaal C^k-diffeomorfisme is in $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, dan bestaan er een open omgeving U van $\mathbf{a}$ en een open omgeving V van $\mathbf{f}(\mathbf{a})$ zo dat $\mathbf{f}_{|U}\colon U \to V$ een C^k-diffeomorfisme is.*

Bewijs. Kies U_1, U_2, W_1, W_2 zoals in definitie 2.3.1. Kies $\varepsilon > 0$ zo dat $B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon) \subseteq U_2 \cap W_2$. Omdat $\mathbf{f}$ continu is in $\mathbf{a}$, vinden we $\delta > 0$ zo dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{f}(\mathbf{a}), \varepsilon)$ voor elke $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta) =: U$. Door $\delta > 0$ klein genoeg te kiezen, kunnen we er ook voor zorgen dat $B(\mathbf{a}, \delta) \subseteq U_1 \cap W_1$. Noem $\mathbf{g} := \mathbf{f}^{-1}{}_{|B(\mathbf{f}(\mathbf{a}),\varepsilon)}$. Omdat $\mathbf{f}(U)$ een deelverzameling van het domein van $\mathbf{g}$ is, is $\mathbf{f}(U) = \mathbf{g}^{-1}(U)$. Omdat $\mathbf{g}$ continu is, is $\mathbf{g}^{-1}(U)$ open (eigenschap 2.3.A). Er volgt dat $\mathbf{f}_{|U}\colon U \to \mathbf{f}(U)$ een C^k-diffeomorfisme is. $\square$

Tot slot geven we nog een aanvulling over vectorwaardige functies op compacte verzamelingen. We weten uit *Analyse I* dat de inverse van een continue strikt stijgende functie over een interval eveneens continu is. Hier volgt de versie voor een vectorfunctie in verschillende veranderlijken. Ons bewijs gebruikt daarbij *compactheid,* wat voor $n = 1$ niet het geval was. Ook is er natuurlijk geen sprake van 'stijgen' of 'dalen', want dat heeft geen betekenis voor functies van meerdere veranderlijken.

2.3.C Stelling. *Is $\mathbf{f} : K \to \mathbb{R}^m$ continu en injectief over de compacte verzameling $K \subset \mathbb{R}^n$, dan is haar inverse $\mathbf{f}^{-1} : \mathbf{f}(K) \to K$ eveneens continu en injectief over een compacte verzameling, nl. $\mathbf{f}(K)$.*

Bewijs. Zij $\mathbf{y}_0$ een willekeurig punt van $\mathbf{f}(K)$. We zullen het rijenkenmerk voor continuïteit van $\mathbf{f}^{-1}{}_{|\mathbf{f}(K)}$ in $\mathbf{y}_0$ gebruiken: *is $(\mathbf{y}_n)_n$ een willekeurige rij uit $\mathbf{f}(K)$ die naar $\mathbf{y}_0$ convergeert, dan $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_n) \to \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}_0)$.* Wegens de injectiviteit is $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ en $\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ voor unieke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ uit K. Het gegeven is dus, dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, en we moeten aantonen dat $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, m.a.w.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \implies \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon).$$

Als dat niet zo was, dan zou er een $\varepsilon_0 > 0$ bestaan met de eigenschap dat

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > N \,\&\, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_n\| \geqslant \varepsilon_0).$$

Bij $N = 1$ vinden we dan een $n_1 > 1$ met $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n_1}\| \geqslant \varepsilon_0$, bij $N = n_1$ een $n_2 > n_1$ met $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n_2}\| \geqslant \varepsilon_0$ enzovoort. Er ontstaat een deelrij $(\mathbf{x}_{n_k})_k$ van $(\mathbf{x}_n)_n$. Wegens K compact heeft die een deelrij $\mathbf{x}_{n_{k_l}} \to \boldsymbol{\xi} \in K$. Die limiet kan niets anders zijn dan $\mathbf{x}_0$. Inderdaad, door continuïteit volgt uit $\mathbf{x}_{n_{k_l}} \to \boldsymbol{\xi}$ dat $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_{k_l}}) \to \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})$. Maar uit het gegeven $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ volgt dat de deelrij $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n_{k_l}}))_l$ dezelfde limiet $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ heeft. Vandaar is $\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ en, door injectiviteit, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}_0$. We hebben dus $\mathbf{x}_{n_{k_l}} \to \mathbf{x}_0$, maar dat is in tegenspraak met het feit dat $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n_{k_l}}\| \geqslant \varepsilon_0$ voor alle l. $\square$

2.4 Oefeningen

1. In welke punten van $\mathbb{R}^{n+m}$ hebben de volgende vergelijkingen lokaal een unieke oplossing van de opgegeven m veranderlijken als functie van de andere n veranderlijken?

2. Bepaal een gelijkheid voor de partiële afgeleiden van deze functie van n veranderlijken door impliciet afleiden.

3. Bepaal de vergelijking van de raakruimte in een gegeven punt van $\mathbb{R}^{n+m}$ aan het oppervlak bepaald door de gegeven vergelijking(en).

   (a) $xy - \sin y = 0 \quad$ (y in functie van x).

   (b) $xy - \sin(y/x) = 0 \quad$ (x in functie van y).

   (c) $z^m + yz + x = 0$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$) $\quad$ (z in functie van (x, y)).

   (d) $ze^z = x - 2y \quad$ (z in functie van (x, y)).

   (e) $\begin{cases} y^z = x \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad$ ((y, z) in functie van x).

   (f) $\begin{cases} u^2 + v^2 + 2x = 0 \\ uv - y = 0 \end{cases} \quad$ ((u, v) in functie van (x, y)).