FACULTEIT WETENSCHAPPEN

Lineaire algebra en meetkunde I

Lenny Neyt en Andreas Weiermann

Bachelor of Science in de Wiskunde
2021–2022

UNIVERSITEIT GENT

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave iii

0 Inleiding: De vectorruimte $\mathbb{R}^n$ 1

1 Inleidende begrippen 5
- 1.1 Velden . . . 6
- 1.2 Veeltermen . . . 13
- 1.3 Matrices . . . 16
- 1.4 Stelsels van lineaire vergelijkingen . . . 22

2 Vectorruimten 33
- 2.1 Vectorruimten . . . 33
- 2.2 Basissen . . . 41
- 2.3 Som en directe som van vectorruimten . . . 47
- 2.4 Lineaire afbeeldingen en lineaire operatoren . . . 53
- 2.5 De rang van een matrix en stelsels van lineaire vergelijkingen . 62

3 Ruimten van homomorfismen 69
- 3.1 Ruimten van homomorfismen . . . 69

4 Matrices en determinanten 77
- 4.1 Coördinaten en matrixvoorstellingen van lineaire afbeeldingen 77
- 4.2 Coördinatentransformaties . . . 82
- 4.3 Determinanten . . . 85

5 Lineaire operatoren 97
- 5.1 De karakteristieke veelterm van een lineaire operator . . . 97
- 5.2 Eigenwaarden en eigenvectoren . . . 100
- 5.3 Diagonaliseren van operatoren . . . 103

6 Meetkundige transformaties 113
- 6.1 Meetkunde . . . 113

6.2 Het Euclidisch vlak en de Euclidische drie-dimensionale ruimte 114
6.3 Orthogonale matrices 121
6.4 Affiene transformaties van het vlak en de ruimte 123
6.5 Bewegingen 127
6.6 Het vectorieel product in $\mathbb{R}^3$ 138

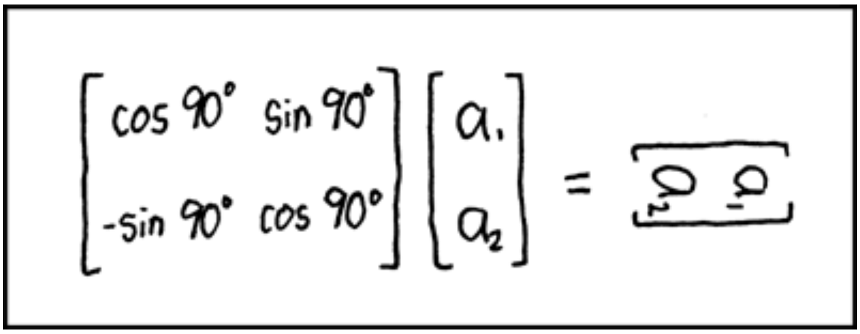
7 Algemene Inproduct-ruimten 147
7.1 Inproduct-ruimten 147
7.2 Orthogonaliteit 152
7.3 Hermitische en symmetrische operatoren 159
7.4 Lineaire groepen 161

8 Aanvullingen over lineaire operatoren en Dualiteit 165
8.1 De minimaalveelterm van een lineaire operator 165
8.2 De stelling van Cayley–Hamilton 167
8.3 Dualiteit 170

9 De algemene Euclidische ruimte $\mathbb{R}^n$ 175
9.1 Hoeken in een reële inproduct-ruimte 175
9.2 Affiene deelruimten in $\mathbb{R}^n$ 176
9.3 Hypervlakken in $\mathbb{R}^n$ 181
9.4 Toepassingen 183
9.5 De Euclidische groep $\mathsf{E}(n)$ 189

Index 191

Notaties 198



http://xkcd.com/184/

Hoofdstuk

2 Vectorruimten

2.1 Vectorruimten

We gaan nu van start met een algemene studie van vectorruimten. Onze definitie is geïnspireerd op de eigenschappen die we in Hoofdstuk 0 hebben vastgesteld voor $\mathbb{R}^n$ uitgerust met de optelling en de scalaire vermenigvuldiging.

Definitie 2.1.1. Een *vectorruimte over een veld* K (of een K*-vectorruimte*) is een verzameling V met twee bewerkingen: de optelling

$$V \times V \to V \colon (v, w) \mapsto v + w,$$

en de vermenigvuldiging met scalairen

$$K \times V \to V \colon (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

die aan de volgende eigenschappen voldoen:

(V1) Voor alle $v, w, u \in V$ is $(v + w) + u = v + (w + u)$.

(V2) Er bestaat een $0_V \in V$ zodat voor alle $v \in V$ geldt dat $v + 0_V = 0_V + v = v$.

(V3) Voor alle $v \in V$ bestaat er een element $w \in V$ zodat $v+w = w+v = 0_V$.

(V4) Voor alle $v, w \in V$ geldt dat $v + w = w + v$.

(V5) Voor alle $v \in V$ en alle $\lambda, \mu \in K$ geldt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

(V6) Voor alle $v \in V$ is $1v = v$ (hier is $1 \in K$ het neutraal element voor de vermenigvuldiging in K).

(V7) Voor alle $v, w \in V$ en alle $\lambda, \mu \in K$ is $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$ en $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$.

De eigenschappen (V1)–(V4) drukken uit dat V met als bewerking de optelling een abelse groep is.

Voorbeelden 2.1.2. (1) Zij K een willekeurig veld, en stel $V = \{0\}$. Dan vormt V, met als optelling $0 + 0 = 0$ en als scalaire vermenigvuldiging

$\lambda 0 = 0$ voor alle $\lambda \in K$, een vectorruimte over K. We noemen dit de *nulruimte* (over K).

(2) Het standaardvoorbeeld van een vectorruimte over een veld K is de *kolommenruimte*

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K \right\}$$

met de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging met scalairen

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

Merk op dat dit een rechtstreekse veralgemening is van de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ die we in Hoofdstuk 0 hebben ingevoerd. Het rekenen en redeneren in K^n verloopt dan ook geheel analoog als in $\mathbb{R}^n$.

(3) De verzameling van veeltermen in één variabele over een veld K,

$$K[x] := \left\{ \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mid d \in \mathbb{N}, a_i \in K \right\}$$

vormt een vectorruimte over K. (Ga dit zelf na als oefening.)

(4) Zij K een veld, en stel $V = M_{m,n}(K)$, de verzameling van $m \times n$-matrices, met de som en de scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie 1.3.4. Dan is V een vectorruimte over K; dit volgt uit Lemma 1.3.6(i) en (iii).

(5) Het veld K zelf is een K-vectorruimte met als scalaire vermenigvuldiging de vermenigvuldiging van K.

(6) Het volgend voorbeeld laat zien dat de elementen van een vectorruimte zelf "ingewikkeldere" objecten kunnen zijn. (Dit idee zal later ook van belang zijn als we ruimten van homomorfismen en duale ruimten zullen bespreken.)

Zij K een veld, zij X een niet-lege verzameling, en beschouw de nieuwe verzameling

$$\mathbf{F} := \{f \colon X \to K\}$$

van alle mogelijke functies van X naar K. We voorzien $\mathbf{F}$ met de bewerkingen "optelling" en "scalaire vermenigvuldiging" als volgt. Veronderstel dat f en g twee willekeurige elementen van $\mathbf{F}$ zijn, m.a.w. twee willekeurige functies van X naar K. Dan definiëren we een nieuwe functie $f + g\colon X \to K$ (en dus $f + g \in \mathbf{F}$) door het voorschrift

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{voor alle } x \in X.$$

Veronderstel nu dat f een willekeurig element van $\mathbf{F}$ is en $\lambda \in K$ een willekeurige scalair; dan definiëren we een nieuwe functie $\lambda f\colon X \to K$ (en dus $\lambda f \in \mathbf{F}$) door het voorschrift

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{voor alle } x \in X.$$

Deze bewerkingen maken van $\mathbf{F}$ een K-vectorruimte. Ga zelf na dat (V1)–(V7) inderdaad voldaan zijn. We merken op dat het element $0_{\mathbf{F}}$ dat nodig is in (V2) hier gegeven wordt door de nulafbeelding, i.e.

$$0_{\mathbf{F}}\colon X \to K\colon x \mapsto 0.$$

De volgende rekenregels in vectorruimten zullen we zeer vaak gebruiken:

Lemma 2.1.3. *Zij V een K-vectorruimte. We noteren het neutraal element voor de optelling in K met 0_K en het neutraal element voor de optelling in V met 0_V.*

(i) *Het neutraal element in V voor de optelling in V is uniek.*

(ii) *Elke $v \in V$ heeft een uniek tegengestelde voor de optelling; we noteren het als $-v$.*

(iii) *Voor alle $v \in V$ is $-(-v) = v$.*

(iv) *Voor alle $\lambda \in K$ is $\lambda 0_V = 0_V$.*

(v) *Voor alle $v \in V$ is $0_K v = 0_V$.*

(vi) *Voor alle $v \in V$ is $(-1)v = -v$. Bovendien geldt, voor alle $v \in V$ en $\lambda \in K$, dat*

$$(-\lambda)v = -(\lambda v) = \lambda(-v), \ \lambda v = (-\lambda)(-v), \ -(v + w) = -v + (-w).$$

(vii) *Als voor een $v \in V$ en $\lambda \in K$ geldt dat $\lambda v = 0$, dan is $\lambda = 0_K$ of $v = 0_V$.*

Bewijs. Oefening. (Dit wordt besproken in de oefeningenlessen.) □

Opmerking 2.1.4. (i) In het vorige lemma hebben we een verschillende notatie gebruikt voor $0_K \in K$ en $0_V \in V$. Vanaf nu zullen we deze twee nulelementen beide met 0 noteren; uit de context is het steeds duidelijk of er 0_K of 0_V bedoeld wordt.

(ii) We definiëren de aftrekking voor alle $v, w \in V$ als

$$v - w := v + (-w) = (-w) + v = -w + v.$$

Definitie 2.1.5. Een deelverzameling W van een K-vectorruimte V noemt men een *deelruimte* van V als W zelf een vectorruimte is voor de operaties van V; we noteren dit dan als $W \leq V$.

Opmerking 2.1.6. We benadrukken dat het symbool $\leq$ hier een notatie is, en niet zomaar mag gebruikt worden zoals we dit symbool zouden gebruiken voor getallen. In het bijzonder kunnen twee deelruimten $U \leq V$ en $W \leq V$ gerust tegelijk voldoen aan $U \not\leq W$ én $W \not\leq U$.

Het volgend criterium om na te gaan wanneer een deelverzameling een deelruimte is, is zeer eenvoudig maar zeer belangrijk.

Lemma 2.1.7. *Zij K een veld en V een K-vectorruimte, en zij $\emptyset \neq W \subseteq V$ een deelverzameling van V. Dan is W een deelruimte van V als en slechts als*

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$$

voor alle $w_1, w_2 \in W$ en voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

Bewijs. Veronderstel eerst dat W een deelruimte is van V. Dit betekent precies dat W een vectorruimte is, met als optelling de (restrictie van) de optelling op V en als scalaire vermenigvuldiging de (restrictie van) de scalaire vermenigvuldiging van V. Hieruit volgt dat als $w_1, w_2 \in W$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, het element $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ opnieuw in W zit.

Veronderstel omgekeerd dat W een deelverzameling is van V die voldoet aan de eigenschap dat $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$ voor alle $w_1, w_2 \in W$ en voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in K$.

We merken eerst op dat als we $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ kiezen, er volgt dat $w_1 + w_2 \in W$ voor alle $w_1, w_2 \in W$. Hieruit volgt dat de optelling een bewerking van $W \times W \to W$ is.

Als we nu $\lambda_2 = 0$ kiezen, volgt er dat $\lambda_1 w_1 \in W$ voor alle $\lambda_1 \in K$ en $w_1 \in W$. Hieruit volgt dat de scalaire vermenigvuldiging een bewerking van $K \times W \to W$ is.

We gaan na dat de eigenschappen van een vectorruimte in Definitie 2.1.1 voldaan zijn voor W, met als optelling de (restrictie van) de optelling op V en als scalaire vermenigvuldiging de (restrictie van) de scalaire vermenigvuldiging van V.

De eigenschappen (V1) en (V4)–(V7) gelden automatisch, want $W \subseteq V$. We verifiëren de twee resterende eigenschappen:

(V2) Als we $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ kiezen, volgt uit Lemma 2.1.3(v) dat $0w_1 + 0w_2 = 0 \in W$. Aangezien $W \subseteq V$ is ook $0 + w = w + 0 = w$ voor alle $w \in W$.

(V3) Uit Lemma 2.1.3(vi) volgt dat $v + (-1)v = 0$ voor alle $v \in V$. Stel nu dat $w \in W$, dan is $(-1)w \in W$ (stel $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = -1$). $\square$

Ga zelf aan de hand van het criterium in het voorgaande lemma na dat de volgende voorbeelden van deelruimten inderdaad deelruimten zijn.

Voorbeelden 2.1.8. (1) Zij V een K-vectorruimte. Dan is de nulruimte $\{0\} \subseteq V$ een deelruimte.

(2) Zij $1 \leq m \leq n$. De verzameling

$$\{(a_1, \ldots, a_n)^t \mid a_i \in K \text{ en } a_{m+1} = \cdots = a_n = 0\} \subseteq K^n$$

vormt een deelruimte van K^n.

(3) De verzameling P_d van veeltermen in $K[x]$ van graad $\leq d$, vormt een deelruimte van $K[x]$.

(4) De verzameling van continue functies op een interval,

$$\mathbf{C} := \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is een continue functie}\},$$

is een deelruimte van de $\mathbb{R}$-vectorruimte $\mathbf{F} = \{f \colon [a, b] \to \mathbb{R}\}$ van alle functies van $[a, b]$ naar $\mathbb{R}$.

Definitie 2.1.9. Zij V een K-vectorruimte en $S \subseteq V$ een deelverzameling. Een element $v \in V$ noemt men een *lineaire combinatie* van elementen van de verzameling S als v kan geschreven worden als

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

met $\lambda_i \in K$ en $v_i \in S$, voor $i = 1, \ldots, n$.

Merk op dat voor iedere $S \subseteq V$ het nulelement $0 \in V$ een lineaire combinatie van elementen van de verzameling S is, namelijk

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n.$$

Deze lineaire combinatie noemt men de *triviale lineaire combinatie* (van de elementen $v_1, \ldots, v_n$).

Voorbeeld 2.1.10. Zij $V = \mathbb{Q}^3$, en beschouw de elementen $v_1 = (1, 0, 0)^t$ en $v_2 = (3, 2, 0)^t$ in V. Dan is $(0, 1, 0)^t \in V$ wel een lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, v_2\}$, want

$$(0, 1, 0)^t = (-\tfrac{3}{2})\, v_1 + \tfrac{1}{2}\, v_2;$$

anderzijds is $(0,0,1)^t \in V$ geen lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, v_2\}$, want

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_2, 0)^t$$

heeft derde coördinaat gelijk aan 0 voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$, en kan dus nooit gelijk zijn aan $(0,0,1)^t$.

Opmerking 2.1.11. (i) We benadrukken nog eens dat een lineaire combinatie van elementen van S een *eindige* som is van elementen $\lambda_i v_i$, ook als S zelf oneindig is. We zullen geregeld een dergelijke lineaire combinatie schrijven als

$$\sum_{v \in S} \lambda_v v \tag{2.1}$$

waarbij slechts eindig veel van de λ_v verschillend van nul zijn; deze laatste voorwaarde is precies nodig om te garanderen dat er in (2.1) een eindige som staat.

(ii) We spreken vaak kortweg over "een lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$" of ook over "een lineaire combinatie van de verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$" in plaats van over "een lineaire combinatie van elementen van de verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$".

Definitie 2.1.12. Zij V een K-vectorruimte, en beschouw een deelverzameling $S \subseteq V$. We definiëren de verzameling $\operatorname{span}(S)$ als de verzameling bestaande uit alle lineaire combinaties van elementen van S, met andere woorden

$$\operatorname{span}(S) := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K, v_1, \ldots, v_k \in S\}.$$

We zeggen dat $\operatorname{span}(S)$ de deelruimte *voortgebracht door* S is.[1]

Lemma 2.1.13. *Zij V een K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$.*

(i) *De verzameling* $\operatorname{span}(S)$ *is een deelruimte van* V.

(ii) *Als* $S \subseteq T \subseteq V$, *dan is* $\operatorname{span}(S) \leq \operatorname{span}(T)$.

Bewijs. (i) Beschouw twee willekeurige elementen w_1 en w_2 in $\operatorname{span}(S)$ en twee willekeurige scalairen α en β in K. Dan is

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, \\ w_2 &= \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_\ell u_\ell, \end{aligned}$$

[1] We spreken af dat $\operatorname{span}(\emptyset) = \{0\}$.

voor zekere $\lambda_i, \mu_i \in K$ en $v_i, u_i \in S$, en dus

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha\lambda_k v_k + \beta\mu_1 u_1 + \cdots + \beta\mu_\ell u_\ell,$$

en dit heeft opnieuw de gedaante van een element in $\operatorname{span}(S)$. Uit Lemma 2.1.7 volgt dan dat $\operatorname{span}(S) \leq V$.

(ii) Het is evident dat elk element van $\operatorname{span}(S)$ ook in $\operatorname{span}(T)$ zit, dus $\operatorname{span}(S) \subseteq \operatorname{span}(T)$. Aangezien we reeds weten dat $\operatorname{span}(S)$ een deelruimte is van V, volgt hieruit dat $\operatorname{span}(S) \leq \operatorname{span}(T)$. □

Notatie 2.1.14. (i) We noteren de deelruimte $\operatorname{span}(S)$ ook met $\langle S \rangle$. Als $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$, dan schrijven we ook $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$ of $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ in plaats van $\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_k\})$ of $\langle \{v_1, \ldots, v_k\} \rangle$.

(ii) We noteren $\operatorname{span}(\{v\})$ ook als Kv, omdat elk element van $\operatorname{span}(\{v\})$ kan geschreven worden als λv met $\lambda \in K$.

Voorbeeld 2.1.15. Beschouw de vectorruimte K^3. Er geldt dat

$$\operatorname{span}(\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}) = K^3$$

en dat

$$\operatorname{span}(\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}) = \{(\alpha, \beta, 0)^t \mid \alpha, \beta \in K\} \leq K^3.$$

Definitie 2.1.16. Zij V een K-vectorruimte. Een deelverzameling $S \subseteq V$ noemen we een *voortbrengende verzameling* voor V als $\operatorname{span}(S) = V$. Met andere woorden, S is een voortbrengende verzameling voor V als elk element uit V een lineaire combinatie is van elementen uit S.

Voorbeeld 2.1.17. Beschouw de vectorruimte K^3. In het voorgaande voorbeeld hebben we aangetoond dat $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ een voortbrengende verzameling voor K^3 is. Ook

$$\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t, (1,1,1)^t\}$$

is een voortbrengende verzameling voor K^3. De verzameling $\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$ is echter geen voortbrengende verzameling voor K^3.

Definitie 2.1.18. Zij V een K-vectorruimte met $S \subseteq V$ een deelverzameling.

(i) We noemen de verzameling S *lineair afhankelijk* als er een eindige deelverzameling $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq S$ bestaat[2] waarvoor

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

met $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ waarbij $\lambda_i \neq 0$ voor minstens één $i \in \{1, \ldots, k\}$.

[2] Indien niet anders vermeld veronderstellen wij door de schrijfwijze $\{v_1, \ldots, v_k\}$ dat de vectoren $v_1, \ldots, v_k$ twee aan twee verschillend zijn.

(ii) Als een verzameling S niet lineair afhankelijk is, noemen we S *lineair onafhankelijk*. Anders gezegd, S is lineair onafhankelijk als voor elke eindige deelverzameling $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq S$ (met k verschillende elementen) het enkel mogelijk is dat

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0$$

met $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ als $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. Een eindige verzameling elementen is dus lineair onafhankelijk als en slechts als enkel de triviale lineaire combinatie van die elementen gelijk is aan 0.

Opmerking 2.1.19. (i) Ook hier zullen we vaak zeggen dat de elementen $v_1, \ldots, v_n$ lineair (on)afhankelijk zijn, in plaats van te zeggen dat de verzameling $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een lineair (on)afhankelijke verzameling is.

(ii) Om te bewijzen dat een deelverzameling $S \subseteq V$ lineair onafhankelijk is, zullen we vaak de volgende redenering maken:
We nemen aan dat er een lineaire combinatie $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ is met $v_1, \ldots, v_k$ willekeurige elementen van S en $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ willekeurige elementen in K, en we tonen aan dat hieruit volgt dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Voorbeelden 2.1.20. (1) Beschouw de vectorruimte K^n, en stel

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De deelverzameling

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset K^n$$

is een lineair onafhankelijke verzameling. Inderdaad, veronderstel dat $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ voor $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, dan volgt dat

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^t = (0, 0, \ldots, 0)^t$$

en dus is $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Merk op dat S ook een voortbrengende verzameling voor K^n is.

(2) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{Q}^3$, en stel

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dan is $S = \{u, v, w\} \subset \mathbb{Q}^3$ een lineair afhankelijke verzameling. Inderdaad, $-u + 2v - w = 0$, zodat we een niet-triviale lineaire combinatie vinden van $\{u, v, w\}$ die 0 is.

(3) Als $0 \in S \subseteq V$, dan is S lineair afhankelijk. We hebben immers dat $\lambda\, 0 = 0$ voor iedere $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

(4) Beschouw de K-vectorruimte K. Elke deelverzameling van K bestaande uit meer dan 1 element is lineair afhankelijk. Inderdaad, stel dat $a, b \neq 0$; dan is $a^{-1}a + (-b^{-1})b = 0$.

Lemma 2.1.21. *Zij V een K-vectorruimte.*

(i) *Zij $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$, en zij $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_n = 0$ een lineaire combinatie met $\lambda_i \neq 0$. Dan is v_i een lineaire combinatie van de overige $n-1$ elementen.*

(ii) *Twee elementen in V zijn lineair afhankelijk als en slechts als de ene een scalair veelvoud van de andere is.*

Bewijs. (i) We hebben namelijk dat $v_i = \sum_{j \neq i} -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} v_j$.

(ii) Noem de twee elementen v_1 en v_2. Als de ene een scalair veelvoud is van de andere, stel (zonder verlies van algemeenheid) $v_1 = \lambda v_2$ voor een zekere $\lambda \in K$, dan is $v_1 - \lambda v_2 = 0$ een niet-triviale lineaire combinatie die 0 is, en dus zijn v_1 en v_2 lineair afhankelijk.
Veronderstel omgekeerd dat v_1 en v_2 lineair afhankelijk zijn; dan is $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0$ voor zekere λ en μ die niet beide 0 zijn. Veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat $\lambda \neq 0$; dan is $v_1 = -\lambda^{-1}\mu v_2$, en dus is v_1 een scalair veelvoud van v_2. $\square$

2.2 Basissen

Nu we de noodzakelijke inleidende begrippen hebben ingevoerd, komen we tot het belangrijke concept van een basis van een vectorruimte.

Definitie 2.2.1. Zij V een K-vectorruimte. Een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ is een *basis* voor V als aan de twee volgende voorwaarden voldaan is:

(1) $\mathcal{B}$ is een voortbrengende verzameling,

(2) $\mathcal{B}$ is een lineair onafhankelijke verzameling.

Voorbeelden 2.2.2. (1) De verzameling $e_1, \dots, e_n \in K^n$, zoals gedefinieerd in Voorbeeld 2.1.20(1), is een basis voor K^n; we noemen dit de *standaardbasis* voor de vectorruimte K^n.

(2) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^2$. Dan is de verzameling $\{(1, \sqrt{2})^t, (\pi, 3)^t\}$ een basis voor $\mathbb{R}^2$.

(3) De vectorruimte K^n heeft steeds meerdere basissen (behalve als $|K| = 2$ en $n = 1$). Zo is bijvoorbeeld voor alle $\lambda \in K \setminus \{0\}$ de verzameling $\{\lambda e_1, \dots, \lambda e_n\}$ een basis voor K^n. Als K een oneindig veld is zijn er dus zelfs oneindig veel verschillende basissen.

(4) Beschouw de vectorruimte $V = K[x]$ van veeltermen in één variabele over een veld K. Dan vormt de verzameling $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ een basis voor V. De dimensie van V is in dit geval oneindig.

Opmerking 2.2.3. Als T een lineair onafhankelijke verzameling is in een vectorruimte V, dan is T een basis voor de deelruimte $\operatorname{span}(T) \leq V$. Inderdaad, T is nog steeds lineair onafhankelijk in $\operatorname{span}(T)$, en T is per definitie voortbrengend voor $\operatorname{span}(T)$.

Stelling 2.2.4. *Een deelverzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ is een basis voor V als en slechts als elk element $v \in V$ op unieke manier te schrijven is als een lineaire combinatie van de elementen uit $\mathcal{B}$.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat $\mathcal{B}$ een basis is. Zij $v \in V$ willekeurig. Omdat $\mathcal{B}$ voortbrengend is, kunnen we v schrijven als een lineaire combinatie

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}} \lambda_w w \,,$$

waarbij slechts eindig veel van de $\lambda_w \in K$ verschillend van nul zijn. Veronderstel dat we v op twee manieren kunnen schrijven als een dergelijke lineaire combinatie:

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}} \lambda_w w = \sum_{w \in \mathcal{B}} \mu_w w \,.$$

Dan is de eindige som

$$\sum_{w \in \mathcal{B}} (\lambda_w - \mu_w) w = 0 \,,$$

en uit het feit dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is, volgt dat $\lambda_w = \mu_w$ voor elke $w \in \mathcal{B}$. Dit bewijst de uniciteit.

Veronderstel nu omgekeerd dat elk element van V op unieke manier te schrijven is als een lineaire combinatie van de elementen van $\mathcal{B}$. Dan volgt reeds onmiddellijk dat $\mathcal{B}$ een voortbrengende verzameling is. We tonen nu aan dat $\mathcal{B}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. Veronderstel dat er een lineaire combinatie van verschillende elementen in $\mathcal{B}$ bestaat die nul geeft, stel

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \,.$$

Anderzijds is $0 \in V$ ook te schrijven als

$$0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n = 0\,;$$

uit de veronderstelde uniciteit volgt nu dat $\lambda_i = 0$ voor elke i, wat precies aantoont dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is. □

We zullen zien dat elke vectorruimte een basis heeft, en dat het aantal elementen van een basis uniek is (ook al is de basis zelf verre van uniek). Dit feit is van fundamenteel belang in de lineaire algebra, en heeft als gevolg dat we kunnen spreken van dimensies (zie Definitie 2.2.10 verderop).

Definitie 2.2.5. We noemen een K-vectorruimte V een *eindig-dimensionale vectorruimte* als V een eindige voortbrengende verzameling bevat. Een vectorruimte wordt *oneindig-dimensionaal* genoemd als ze niet eindig-dimensionaal is, i.e. als elke voortbrengende verzameling voor V oneindig is.

Het volgend lemma legt een verband tussen de grootte van voortbrengende verzamelingen en lineair onafhankelijke verzamelingen.

Lemma 2.2.6. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte met S een eindige voortbrengende verzameling, $|S| = n \in \mathbb{N}$. Dan heeft elke lineair onafhankelijke deelverzameling van V hoogstens n elementen.*

Bewijs. Zij $U \subseteq V$ met $|U| > n$, en beschouw $n+1$ verschillende elementen $w_1, \ldots, w_{n+1}$ in U. Zij $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Vermits $\operatorname{span}(S) = V$ geldt

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ &\vdots \\ w_{n+1} &= a_{n+1,1}v_1 + \cdots + a_{n+1,n}v_n . \end{aligned}$$

Beschouw het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{n+1,1}x_{n+1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_{n+1} = 0\,. \end{cases}$$

Aangezien het stelsel homogeen is, is $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 0$ een oplossing. We noteren de uitgebreide matrix van dit stelsel met $(A|0)$. Aangezien $A \in M_{n,n+1}(K)$ kunnen er maximaal n spilplaatsen zijn in de uitgebreide matrix. Uit Gevolg 1.4.14 volgt dat het aantal vrij te kiezen onbekenden steeds groter dan of gelijk aan $(n+1)-n = 1$ is. Bijgevolg heeft dit stelsel meer oplossingen dan enkel de oplossing $x_1 = \cdots = x_{n+1} = 0$.

Zij $x_1 = c_1, \ldots, x_{n+1} = c_{n+1}$ een oplossing met niet alle $c_i = 0$. Dan is

$$c_1 w_1 + \cdots + c_{n+1} w_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} c_i \Big) v_j = 0.$$

Er is dus een niet-triviale lineaire combinatie van iedere verzameling met $n+1$ elementen, of anders gezegd, elke deelverzameling van V met ten minste $n+1$ elementen is lineair afhankelijk. □

We kunnen nu het bestaan van basissen bewijzen, in de volgende sterke vorm.

Stelling 2.2.7. *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte. Zij T een lineair onafhankelijke deelverzameling van V en S een voortbrengende verzameling*[3] *die T bevat. Dan is er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

Bewijs. Het bewijs is constructief: we zullen de verzameling T aanvullen met elementen van S tot we een basis verkrijgen.

Indien de elementen van T voortbrengend zijn, is T reeds een basis, en hoeven we niks meer te bewijzen. Veronderstel dus dat T niet voortbrengend is; we beweren dat we een $v \in S \setminus T$ kunnen vinden zodat $T \cup \{v\}$ lineair onafhankelijk is.

Veronderstel dat dit niet zo is; dan is voor elke $v \in S \setminus T$ de verzameling $T \cup \{v\}$ lineair afhankelijk, zodat we een niet-triviale lineaire combinatie

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$$

vinden, met $v_1, \ldots, v_m \in T$ en $\lambda \neq 0$ (vermits $\{v_1, \ldots, v_m\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is). Uit Lemma 2.1.21(i) volgt dan dat $v \in \operatorname{span}(T)$, en aangezien $v \in S$ willekeurig was volgt hieruit dat $S \subseteq \operatorname{span}(T) \subseteq \operatorname{span}(S)$. Dit impliceert dat $\operatorname{span}(T) = \operatorname{span}(S) = V$, en dus zou T toch voortbrengend zijn, wat in strijd is met onze veronderstelling.

We kunnen dus T aanvullen met een $v \in S \setminus T$ zodat $T \cup \{v\}$ lineair onafhankelijk is. We herhalen nu deze procedure tot T voortbrengend is (en dus een basis); dit proces eindigt zeker, omdat wegens Lemma 2.2.6 een lineair onafhankelijke verzameling een begrensd aantal elementen bevat. □

Een onmiddellijk gevolg van voorgaande stelling zegt dat elke lineair onafhankelijke verzameling kan "aangevuld worden tot een basis", en dat elke voortbrengende verzameling kan "beperkt worden tot een basis". Dit is Gevolg 2.2.8.

[3] We eisen *niet* dat S zelf eindig is.

Gevolg 2.2.8. (i) *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $T \subseteq V$ een lineair onafhankelijke verzameling. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B}$.*

(ii) *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$ een voortbrengende verzameling. Dan bestaat er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $\mathcal{B} \subseteq S$.*

Bewijs. (i) Pas Stelling 2.2.7 toe met $S = V$ (V is immers een voortbrengende verzameling voor V).

(ii) Pas Stelling 2.2.7 toe met $T = \emptyset$ ($\emptyset$ is immers een lineair onafhankelijke verzameling van V). □

Gevolg 2.2.9. *Zij $V \neq \{0\}$ een eindig-dimensionale K-vectorruimte.*

(i) *Er is een basis in V.*

(ii) *Elke basis in V is eindig, en alle basissen hebben even veel elementen.*

Bewijs. (i) Dit volgt onmiddellijk uit Gevolg 2.2.8.

(ii) Als $\mathcal{B}$ een basis is volgt uit Lemma 2.2.6 dat $|\mathcal{B}|$ eindig is. Als $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ basissen zijn voor V dan volgt uit Lemma 2.2.6 zowel $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$ als $|\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$, dus $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. □

Definitie 2.2.10. Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte over een veld K. Het aantal elementen in een basis $\mathcal{B}$ voor V noemen we de *dimensie* van V; we noteren dit als $\dim V$, of ook als $\dim_K V$ als we het veld K expliciet willen vermelden. Als $\dim V = n$, dan noemen we V een *n-dimensionale* vectorruimte.

Opmerking 2.2.11. Per definitie nemen we aan dat de lege verzameling $\emptyset$ een basis is voor de nulruimte. Elke eindig-dimensionale vectorruimte heeft dan een basis, en een vectorruimte met dimensie 0 is dan de nulruimte.

Als we de dimensie van een vectorruimte V reeds kennen en we willen nagaan of een verzameling $\mathcal{B} \subseteq V$ een basis is, volstaat het om ofwel de lineair onafhankelijkheid, ofwel de voortbrengendheid, na te gaan, uiteraard op voorwaarde dat $\mathcal{B}$ het juiste aantal elementen bevat. Dit is Stelling 2.2.12.

Stelling 2.2.12. *Zij V een n-dimensionale K-vectorruimte, en zij $S \subseteq V$ een verzameling met precies n elementen.*

(i) *Als S lineair onafhankelijk is, dan is S een basis.*

(ii) *Als S voortbrengend is, dan is S een basis.*

Bewijs. (i) Veronderstel dat S lineair onafhankelijk is. We passen Gevolg 2.2.8(i) toe en vullen S aan tot een basis $\mathcal{B}$, dus $S \subseteq \mathcal{B}$. Omdat $\dim V = n$ is $|\mathcal{B}| = n = |S|$, maar dan moet $\mathcal{B} = S$.

(ii) Veronderstel dat S voortbrengend is. We passen Gevolg 2.2.8(ii) toe en beperken S tot een basis $\mathcal{B}$, dus $\mathcal{B} \subseteq S$. Omdat $\dim V = n$ is $|\mathcal{B}| = n = |S|$, maar dan moet $\mathcal{B} = S$. □

Stelling 2.2.7 en haar gevolgen blijven geldig voor oneindig-dimensionale vectorruimten, en hoewel de lineaire algebra die nodig is dezelfde is, wordt het bewijs ervan aanzienlijk moeilijker omwille van verzameling-theoretische complicaties. We verwijzen voor de wiskundigen naar de cursus "logica".

Stelling 2.2.13. *Zij V een oneindig-dimensionale K-vectorruimte.*

(i) *Zij T een lineair onafhankelijke deelverzameling van V en S een voortbrengende verzameling die T bevat. Dan is er een basis $\mathcal{B}$ voor V zodat $T \subseteq \mathcal{B} \subseteq S$.*

(ii) *Er is een basis in V.*

(iii) *Elke basis in V is oneindig, en alle basissen hebben even veel*[4] *elementen.*

Voorbeelden 2.2.14. (1) De nulruimte heeft dimensie 0. Een vectorruimte V niet gelijk aan de nulruimte heeft dimensie ≥ 1.

(2) De vectorruimte K^n heeft dimensie n.

(3) De K-vectorruimte $M_{m,n}(K)$ heeft dimensie mn. Immers, de matrices U_{ij} waarin er een 1 staat op de (i,j)-de plaats en waarvan alle andere componenten gelijk zijn aan nul, vormen een basis vermits elke matrix een unieke lineaire combinatie is van de U_{ij}'s:

$$A = (a_{ij}) = a_{11}U_{11} + \cdots + a_{mn}U_{mn} = \sum_{i,j} a_{ij}U_{ij} \,.$$

(4) Beschouw de vectorruimte $K[x]$ van de veeltermen in één variabele over een veld K. Zoals we gezien hebben in Voorbeeld 2.2.2(4) is de verzameling $\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}$ van alle machten van de variabele x een basis voor deze ruimte. Bijgevolg is $K[x]$ een oneindig-dimensionale vectorruimte over K. De deelruimte van veeltermen van graad $< d$ heeft dimensie d; de verzameling $\{1, x, x^2, \dots, x^{d-1}\}$ vormt een basis voor deze deelruimte.

[4] Met "even veel" bedoelen we hier dat de kardinaliteiten dezelfde zijn, of nog, dat er een bijectie bestaat tussen elke twee basissen. Dit is sterker dan de uitspraak dat de basissen oneindig groot zijn.

2.3 Som en directe som van vectorruimten

Als $\mathcal{B}$ een basis is voor de n-dimensionale vectorruimte V, dan is, per definitie, elk element van V op een unieke manier te schrijven als een som van elementen uit de 1-dimensionale deelruimten Kv met $v \in \mathcal{B}$. Men zegt dat de vectorruimte V ontbonden kan worden als directe som van de 1-dimensionale deelruimten Kv.

Definitie 2.3.1. Zij V een K-vectorruimte en zij $W_1, \dots, W_k \leq V$ deelruimten van V. De *som van de deelruimten* $W_1, \dots, W_k$ is gedefinieerd als

$$W_1 + \cdots + W_k := \left\{ \sum_{i=1}^{k} w_i \;\middle|\; w_i \in W_i \text{ voor alle } 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Als ieder element v van $W := W_1 + \cdots + W_k$ op een unieke manier te schrijven is als $v = \sum_{i=1}^{k} w_i$ met $w_i \in W_i$, dan zeggen we dat W een *directe som van deelruimten* is en noteren dit als

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k\,.$$

Merk op dat de (directe) som van een eindig aantal deelruimten van V opnieuw een deelruimte van V is. We noteren ook

$$\sum_{i=1}^{k} W_i := W_1 + \cdots + W_k \quad \text{en} \quad \bigoplus_{i=1}^{k} W_i := W_1 \oplus \cdots \oplus W_k.$$

Lemma 2.3.2. *Zij V een K-vectorruimte en W_1, W_2, W drie deelruimten van V. Dan is $W = W_1 \oplus W_2$ als en slechts als $W = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.*

Bewijs. Veronderstel eerst dat $W = W_1 \oplus W_2$; dan geldt per definitie reeds $W = W_1 + W_2$. Stel $w \in W_1 \cap W_2$; dan volgt uit $0 = 0 + 0 = w + (-w)$ dat $w = 0$, vermits de elementen van W maar op één manier te schrijven zijn als een som van een element uit W_1 en een element uit W_2.

Stel nu omgekeerd dat $W = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Er moet enkel nog aangetoond worden dat elk element van W niet op twee verschillende manieren te schrijven is als een som van elementen uit W_1 en W_2. Stel $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$ met $w_1, w_1' \in W_1$ en $w_2, w_2' \in W_2$. Dan is $w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dus $w_1 = w_1'$ en $w_2 = w_2'$. $\square$

Voorbeeld 2.3.3. Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{R}^3$, met deelruimten

$$W_1 = \langle (1,0,0)^t, (0,1,0)^t \rangle,$$

$$W_2 = \langle (1,2,3)^t, (2,3,4)^t \rangle,$$
$$W_3 = \langle (1,1,1)^t \rangle.$$

Dan is $V = W_1 + W_2$ en ook $V = W_1 + W_3$ maar $V \neq W_2 + W_3$. Bovendien is $V = W_1 \oplus W_3$, maar $V \neq W_1 \oplus W_2$ want $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.

Stelling 2.3.4. *Zij V een K-vectorruimte en W_1, W_2, W drie deelruimten van V zodat $W = W_1 \oplus W_2$.*

(i) *Als $\mathcal{B}_1$ een basis is voor W_1 en $\mathcal{B}_2$ een basis is voor W_2, dan is $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis voor W.*

(ii) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.

Bewijs. (i) We gaan na dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ een basis voor W is. We tonen eerst aan dat $\mathcal{B}$ voortbrengend is voor W. Zij $x \in W = W_1 \oplus W_2$, dan is $x = y_1 + y_2$ met $y_1 \in W_1$ en $y_2 \in W_2$. Aangezien y_1 een lineaire combinatie is van $\mathcal{B}_1$ en y_2 een lineaire combinatie is van $\mathcal{B}_2$, is $x = y_1 + y_2$ een lineaire combinatie van $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.
Vervolgens gaan we na dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is. Stel dat er een lineaire combinatie

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v + \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0.$$

Dan is

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v = -\sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_1 \cap W_2.$$

Maar aangezien $W_1 \cap W_2 = 0$ volgt dat $\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v = -\sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0$. Omdat $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijke verzamelingen zijn, zijn alle $\lambda_v = 0$ en alle $\mu_w = 0$. We concluderen dat $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is.

(ii) Dit volgt nu uit de definitie van dimensie omdat $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|$. □

We hebben ook een soort omgekeerde van Stelling 2.3.4, waarbij we een directe som verkrijgen door een basis "in twee stukken te splitsen":

Stelling 2.3.5. *Zij V een K-vectorruimte met basis $\mathcal{B}$, en veronderstel dat $\mathcal{B}$ de* disjuncte unie *is van $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$, i.e. $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ en $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$. Dan is $V = \operatorname{span}(\mathcal{B}_1) \oplus \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$.*

Bewijs. Stel $W_1 := \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$ en $W_2 := \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$; we zullen aantonen dat $V = W_1 + W_2$ en $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Om aan te tonen dat $V = W_1 + W_2$ beschouwen we een willekeurige $u \in V$. Aangezien $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ voortbrengend is voor V, kunnen we u schrijven als

$$u = \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v + \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w.$$

Stel dus $u_1 := \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v \in W_1$ en $u_2 := \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_2$; dan is $u = u_1 + u_2 \in W_1 + W_2$.

Om aan te tonen dat $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ onderstellen we dat $z \in W_1 \cap W_2$. Enerzijds is $z = \sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v \in W_1$, en anderzijds is $z = \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w \in W_2$. Bijgevolg is

$$\sum_{v \in \mathcal{B}_1} \lambda_v v - \sum_{w \in \mathcal{B}_2} \mu_w w = 0,$$

en aangezien $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijk is en $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$, kan dit enkel als alle λ_v en alle μ_w gelijk zijn aan 0, en dus $z = 0$. $\square$

Ook indien $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$, is het mogelijk om een formule af te leiden voor $\dim(W_1 + W_2)$. Deze formule staat bekend als de *dimensiestelling voor deelruimten* of de *dimensiestelling van Grassmann*[5] .

Stelling 2.3.6 (Dimensiestelling voor deelruimten)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte en W_1, W_2 twee deelruimten van V. Dan is*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Bewijs. We bewijzen dit door een basis van $W_1 + W_2$ op te stellen waaruit we de te bewijzen dimensie-formule kunnen aflezen. We noteren $n := \dim(W_1)$, $m := \dim(W_2)$ en $k := \dim(W_1 \cap W_2)$.

Zij $\mathcal{C} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ een basis van $W_1 \cap W_2$. Aangezien $\mathcal{C} \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$, volgt uit Gevolg 2.2.8(i) dat men $\mathcal{C}$ kan uitbreiden tot een basis $\mathcal{B}_1$ van W_1. We noteren $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}\}$. Op analoge manier kunnen we $\mathcal{C}$ ook uitbreiden tot een basis $\mathcal{B}_2$ van W_2, we noteren $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_k, z_1, \ldots, z_{m-k}\}$.

In de rest van dit bewijs tonen we aan dat

$$\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_{n-k}, z_1, \ldots, z_{m-k}\}$$

een basis is van $W_1 + W_2$.

[5]Hermann Günther Grassmann (1809–1877) was een Duitse polymath, die in zijn eigen tijd als taalkundige bekendstond, en nu vooral beroemd is omwille van zijn wiskundige bijdragen. Naast zijn werk als leraar middelbaar onderwijs was hij tevens natuurkundige, neohumanist en uitgever.

- We gaan na dat $\mathcal{B}$ een voortbrengende verzameling voor $W_1 + W_2$ is. We nemen een willekeurig element $x \in W_1 + W_2$, dus $x = y_1 + y_2$ met $y_1 \in W_1$ en $y_2 \in W_2$. Aangezien $\mathcal{B}_1$ voortbrengend is voor W_1, is $y_1 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_1)$; analoog is $y_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_2)$. Hieruit volgt dat $x = y_1 + y_2 \in \operatorname{span}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \operatorname{span}(\mathcal{B})$; we besluiten dat $\mathcal{B}$ voortbrengend is voor $W_1 + W_2$.
- We gaan na dat $\mathcal{B}$ een lineair onafhankelijke verzameling is. We stellen

  $$U_1 := \operatorname{span}(w_1, \dots, w_{n-k}) \le W_1 \quad \text{en} \quad U_2 := \operatorname{span}(z_1, \dots, z_{m-k}) \le W_2.$$

  Merk vooreerst op dat, wegens Stelling 2.3.5, uit de constructie van $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ volgt dat

  $$\begin{aligned} (W_1 \cap W_2) \cap U_1 = \{0\}, \\ (W_1 \cap W_2) \cap U_2 = \{0\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

  Stel nu dat

  $$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k} \\ + \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{m-k} z_{m-k} = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

  voor scalairen $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-k} \in K$, en stel

  $$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \in W_1 \cap W_2; \\ w &= \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-k} w_{n-k} \in U_1 \le W_1; \\ z &= \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{n-k} z_{m-k} \in U_2 \le W_2. \end{aligned}$$

  dan is $v + w + z = 0$, en dus $v + w = -z \in W_1 \cap W_2$, waaruit volgt dat $z \in (W_1 \cap W_2) \cap U_2$, en uit (2.2) volgt dat $z = 0$. Analoog is $w \in (W_1 \cap W_2) \cap U_1$, en opnieuw uit (2.2) volgt dat $w = 0$. Dus $v = w = z = 0$, en omdat zowel $\mathcal{B}_1$ als $\mathcal{B}_2$ lineair onafhankelijke verzamelingen zijn, kan dit enkel als alle coëfficiënten α_i, β_i en γ_i gelijk zijn aan 0.

We hebben aangetoond dat $\mathcal{B}$ een basis is van $W_1 + W_2$. Dit bewijst het gestelde, aangezien $|\mathcal{B}| = k + (n-k) + (m-k) = n + m - k$. □

Definitie 2.3.7. Zij V een K-vectorruimte en $W \le V$ een deelruimte. Een deelruimte $W' \le V$ is een *complement*[6] van W in V als $V = W \oplus W'$.

Merk op dat een complement van een deelruimte niet uniek bepaald is (zie Voorbeeld 2.3.9).

[6] Merk op dat dit *niet* het verzamelingtheoretische complement $V \setminus W$ is; dit laatste is zelfs geen deelruimte.

Lemma 2.3.8. *Zij W, U deelruimten van een K-vectorruimte V. Als $V = W + U$ dan bestaat er een deelruimte $Y \leq U$ zodat $V = W \oplus Y$. In het bijzonder heeft elke deelruimte $W \leq V$ een complement in V.*

Bewijs. Kies een basis $\mathcal{B}_W$ voor W en een basis $\mathcal{B}_U$ voor U. We passen Stelling 2.2.7 toe (of Stelling 2.2.13(i) indien V oneindig-dimensionaal is) met $T = \mathcal{B}_W$ en $S = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_U$, en vinden een basis voor V van de vorm $\mathcal{B}_W \cup \mathcal{C}$ met $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_U$. Neem $Y = \operatorname{span}(\mathcal{C})$, dan is $Y \leq U$ en elk element van V kan op een unieke manier geschreven worden als $w + y$ met $w \in W$ en $y \in Y$, dus $V = W \oplus Y$.

De laatste uitspraak volgt uit de eerste door $U = V$ te nemen. $\square$

Voorbeeld 2.3.9. Zij V de vectorruimte $V = \mathbb{R}^2$, en beschouw de volgende deelruimten van V:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_2 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \end{smallmatrix} \right) \mid b \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_3 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} c \\ c \end{smallmatrix} \right) \mid c \in \mathbb{R} \right\}; \\ W_4 &= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} d \\ 2d \end{smallmatrix} \right) \mid d \in \mathbb{R} \right\}; \end{aligned}$$

dan is elke W_i een complement van elke W_j met $j \neq i$. In het bijzonder zien we dat een complement van een deelruimte niet uniek bepaald is.

Tot nu toe hebben we het enkel gehad over de som en directe som van deelruimten van een vaste K-vectorruimte V. We definiëren nu de "uitwendige" directe som van een eindig aantal (verschillende) K-vectorruimten.

Definitie 2.3.10. Zij $W_1, \ldots, W_m$ vectorruimten over K. Definieer de verzameling

$$\bigoplus_{i=1}^{m} W_i = W_1 \oplus \cdots \oplus W_m = \left\{ (a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 \in W_1, \ldots, a_m \in W_m \right\}.$$

Definieer op $\bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ de volgende optelling en vermenigvuldiging met scalairen,

$$(a_1, \ldots, a_m) + (b_1, \ldots, b_m) = (a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m)$$

en

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_m) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m)$$

voor alle $a_i, b_i \in W_i$ en $\lambda \in K$.

We noemen $\bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ de *directe som* van de vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$.

Lemma 2.3.11. *Zij $W_1, \ldots, W_m$ vectorruimten over K. De verzameling $\bigoplus_{i=1}^m W_i$ met optelling en scalaire vermenigvuldiging zoals gedefinieerd in Definitie* 2.3.10*, is een K-vectorruimte.*

Bewijs. Oefening. $\square$

Opmerking 2.3.12. Wanneer de K-vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$ allemaal deelruimten zijn van een bepaalde vectorruimte V dan noemen we de directe som $\bigoplus_{i=1}^m W_i$, zoals gedefinieerd in Definitie 2.3.1, ook wel de *inwendige directe som*.

De directe som $\bigoplus_{i=1}^m W_i$ in Definitie 2.3.10 voor willekeurige K-vectorruimten $W_1, \ldots, W_m$ noemen we ook wel de *uitwendige directe som*.

Het volgende lemma toont aan dat een uitwendige directe som ook een inwendige directe som is zoals in Definitie 2.3.1.

Lemma 2.3.13. *Zij $W_1, \ldots, W_m$ vectorruimten over K, en stel $V = \bigoplus_{i=1}^m W_i$ de uitwendige directe som van $W_1, \ldots, W_m$. Dan is V de inwendige directe som van de vectorruimten*

$$W_i' = \{(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) \mid a_i \in W_i\},$$

i.e. $V = W_1' \oplus \cdots \oplus W_m'$.

Bewijs. Dit volgt uit het feit dat, voor alle $(a_1, \ldots, a_m) \in \bigoplus_{i=1}^m W_i$,

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m) = (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, a_m)$$

de unieke manier is om $(a_1, \ldots, a_m)$ te schrijven als som van elementen uit $W_1', \ldots, W_m'$. $\square$

Opmerking 2.3.14. Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we dat Definitie 2.3.10 als volgt kan veralgemeend worden naar een oneindig aantal vectorruimten. Zij I een verzameling die de rol speelt van *indexverzameling*, d.w.z. dat we de elementen gebruiken om objecten te nummeren. Typische voorbeelden zijn $I = \{1, \ldots, n\}$ of $I = \mathbb{N}$. Zij $\{W_i\}_{i \in I}$ een familie van K-vectorruimten, i.e. voor elke $i \in I$ is een K-vectorruimte W_i gegeven. Een element dat we verkrijgen door uit elke W_i een element a_i te kiezen[7], noteren we als $(a_i)_{i \in I}$. De verzameling

$$\prod_{i \in I} W_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in W_i\}$$

[7] Formeel betekent dit "kiezen" dat we een afbeelding $a \colon I \to \bigcup_{i \in I} W_i$ beschouwen zodat $a(i) \in W_i$ voor alle $i \in I$.

met daarop de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging met scalairen,

$$(a_i)_{i\in I} + (b_i)_{i\in I} = (a_i + b_i)_{i\in I}, \quad \lambda(a_i)_{i\in I} = (\lambda a_i)_{i\in I},$$

noemt men het *direct product* van de familie $\{W_i\}_{i\in I}$. Men verifieert dat $\prod_{i\in I} W_i$ een K-vectorruimte is.

De verzameling

$$\bigoplus_{i\in I} W_i = \Big\{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i \mid \text{bijna alle } a_i = 0\Big\},$$

noemt men de *(uitwendige) directe som* van de familie $\{W_i\}_{i\in I}$. (Met *bijna alle* wordt bedoeld: alle op een eindig aantal na.) De verzameling $\bigoplus_{i\in I} W_i$ is een deelruimte van $\prod_{i\in I} W_i$.

Voor eindige families $\{W_i\}_{i\in I}$ geldt $\prod_{i\in I} W_i = \bigoplus_{i\in I} W_i$, en vinden we onze oorspronkelijke Definitie 2.3.10 terug.

2.4 Lineaire afbeeldingen en lineaire operatoren

Voor we de definitie geven van een lineaire afbeelding tussen twee vectorruimten, voeren we eerst nog enkele begrippen in in verband met afbeeldingen tussen twee verzamelingen.

Definitie 2.4.1. Zij A en B twee verzamelingen.

(i) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $C \subseteq A$. We noteren

$$f(C) := \{f(c) \mid c \in C\} \subseteq B.$$

(ii) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $D \subseteq B$. Het *inverse beeld* van D is de verzameling van alle elementen in A die op een element in D afgebeeld worden. We noteren[8]

$$f^{-1}(D) := \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subseteq A.$$

(iii) Zij $f\colon A \to B$ een afbeelding, en zij $C \subseteq A$. Dan is $C \to B\colon c \mapsto f(c)$ ook een afbeelding; we noemen deze afbeelding de *restrictie* van f tot C. We noteren deze afbeelding met

$$f|_C\colon C \to B\colon c \mapsto f(c).$$

[8] Opgelet, f^{-1} is géén afbeelding van B naar A, want een element van B wordt afgebeeld op een *deelverzameling* van A, die niet noodzakelijk uit 1 element bestaat. Zie echter anderzijds Definitie 3.1.11 verderop.

(iv) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *injectief* genoemd, indien elk element van B hoogstens één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $a, a' \in A$ geldt dat

$$f(a) = f(a') \implies a = a';$$

we noemen f dan een *injectie* van A naar (of in) B.

(v) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *surjectief* genoemd, indien elk element van B minstens één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $b \in B$ geldt:

$$\text{er bestaat een } a \in A \text{ zodat } f(a) = b.$$

we noemen f dan een *surjectie* van A naar (of op) B.

(vi) Een afbeelding $f\colon A \to B$ wordt *bijectief* genoemd, indien elk element van B juist één maal bereikt wordt door f, of nog, indien voor alle $b \in B$ geldt:

$$\text{er bestaat juist één } a \in A \text{ zodat } f(a) = b.$$

we noemen f dan een *bijectie* van A naar B (of tussen A en B).

Opmerking 2.4.2. Beschouw twee afbeeldingen $f\colon A \to B$ en $g\colon A \to B$. Dan geldt:

$$f = g \iff f(a) = g(a) \text{ voor alle } a \in A.$$

Lemma 2.4.3. (i) *Een afbeelding $f\colon A \to B$ is bijectief dan en slechts dan als ze injectief én surjectief is.*

(ii) *Als f een bijectie is van A naar B, dan is $|A| = |B|$, d.w.z. A en B hebben even veel elementen.*

Bewijs. Dit volgt rechtstreeks uit de definities. □

Verder in deze paragraaf bestuderen we een bepaald type afbeeldingen tussen twee vectorruimten.

Definitie 2.4.4. Zij V en W twee vectorruimten over het veld K.

(i) Een afbeelding $f\colon V \to W$ is een *lineaire afbeelding* als

$$f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2)$$

voor alle $\lambda, \mu \in K$ en alle $v_1, v_2 \in V$. Merk op dat in de bovenstaande identiteit de eerste + de optelling is in de vectorruimte V en dat de tweede + de optelling is in de vectorruimte W; een gelijkaardige opmerking geldt voor de scalaire vermenigvuldiging.

Een lineaire afbeelding wordt ook een *morfisme* van vectorruimten genoemd.

(ii) Een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ van een vectorruimte V naar zichzelf noemen we een *lineaire operator* op V, of ook soms een *endomorfisme* van V.

Opmerking 2.4.5. (i) Een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$ zet lineaire combinaties om in lineaire combinaties. Inderdaad,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

voor alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ en $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$.

(ii) Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en zij $U \leq V$ een deelvectorruimte. Dan is de restrictie $f|_U\colon U \to W$ ook een lineaire afbeelding.

(iii) Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $f(0_V) = 0_W$. Inderdaad, beschouw de nulelementen $0_V \in V$, $0_W \in W$ en ook $0_K \in K$; uit de lineariteit van f volgt dan dat $f(0_V) = f(0_K 0_V) = 0_K f(0_V) = 0_W$.

Voorbeelden 2.4.6. (1) Zij V en W twee K-vectorruimten. De *nulafbeelding* $0\colon V \to W\colon v \mapsto 0_W$ is een lineaire afbeelding.

(2) Zij V een K-vectorruimte. De *identieke afbeelding* $\mathbf{1}_V\colon V \to V\colon v \mapsto v$ is een lineaire operator. We noteren deze afbeelding ook als $\mathbf{1}$, en ook soms wel als id_V of id.

(3) Zij K een veld en $V = K^n$, $W = K^m$. De linkse vermenigvuldiging met een matrix $A \in M_{m,n}(K)$ is een lineaire afbeelding van V naar W. We noteren deze met

$$L_A\colon K^n \to K^m\colon v \mapsto Av.$$

We verifiëren dat dit een lineaire afbeelding is; we maken gebruik van Lemma 1.3.6:

$$L_A(\lambda v + \mu w) = A(\lambda v + \mu w) = \lambda Av + \mu Aw = \lambda L_A(v) + \mu L_A(w),$$

voor alle $v, w \in K^n$, $\lambda, \mu \in K$. We zullen verder zien dat elke lineaire afbeelding tussen eindig-dimensionale vectorruimten in zekere zin overeenkomt met de linkse vermenigvuldiging met een matrix (zie Stelling 4.1.8).

(4) Zij $P_n \leq K[x]$, de vectorruimte van de veeltermen van graad $\leq n$. De *afleiding*

$$\frac{d}{dx}\colon P_n \to P_{n-1}\colon f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \frac{df}{dx} = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i x^{i-1},$$

is een lineaire afbeelding. De afbeelding $\frac{d}{dx}\colon K[x] \to K[x]$ is een lineaire operator op de vectorruimte $K[x]$.

(5) Zij $V = K^n$. De afbeelding

$$S\colon (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t \mapsto (0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})^t$$

is een lineaire operator op V. We noemen deze afbeelding de *shiftoperator.*

(6) Stel dat $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ voor deelruimten $W_i \leq V$. Dan is de afbeelding

$$p_i\colon V \to W_i\colon v = w_1 + \cdots + w_k \mapsto w_i \quad \text{met } w_i \in W_i,$$

voor iedere $1 \leq i \leq k$ een lineaire afbeelding. Bemerk dat $v \in V$ op een unieke manier geschreven kan worden als $v = w_1 + \cdots + w_k$ met $w_i \in W_i$, aangezien V een directe som is.

Voorbeeld 2.4.6(6) is een voorbeeld van een projectie-operator:

Definitie 2.4.7. Een lineaire operator $p\colon V \to V$ op een K-vectorruimte V noemt men een *projectie-operator* of kortweg een *projectie* als $p(p(v)) = p(v)$ voor alle $v \in V$.

We voeren nu de belangrijke concepten van het beeld en de kern van een lineaire afbeelding in.

Definitie 2.4.8. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding tussen twee willekeurige K-vectorruimten; dan is de *kern* van f de deelverzameling

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

van V. Het *beeld* van f definiëren we als de deelverzameling

$$\operatorname{im} f := f(V) := \{f(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V\colon f(v) = w\}$$

van W.

Lemma 2.4.9. *Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is $\ker f \leq V$ een deelruimte van V en $\operatorname{im} f \leq W$ een deelruimte van W.*

Bewijs. We gebruiken Lemma 2.1.7. Als $\lambda, \mu \in K$ en $v, v' \in \ker f$, dan moeten we aantonen dat $\lambda v + \mu v' \in \ker f$. Dit is zo, aangezien

$$f(\lambda v + \mu v') = \lambda f(v) + \mu f(v') = 0 + 0 = 0\,.$$

Als $w, w' \in \operatorname{im} f$ dan bestaan er elementen $v, v' \in V$ zodat $f(v) = w$ en $f(v') = w'$. Er geldt

$$\lambda w + \mu w' = \lambda f(v) + \mu f(v') = f(\lambda v + \mu v') \in \operatorname{im} f\,,$$

waaruit volgt dat $\operatorname{im} f$ een deelruimte is van W. □

Voorbeeld 2.4.10. (1) Zij $V = K^n$, met standaardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$, en beschouw de shiftoperator $S\colon V \to V$ uit Voorbeeld 2.4.6(5). Dan is $\operatorname{im} S = \langle e_2, \ldots, e_n \rangle$, terwijl $\ker S = \langle e_n \rangle$.

(2) Zij $V = \mathbb{Q}^2$ en $W = \mathbb{Q}^3$, en beschouw de lineaire afbeelding f die gegeven wordt door linkse vermenigvuldiging met de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dan is $\operatorname{im} f = \langle (1, 2, 3)^t \rangle \leq W$, terwijl $\ker f = \langle (2, -1)^t \rangle \leq V$.

Lemma 2.4.11. *Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt:*

(i) *f is injectief als en slechts als* $\ker f = \{0\}$.

(ii) *f is surjectief als en slechts als* $\operatorname{im} f = W$.

Bewijs. (i) Dat de kern van een injectieve afbeelding gelijk is aan de nulruimte volgt onmiddellijk uit de definities van injectiviteit en kern. Onderstel omgekeerd dat $\ker f = \{0\}$. Uit $f(v) = f(w)$ volgt dat $f(v - w) = 0$, dus $v - w \in \ker f$ maar dan is $v - w = 0$, i.e. $v = w$.

(ii) Dit volgt onmiddellijk uit de definities van surjectiviteit en beeld. □

Lemma 2.4.12. *Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en zij $U \leq V$ een deelruimte. Beschouw de restrictie $f|_U$ van f tot U. Dan is*

$$\ker f|_U = \ker f \cap U \quad \textit{en} \quad \operatorname{im} f|_U \leq \operatorname{im} f.$$

Bewijs. Oefening. □

Om een lineaire afbeelding volledig te beschrijven is het voldoende om het beeld van de basiselementen te geven.

Lemma 2.4.13. *Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $\mathcal{B}$ een basis voor V. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt:*

(i) *f is volledig bepaald door de beelden van de basiselementen $f(b)$ voor alle $b \in \mathcal{B}$;*

(ii) $\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\bigl(\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}\bigr)$.

Bewijs. (i) Stel dat het beeld $f(b)$ gekend is voor elk element $b \in \mathcal{B}$. Elk element $v \in V$ is op unieke wijze te schrijven als een lineaire combinatie

$\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b b$, $\lambda_b \in K$, met bijna alle $\lambda_b = 0$. Aangezien f lineair is, volgt dat

$$f(v) = \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b)\,. \tag{2.4}$$

We hebben het beeld van een willekeurig element van V bepaald, dus f is volledig bepaald.

(ii) Uit de gelijkheid (2.4) halen we dat

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\} &= \{\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b) \mid \lambda_b \in K,\ \text{bijna alle } \lambda_b = 0\} \\ &= \operatorname{span}\bigl(\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}\bigr). \end{aligned}$$ □

De volgende observatie is heel nuttig.

Stelling 2.4.14. *Zij V, W twee K-vectorruimten, zij $\mathcal{B}$ een basis voor V, en zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt:*

(i) *f is injectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een lineair onafhankelijke verzameling is in W waarbij de elementen $f(b)$ twee aan twee verschillend zijn van elkaar*[9]*;*

(ii) *f is surjectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een voortbrengende verzameling is in W;*

(iii) *f is bijectief als en slechts als $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een basis is in W waarbij de elementen $f(b)$ twee aan twee verschillend zijn van elkaar.*

Bewijs. Om de injectiviteit resp. surjectiviteit van f uit te drukken, maken we gebruik van Lemmas 2.4.11 en 2.4.13(ii).

(i) Onderstel eerst dat f een injectieve afbeelding is. Per definitie van injectiviteit zijn de elementen $f(b)$ dan twee aan twee verschillend van elkaar. Veronderstel nu dat $\sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b f(b) = 0$ een lineaire combinatie is van $f(b)$'s (met dus slechts eindig veel λ_b's verschillend van 0) die gelijk is aan 0. Dan is $f\bigl(\sum \lambda_b b\bigr) = \sum \lambda_b f(b) = 0$, en dus is $\sum \lambda_b b = 0$ omdat $\ker(f) = \{0\}$. Aangezien $\mathcal{B}$ lineair onafhankelijk is, impliceert dit dat $\lambda_b = 0$ voor alle $b \in \mathcal{B}$. We besluiten dat de $f(b)$'s lineair onafhankelijk zijn.

Omgekeerd, onderstel dat de $f(b)$'s twee aan twee verschillend en lineair onafhankelijk zijn; we zullen aantonen dat $\ker(f) = \{0\}$. Beschouw dus

[9] We hadden dit ook kunnen formuleren door te zeggen dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een lineair onafhankelijk *stel* is in W, maar we hebben het gebruik van stellen (i.e. verzamelingen waarin eenzelfde element meerdere malen kan optreden) bewust vermeden in deze cursus.

een element $v \in V$ met $f(v) = 0$, en schrijf $v = \sum \lambda_b b$ (waarbij de som slechts eindig veel niet-nul termen heeft). Uit $f\big(\sum \lambda_b b\big) = 0$ volgt $\sum \lambda_b f(b) = 0$. Dit impliceert dat $\lambda_b = 0$ voor alle $b \in \mathcal{B}$, en dus is $v = 0$. Hieruit volgt dat $\ker(f) = \{0\}$; de afbeelding f is dus injectief.

(ii) Onderstel eerst dat f surjectief is; dan is $W = \operatorname{im}(f) = \operatorname{span}\big(\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}\big)$. Bijgevolg kunnen we ieder element uit W schrijven als een lineaire combinatie van $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$.

Omgekeerd, onderstel dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een voortbrengende verzameling voor W is. Dan is $W = \operatorname{span}\big(\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}\big)$. Opnieuw uit Lemma 2.4.13(ii) volgt dan dat $W = \operatorname{im}(f)$, met andere woorden, f is surjectief.

(iii) Dit volgt uit (i) en (ii). □

Voorbeeld 2.4.15. Zij $K = \mathbb{R}$, en beschouw de afleiding $f = d/dx$ op de vectorruimte P_n uit Voorbeeld 2.4.6(4) hierboven. Als basis voor P_n kiezen we bijvoorbeeld $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, terwijl een basis voor P_{n-1} bijvoorbeeld gegeven wordt door $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$. We bekijken nu de beelden van de basisvectoren, en we vinden

$$f(1) = 0,\ f(x) = 1,\ f(x^2) = 2x,\ \ldots,\ f(x^n) = nx^{n-1}.$$

We stellen vast dat de verzameling $\{f(1), \ldots, f(x^n)\}$ lineair afhankelijk is, want het bevat het element 0; hieruit volgt reeds dat f niet injectief is. Anderzijds kunnen we elk element van P_{n-1} schrijven als

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = a_0 \cdot 1 + \frac{a_1}{2} \cdot 2x + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} \cdot nx^{n-1},$$

zodat de verzameling $\{f(1), \ldots, f(x^n)\}$ wel voortbrengend is; hieruit volgt dat f surjectief is.

Definitie 2.4.16. (i) Een bijectieve lineaire afbeelding tussen twee K-vectorruimten noemen we een *isomorfisme*.

(ii) Als er tussen twee K-vectorruimten een bijectieve lineaire afbeelding bestaat dan zeggen we dat de vectorruimten *isomorf* zijn. Als twee K-vectorruimten V en W isomorf zijn, noteren we dit met $V \cong W$.

(iii) Een *automorfisme* van V is een isomorfisme van V naar zichzelf.

Voorbeeld 2.4.17. (1) Zij K een veld, en V een willekeurige K-vectorruimte. De identieke afbeelding $\mathbf{1}_V$ op V is een automorfisme van V.

(2) Zij K een veld, en $V = K^n$. Beschouw de afbeelding

$$f\colon V \to V\colon (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)^t \mapsto (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1)^t.$$

Dan is f een automorfisme van V.

(3) De shiftoperator uit Voorbeeld 2.4.6(5) is geen automorfisme van V.

(4) Zij K een veld, en stel $V = K^n$ en $W = K^m$ voor zekere n, m. Dan is $V \cong W$ als en slechts als $n = m$. (Zie ook Gevolg 2.4.18.)

(5) Zij K een veld. Dan is $K^n \oplus K^m \cong K^{n+m}$ voor alle n, m.

Gevolg 2.4.18. *Twee K-vectorruimten zijn isomorf als en slechts als ze dezelfde dimensie hebben.*

Bewijs. Zij V en W twee K-vectorruimten, en zij $\mathcal{B}$ een basis van V.

Stel eerst dat $f\colon V \to W$ een isomorfisme is. Uit Stelling 2.4.14(iii) volgt dat $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ een basis van W is, waarbij de elementen $f(b)$ twee aan twee verschillend zijn van elkaar. Bijgevolg hebben de basissen van V en W even veel elementen.

Omgekeerd, stel dat V en W dezelfde dimensie hebben. Kies dan basissen $\mathcal{B}$ voor V en $\mathcal{C}$ voor W. Omdat V en W dezelfde dimensie hebben, bestaat er een bijectie $\beta\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Definieer

$$f\colon V \to W\colon \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b \mapsto \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b \beta(b);$$

dan is f een lineaire afbeelding, en $\{f(b) \mid b \in \mathcal{B}\} = \mathcal{C}$. Uit Stelling 2.4.14(iii) volgt nu dat f een bijectie is, en bijgevolg een isomorfisme is. □

Gevolg 2.4.19. *Zij K een veld, en zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte. Stel $n = \dim_K(V)$. Dan is V isomorf met de K-vectorruimte K^n.*

Bewijs. Dit is een triviaal gevolg van Gevolg 2.4.18. □

De volgende stelling geeft een verband tussen de dimensie van het beeld $\operatorname{im} f$ en de dimensie van de kern $\ker f$ van een willekeurige lineaire afbeelding f (vertrekkend uit een eindig-dimensionale vectorruimte).

Stelling 2.4.20 (Dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, W een willekeurige K-vectorruimte, en $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan is*

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f\,.$$

Bewijs. Kies een basis $\{b_1, \dots, b_k\}$ voor de deelruimte $\ker f$, dus $k = \dim \ker f$. Uit Gevolg 2.2.8(i) volgt dat we deze basis kunnen uitbreiden tot een basis $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ voor V. Stel $U = \operatorname{span}(b_{k+1}, \dots, b_n)$. Uit Stelling 2.3.5 halen we dan dat $V = \ker f \oplus U$.

Uit Lemmas 2.4.11 en 2.4.12 volgt dat de restrictie $f|_U \colon U \to W$ een injectieve afbeelding is. Aangezien U een complement van $\ker f$ is, volgt er dat $\operatorname{im} f|_U = \operatorname{im} f$.

Dit impliceert dat $f|_U$ een isomorfisme is tussen U en $\operatorname{im} f$. Wegens Gevolg 2.4.18 is dan $\dim \operatorname{im} f = \dim U$. Vermits $\dim V = \dim \ker f + \dim U$ volgt het resultaat. $\square$

De volgende stelling is zeer belangrijk voor lineaire operatoren op eindig-dimensionale vectorruimten.

Gevolg 2.4.21 (Alternatief-stelling)**.** *Zij V een eindig-dimensionale K-vectorruimte, en zij $f \colon V \to V$ een lineaire operator op V. De volgende eigenschappen zijn equivalent*[10]*:*

(a) *f is injectief;*

(b) *f is surjectief;*

(c) *f is bijectief.*

Bewijs. We bewijzen iets algemener dat, als $f \colon V \to W$ een lineaire afbeelding is tussen twee eindig-dimensionale vectorruimten V en W die *dezelfde dimensie* hebben, de drie uitspraken (a), (b) en (c) equivalent zijn. Merk op dat (c) equivalent is met "(a) en (b)", dus het volstaat te bewijzen dat (a) $\iff$ (b). Inderdaad, gebruik makend van de Dimensiestelling 2.4.20 vinden we:

$$\begin{aligned}
f \text{ injectief} &\iff \ker f = \{0\} \\
&\iff \dim \ker f = 0 \\
&\iff \dim V = \dim \operatorname{im} f \\
&\iff \dim W = \dim \operatorname{im} f \\
&\iff \operatorname{im} f = W \\
&\iff f \text{ surjectief.}
\end{aligned}$$ $\square$

Opmerking 2.4.22. We benadrukken dat de alternatief-stelling gaat over lineaire *operatoren*, en niet over lineaire afbeeldingen in het algemeen.

Voorbeeld 2.4.23. (1) Beschouw $f \colon V \to W$ zoals in Voorbeeld 2.4.10(2). Dan is $\dim \ker f = 1$ en $\dim \operatorname{im} f = 1$, zodat $\dim V = 2$ inderdaad gelijk is aan $\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

[10] Het *equivalent* zijn van eigenschappen betekent dat *indien* één van de eigenschappen geldt, *dan* ook de andere gelden. In dit geval zegt de stelling dus dat, *indien* f injectief is, ze dan automatisch ook surjectief (en dus bijectief) is, en omgekeerd, *indien* f surjectief is, ze dan ook injectief (en dus bijectief) is. De stelling zegt dus zeker niet dat elke lineaire operator injectief, surjectief en/of bijectief zou zijn!

(2) Zij $K = \mathbb{R}$, en beschouw de afleiding $f = d/dx$ van P_n naar P_{n-1} zoals in Voorbeeld 2.4.6(4). Dan is $\dim \ker f = 1$ en $\dim \operatorname{im} f = n$ (want f is surjectief), zodat inderdaad $\dim P_n = n + 1 = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f$.

2.5 De rang van een matrix en stelsels van lineaire vergelijkingen

In paragraaf 1.4 hebben we besproken hoe we een stelsel van lineaire vergelijkingen kunnen oplossen. We hebben dit gedaan door de uitgebreide matrix van het stelsel eerst in echelonvorm te brengen en dan de oplossingen af te lezen. In deze paragraaf zullen we de begrippen besproken in het huidige hoofdstuk toepassen om elegantere criteria te ontwikkelen om te bepalen wanneer een stelsel oplosbaar is en wat de 'grootte' van de oplossingsverzameling is. Om een stelsel expliciet op te lossen zullen we echter nog steeds gebruik maken van de rijreductie naar de echelonvorm.

Om deze criteria te formuleren zullen we gebruik maken van de rang van een matrix. Alvorens dit begrip te definiëren, bewijzen we de volgende stelling.

Opmerking 2.5.1. Voor elke $A \in M_{m,n}(K)$ vormt de verzameling van kolommen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ van A een deelverzameling van de vectorruimte K^m. Ook is de verzameling van de rijen $\{R_1^t, \ldots, R_m^t\}$ een deelverzameling van de vectorruimte K^n. We kunnen dus de deelruimte van K^m (resp. K^n) voortgebracht door de kolommen (resp. rijen) van een matrix beschouwen.

Merk op dat we de rijen niet altijd expliciet zullen transponeren tot kolommen; het is duidelijk wat we bedoelen met $\operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$ en dergelijke.

Stelling 2.5.2. *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ met kolommen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ en rijen $\{R_1, \ldots, R_m\}$. Dan is $\dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$.*

Bewijs. Noteer $s = \dim \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$ en $r = \dim \operatorname{span}(R_1, \ldots, R_m)$. Stel dat de verzameling $S = \{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ een basis is van $\operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$.

Definieer een matrix C met als kolommen de kolommen in S, i.e. $C = (A_{i_1} \ldots A_{i_s}) \in M_{m,s}(K)$. Aangezien S een basis is, is iedere kolom A_i een lineaire combinatie van S. We noteren voor alle $1 \leq k \leq n$

$$A_k = \lambda_{1k} A_{i_1} + \cdots + \lambda_{sk} A_{i_s},$$

met $\lambda_{ij} \in K$. Definieer de matrix $E = (\lambda_{ij}) \in M_{s,n}(K)$. Per definitie is $A = CE$.

Noteer met $\{E_1, \dots, E_s\}$ de rijen van E. Uit $A = CE$ volgt dat iedere rij R_i van A een lineaire combinatie is van $\{E_1, \dots, E_s\}$; bijgevolg is

$$r = \dim \operatorname{span}(R_1, \dots, R_m) \leq \dim \operatorname{span}(E_1, \dots, E_s) \leq s.$$

We hebben dus aangetoond dat $r \leq s$.

Wanneer we de redenering opnieuw doen voor de matrix A^t bekomen we dat $s \leq r$. We concluderen dat $r = s$. $\square$

Door de vorige stelling te gebruiken kunnen we nu de rang van een matrix op twee equivalente manieren definiëren.

Definitie 2.5.3. De *rang* van de matrix $A \in M_{m,n}(K)$ is de dimensie van de deelruimte van K^m (resp. K^n) voortgebracht door de kolommen (resp. rijen) van A. We noteren

$$\operatorname{rk}(A) := \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \dim \operatorname{span}(R_1, \dots, R_m).$$

Opmerking 2.5.4. De rang $\operatorname{rk}(A)$ is dus gekarakteriseerd als het (unieke) getal r zodat er een verzameling bestaat van r kolommen (resp. rijen) van A die lineair onafhankelijk is, en iedere verzameling van meer dan r kolommen (resp. rijen) van A lineair afhankelijk is.

Voorbeelden 2.5.5. (1) Er geldt dat $\operatorname{rk}(0_{m,n}) = 0$ en dat $\operatorname{rk}(I_n) = n$.

(2) Zij $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K) \setminus \{0\}$ met $a_{ij} = a_{k\ell}$ voor alle $1 \leq i, k \leq m$ en $1 \leq j, \ell \leq n$. Dan is $\operatorname{rk}(A) = 1$.

(3) Zij A een echelonmatrix. Dan is $\operatorname{rk}(A)$ gelijk aan het aantal spilplaatsen. Inderdaad, de verzameling van de spilkolommen is immers een basis voor de ruimte voortgebracht door de kolommen van A.

De volgende eigenschappen van de rang van een matrix zijn eenvoudig maar belangrijk.

Lemma 2.5.6. *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ met $\operatorname{rk}(A)$ de rang van A.*

(i) *Beschouw de lineaire afbeelding $L_A \colon K^n \to K^m \colon v \mapsto Av$. Dan is*

$$\operatorname{im}(L_A) = \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\};$$

bijgevolg is $\dim(\operatorname{im} L_A) = \operatorname{rk}(A)$.

(ii) *Elementaire rijoperaties laten de rang van een matrix invariant.*

(iii) *Zij $A \in M_{m,n}(K)$ en $B \in M_{n,r}(K)$. Dan is* $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(A)$ *en* $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk}(B)$.

(iv) *Zij* $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ *en* $B \in \mathrm{Mat}_{n,r}(K)$. *Dan is* $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B)$.

(v) *Zij* $A \in \mathsf{GL}_n(K)$ *en* $B \in \mathrm{Mat}_{r,n}(K)$. *Dan is* $\mathrm{rk}(BA) = \mathrm{rk}(B)$.

Bewijs. (i) Zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ de standaardbasis in K^n. Het beeld van L_A wordt voortgebracht door $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ (zie Lemma 2.4.13(ii)). Nu is $Ae_i \in K^m$ gelijk aan de i-de kolom van A.

(ii) Na het toepassen van een elementaire rijoperatie blijft de ruimte opgespannen door de rijen van A onveranderd.

(iii) Merk op dat $\mathrm{im}(L_{AB})$ een deelruimte is van $\mathrm{im}\, L_A$, want $(AB)v = A(Bv) \in \mathrm{im}\, L_A$ voor elke $v \in K^r$. In het bijzonder is $\dim(\mathrm{im}(L_{AB})) \leq \dim(\mathrm{im}\, L_A)$, en uit (i) volgt dat $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(A)$.
De andere ongelijkheid volgt nu door transponeren:

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}((AB)^t) = \mathrm{rk}(B^t A^t) \leq \mathrm{rk}(B^t) = \mathrm{rk}(B).$$

(iv) Uit (iii) volgt reeds dat $\mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}(B)$. Omdat A inverteerbaar is, kunnen we echter B nog herschrijven als $B = A^{-1} \cdot AB$, zodat opnieuw uit (iii) volgt dat $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(A^{-1} \cdot AB) \leq \mathrm{rk}(AB)$. Deze twee ongelijkheden samen geven ons $\mathrm{rk}(B) = \mathrm{rk}(AB)$.

(v) Analoog aan (iv). □

Men kan dus de rang van een matrix berekenen door de matrix eerst in echelonvorm te brengen met behulp van elementaire rijoperaties en dan de rang af te lezen (zie Voorbeeld 2.5.5(3)).

Zoals aangekondigd zullen we het concept van rang van een matrix gebruiken om de oplosbaarheid en het aantal oplossingen van een stelsel lineaire vergelijkingen weer te geven. In Lemma 2.5.13 tonen we aan dat de oplossingsverzameling van een niet-strijdig stelsel een zogenaamde affiene deelruimte is. Hiertoe voeren we eerst de nodige definities en hulpresultaten in.

Definitie 2.5.7. Zij V een K-vectorruimte, beschouw een element $v \in V$ en een deelruimte $W \leq V$. Definieer de deelverzameling

$$v + W := \{v + w \mid w \in W\} \subseteq V\,;$$

$v + W$ is dus de verzameling van alle sommen $v + w$ met $w \in W$. We noemen $v + W$ een *affiene deelruimte* of een *lineaire variëteit*.

Opmerking 2.5.8. Als $v \notin W$ dan is de affiene deelruimte $v + W$ geen deelruimte van V! Immers, als $v \notin W$, dan is ook $-v \notin W$ waardoor

$0 = v + (-v) \notin v + W$. We kunnen $v + W$ zien als een *verschuiving* van de deelruimte W. (Als $v \in W$, dan is $v + W = W$ wel een deelruimte van V.)

Om het verschil tussen deelruimten en affiene deelruimten te benadrukken, zullen we soms spreken over *vectordeelruimten* versus *affiene deelruimten*.

Voorbeeld 2.5.9. (1) Zij $W \leq V$ een deelruimte. Dan is W ook steeds een affiene deelruimte. We kunnen W immers schrijven als $0 + W$.

(2) Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}^3$. De deelverzameling

$$S = \{(1 + 2r, -1 - s, r + s)^t \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

is een affiene deelruimte van $\mathbb{R}^3$, we kunnen S immers ook schrijven als

$$S = (1, -1, 0)^t + \operatorname{span}(\{(2, 0, 1)^t, (0, -1, 1)^t\}).$$

Deze affiene deelruimte is geen deelruimte van $\mathbb{R}^3$.

Zij $v \in V$ en $w \in W \leq V$, dan zijn de verzamelingen $v+W$ en $(v+w)+W$ gelijk. Het volgend lemma toont aan dat elke affiene deelruimte een unieke deelruimte bepaalt waarvan ze de verschuiving is.

Lemma 2.5.10. *Zij V een vectorruimte, $v_1, v_2 \in V$ en W_1, W_2 deelruimten van V. Dan is $v_1+W_1 = v_2+W_2$ als en slechts als $W_1 = W_2$ en $v_1-v_2 \in W_1$.*

Bewijs. Als $W_1 = W_2$ en $v_1 - v_2 = w_0 \in W_1$, dan is

$$v_1 + W_1 = \{v_1 + w \mid w \in W_1\} \text{ en } v_2 + W_2 = \{v_1 - w_0 + w \mid w \in W_1\}.$$

Als w door alle elementen van W_1 loopt dan loopt $w - w_0$ ook door alle elementen van W_1. De twee verzamelingen zijn dus gelijk.

Omgekeerd, zij $v_1 + W_1 = v_2 + W_2$. Stel $w_0 = v_1 - v_2$, dan volgt dat $w_0 + W_1 = W_2$. Vermits $0 \in W_2$ moet $w_0 \in W_1$. Maar dan is $w_0 + W_1 = W_1$, en bijgevolg $W_1 = W_2$. $\square$

Definitie 2.5.11. Zij $v + W$ een affiene deelruimte van een K-vectorruimte V. Dan definiëren we de *dimensie* van $v + W$ als $\dim(v + W) := \dim W$.

Opmerking 2.5.12. We moeten nagaan dat de definitie van dimensie van een affiene deelruimte *goed gedefinieerd* is. Hiermee bedoelen we dat de neergeschreven formule niet mag afhangen van de keuze van de elementen die we gebruiken om de formule neer te schrijven. Meer bepaald moeten we hier nagaan dat, als $v_1 + W_1 = v_2 + W_2$ twee schrijfwijzen zijn van *dezelfde* affiene deelruimte, dat dan $\dim(W_1) = \dim(W_2)$. Dat dit inderdaad het geval is, volgt onmiddellijk uit Lemma 2.5.10.

We keren nu terug naar de stelsels, en we tonen aan dat de oplossingsverzameling van een niet-strijdig stelsel een affiene deelruimte is.

Lemma 2.5.13. *Beschouw het stelsel $AX = w$ met $A \in M_{m,n}(K)$, $w \in K^m$ en X een kolomvector met n onbekenden. Beschouw de lineaire afbeelding*

$$L_A \colon K^n \to K^m \colon v \mapsto Av.$$

(i) *Het stelsel $AX = w$ is strijdig als en slechts als $w \notin \operatorname{im} L_A$.*

(ii) *Als het stelsel $AX = w$ niet strijdig is, dan is de oplossingsverzameling een affiene deelruimte. Als $v_0 \in K^n$ een oplossing is, dan is de oplossingsverzameling gegeven door $L_A^{-1}(w) = v_0 + \ker L_A$.*

(iii) *Als het stelsel homogeen is, m.a.w. van de vorm $AX = 0$, dan is de oplossingsverzameling gelijk aan de deelruimte $\ker L_A$.*

Bewijs. Merk vooreerst op dat de oplossingsverzameling van $AX = w$ gelijk is aan

$$\{v \in K^n \mid Av = w\} = \{v \in K^n \mid L_A(v) = w\} = L_A^{-1}(w).$$

(i) De oplossingsverzameling $L_A^{-1}(w)$ is ledig als en slechts als $w \notin \operatorname{im} L_A$.

(ii) Stel dat er een oplossing $L_A(v_0) = w$ is. Zij nu $u \in K^n$ willekeurig. Dan is u een oplossing van het stelsel als en slechts als $L_A(u) = w = L_A(v_0)$, als en slechts als $L_A(u - v_0) = 0$, als en slechts als $u - v_0 \in \ker L_A$, als en slechts als $u \in v_0 + \ker L_A$.

(iii) Dit is een bijzonder geval van (ii), rekening houdend met het feit dat een homogeen stelsel nooit strijdig is, en steeds de nuloplossing $v_0 = 0$ heeft. □

Stelling 2.5.14. *Beschouw het stelsel $AX = w$ met $A \in M_{m,n}(K)$, $w \in K^m$ en X een kolomvector met n onbekenden.*

(i) *Het stelsel heeft een oplossing als en slechts als $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|w)$.*

(ii) *Stel dat het stelsel niet strijdig is. Dan is de dimensie van de oplossingsverzameling gelijk aan $n - \operatorname{rk}(A)$.*

Bewijs. (i) Zij $\{A_1, \dots, A_n\}$ de kolommen van de matrix A. Er geldt dat

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|w) \\
&\qquad\iff \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n, w) \\
&\qquad\iff \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n, w) \\
&\qquad\iff w \in \operatorname{span}(A_1, \dots, A_n).
\end{aligned}$$

Uit het bovenstaande lemma weten we dat het stelsel een oplossing heeft als en slechts als $w \in \operatorname{im}(L_A)$. De bewering volgt nu wegens Lemma 2.5.6(i).

(ii) Uit het bovenstaande lemma volgt dat de oplossingsverzameling de affiene deelruimte $v_0 + \ker L_A$ is, met v_0 een oplossing. We hebben dat

$$\begin{aligned}\dim(v_0 + \ker L_A) &= \dim(\ker L_A) \\ &= \dim(K^n) - \dim(\operatorname{im} L_A) = n - \operatorname{rk}(A),\end{aligned}$$

waar we gebruik gemaakt hebben van achtereenvolgens Definitie 2.5.11, Stelling 2.4.20 en Lemma 2.5.6(i). □

Wanneer we een stelsel met even veel onbekenden als vergelijkingen beschouwen, hebben we de volgende sterkere eigenschap.

Gevolg 2.5.15. *Beschouw het stelsel $AX = w$, $A \in M_n(K)$. Als $\operatorname{rk}(A) = n$, dan heeft het stelsel een unieke oplossing.*

Bewijs. Aangezien $\operatorname{rk}(A) = n$ moet ook $\operatorname{rk}(A|w) = n$, en dus volgt uit Stelling 2.5.14 dat het stelsel een oplossing heeft. Aangezien $n - \operatorname{rk}(A) = 0$ volgt dat de oplossingsverzameling dimensie 0 heeft, en dus is er een unieke oplossing. □

We zullen zien in Stelling 4.3.12 verderop dat een matrix $A \in M_n(K)$ met $\operatorname{rk}(A) = n$ steeds inverteerbaar is. De unieke oplossing van het stelsel $AX = w$ met $A \in M_n(K)$ en $\operatorname{rk}(A) = n$, wordt dan gegeven door $x = A^{-1}w$. (Merk op dat inderdaad $A(A^{-1}w) = w$.)

Opmerking 2.5.16. We hebben nu ogenschijnlijk twee verschillende stellingen gezien in verband met de oplossingsverzameling van een lineair stelsel, met name Stelling 1.4.13 en Stelling 2.5.14. We gaan na dat deze twee stellingen in feite op hetzelfde neerkomen.

Zij dus $AX = w$ een stelsel in m vergelijkingen en n onbekenden. Omwille van Lemma 2.5.6(ii) mogen we, om Stelling 2.5.14 toe te passen, aannemen dat de uitgebreide matrix $(A|w)$ in echelonvorm staat.

Volgens Stelling 1.4.13(i) is het stelsel strijdig als en slechts als de laatste kolom van $(A|w)$ een spilkolom is, terwijl volgens Stelling 2.5.14(i) het stelsel strijdig is als en slechts als $w \notin \operatorname{im} L_A$. Dit komt inderdaad op hetzelfde neer, want de laatste kolom van $(A|w)$ is een spilkolom als en slechts als $\operatorname{rk}(A|w) = \operatorname{rk}(A) + 1$, wat op zijn beurt equivalent is met het feit dat $w \notin \operatorname{span}(A_1, \ldots, A_n)$ waarbij $A_1, \ldots, A_n$ de kolommen van A zijn.

Veronderstel nu dat het stelsel $AX = w$ niet strijdig is. Volgens Gevolg 1.4.14 is de dimensie van de oplossingsverzameling (daar uitgedrukt als "het aantal vrij te kiezen onbekenden") gelijk aan het aantal onbekenden min het aantal spilkolommen van de echelonmatrix, terwijl volgens Stelling 2.5.14(ii) deze dimensie gelijk is aan $n - \mathrm{rk}(A)$. Dat dit op hetzelfde neerkomt, volgt nu onmiddellijk uit Voorbeeld 2.5.5(3).

Voorbeeld 2.5.17. Beschouw het stelsel $AX = w$ met 3 vergelijkingen en 6 onbekenden over $\mathbb{R}$, met uitgebreide matrix

$$(A|w) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right).$$

De verzameling S van de indices van de spilkolommen is $\{1, 3, 6\}$. Volgens de formule in Stelling 1.4.13(ii) is de oplossingsverzameling

$$\big\{(5 - 2t_1 - 3t_2 - 4t_3,\ t_1,\ 8 - 6t_2 - 7t_3,\ t_2,\ t_3,\ 9)^t \mid t_1, t_2, t_3 \in K\big\}.$$

Dit is gelijk aan de verzameling

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2, t_3 \in K \right\}.$$

We zien dat dit inderdaad een affiene deelruimte is, en dat de dimensie van deze affiene deelruimte ook exact het aantal vrij gekozen variabelen is.

Het is eenvoudig na te gaan dat de 3 basisvectoren van de deelruimte behorende bij de affiene ruimte in $\ker L_A$ zitten. Aangezien

$$\dim(\ker L_A) = n - \dim(\operatorname{im} L_A) = 6 - 3 = 3,$$

is dit ook de volledige kern.