Het hyperbolisch vlak

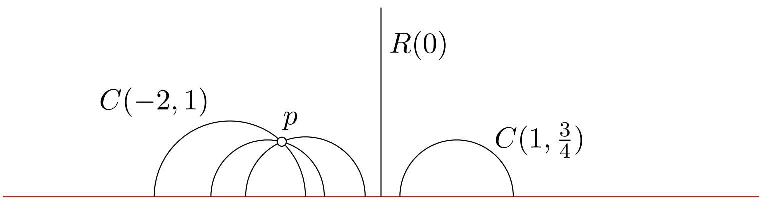
Computerproject Wiskunde — projectopgave 1

2018–2019

We bestuderen het *hyperbolisch vlak*, een wiskundige structuur met punten en rechten en hoeken en afstanden die heel veel eigenschappen gemeen heeft met het vlak waar we gewoonlijk in werken (het *Euclidisch* vlak) maar op enkele interessante punten afwijkt van onze intuïtie. Zo zijn er in het hyperbolische vlak door een punt dat niet op een rechte ligt *oneindig veel* rechten die parallel zijn aan die rechte, en niet precies 1 zoals in het Euclidisch vlak.

Het hyperbolisch vlak speelt een belangrijke rol in de ontwikkeling van de wiskunde. Op Wikipedia vind je heel wat informatie over de geschiedenis van dit onderwerp.

1 Definities



Figuur 1: Enkele rechten uit het hyperbolisch vlak

We gebruiken het volgend model voor het hyperbolisch vlak:

- De punten van het hyperbolisch vlak zijn alle punten uit het Euclidisch vlak met strikt positieve Y-coördinaat.
- Er zijn twee soorten *hyperbolische rechten*. Een eerste soort rechte is een verticale open halfrechte van het vlak. We noteren deze rechte als $R(a)$ waarbij $x = a$ de vergelijking is van de Euclidische rechte die deze halfrechte bevat. (Zie afbeelding.)
- De tweede soort hyperbolische rechte is een halve Euclidische cirkel met middelpunt op de X-as. We noteren deze rechte als $C(c, r)$, met $(c, 0)$ het middelpunt van de cirkel en r de straal. (Zie afbeelding.)

Merk op dat geen enkele van de afgebeelde rechten[1] door het punt p de rechte $R(0)$ snijdt. Er bestaat dus duidelijk meer dan één rechte door p die parallel is aan $R(0)$.

Om deze taak op te lossen, kan je best zelf enkele Sage-functies definiëren, ook al wordt er niet expliciet naar gevraagd — bijv. een functie om de doorsnede van twee rechten te bepalen, een functie die de rechte bepaalt door twee punten, een functie die je helpt bij het tekenen van een rechte, ... **Vermijd zoveel mogelijk knippen en plakken van formules.**

Stel een punt met coördinaten (x, y) voor als een lijst `[x,y]`. Stel een rechte ook door een lijst voor. Gebruik `[c,r]` voor $C(c, r)$ en `[a]` voor $R(a)$. Je kan dan aan de lengte van de lijst zien welke van de twee soorten rechten ze voorstelt.

Wellicht zal je voor deze taak vaak gebruik maken van de Sage-functie `solve`. Vermijd echter om `solve` te gebruiken binnenin de functies die je zelf definieert. Gebruik `solve` vooral om *algemene formules* te bepalen en neem die formules dan over in je functiedefinities (nadat je ze hebt vereenvoudigd).

Opgave 1. *Reproduceer afbeelding 1 zo goed mogelijk in Sage. De rechten door het punt p zijn $C(-2, 1)$, $C(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ en een rechte van de vorm $C(-1, r)$. Gebruik Sage om r te bepalen.*

Opgave 2. *Schrijf een Sage-functie die de rechte teruggeeft door twee gegeven punten. Gebruik deze functie om de rechten te bepalen die het punt $(0, 1)$ verbindt met $(-2, \frac{1}{2})$,$(-1, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$ en $(2, \frac{1}{2})$. Maak een tekening waarin deze vijf rechten tegelijkertijd worden afgebeeld, samen met een X-as.*

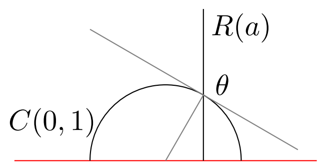
Opgave 3. *Als de drie punten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) op dezelfde rechte liggen, dan geldt*

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Bewijs dit met behulp van Sage.

2 Hoeken

De hoek tussen twee rechten in het hyperbolisch vlak is dezelfde als de hoek in het Euclidisch vlak. De hoek bepalen tussen twee hyperbolische rechten is echter iets moeilijker dan bij Euclidische rechten. We bekijken twee gevallen:



1. De hoek θ tussen de rechte $C(0, 1)$ en de rechte $R(a)$ (met $a \leq 1$). Dit is de hoek tussen $R(a)$ en de raaklijn aan de cirkel in het snijpunt. De raaklijn staat loodrecht op de straal. Er geldt:

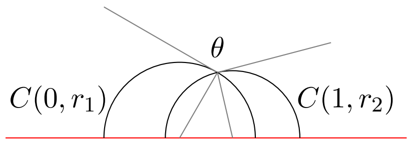
$$\cos\theta = -a$$

[1] We zullen het adjectief *hyperbolisch* meestal laten vallen. Een *rechte* is dus een *hyperbolische* rechte. Willen we een 'gewone' rechte aanduiden, dan noemen we dit een *Euclidische* rechte. Analoog voor 'afstand' vs. 'Euclidische afstand'.

2. De hoek tussen de rechte $C(0, r_1)$ en de rechte $C(1, r_2)$. Er geldt

$$\cos\theta = \frac{1 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

(Dit kan bijvoorbeeld afgeleid worden uit de cosinusregel in de Euclidische driehoek gevormd door de twee stralen en de X-as.)



Let op: net zoals bij Euclidische rechten is de hoek tussen twee rechten niet eenduidig bepaald: in plaats van θ kan je even goed $\pi - \theta$ gebruiken. Welke van de twee je moet kiezen, hangt af van de specifieke toepassing.

Hierboven hebben we formules afgeleid voor twee heel specifieke gevallen. Hoe bepaal je meer algemene hoeken, bijvoorbeeld tussen $C(c_1, r_1)$ en $R(a)$ of tussen $C(c_1, r_1)$ en $C(c_2, r_2)$? Hiervoor gebruiken we de volgende eigenschap.

Eigenschap 1. *De volgende transformaties van het hyperbolische vlak laten de hoeken tussen rechten onveranderd:*

- *Een translatie T_t evenwijdig aan de X-as (met $t \in \mathbf{R}$):*

$$R(a) \mapsto R(a + t), \quad C(c, r) \mapsto C(c + t, r),$$

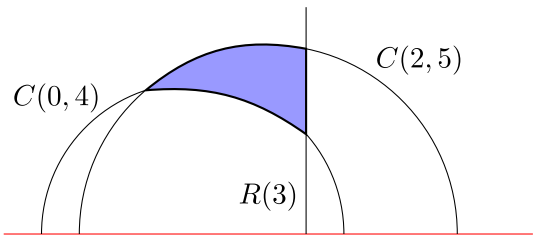
- *Een homothetie H_k met centrum $(0, 0)$ en factor $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$:*

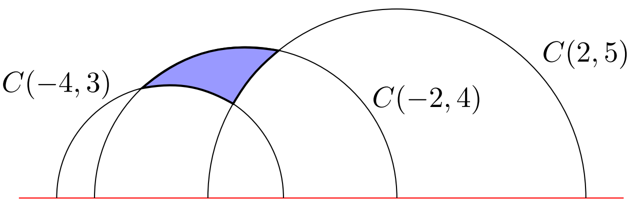
$$R(a) \mapsto R(ka), \quad C(c, r) \mapsto C(kc, kr)$$

Opgave 4. *Gebruik deze eigenschappen om algemene formules af te leiden voor de cosinus van de hoek tussen de twee rechten $C(c_1, r_1)$ en $R(a)$ en tussen de twee rechten $C(c_1, r_1)$ en $C(c_2, r_2)$.*

Opgave 5. *Bepaal de hoeken van de driehoeken in onderstaande afbeelding (in graden). Wat is de som van de drie hoeken van elke driehoek?*

Controleer of je telkens de juiste keuze gemaakt hebt tussen de twee mogelijke hoeken θ en $\pi - \theta$.





Inderdaad, in een hyperbolisch vlak is de som van de hoeken van een driehoek altijd *kleiner* dan 180°.

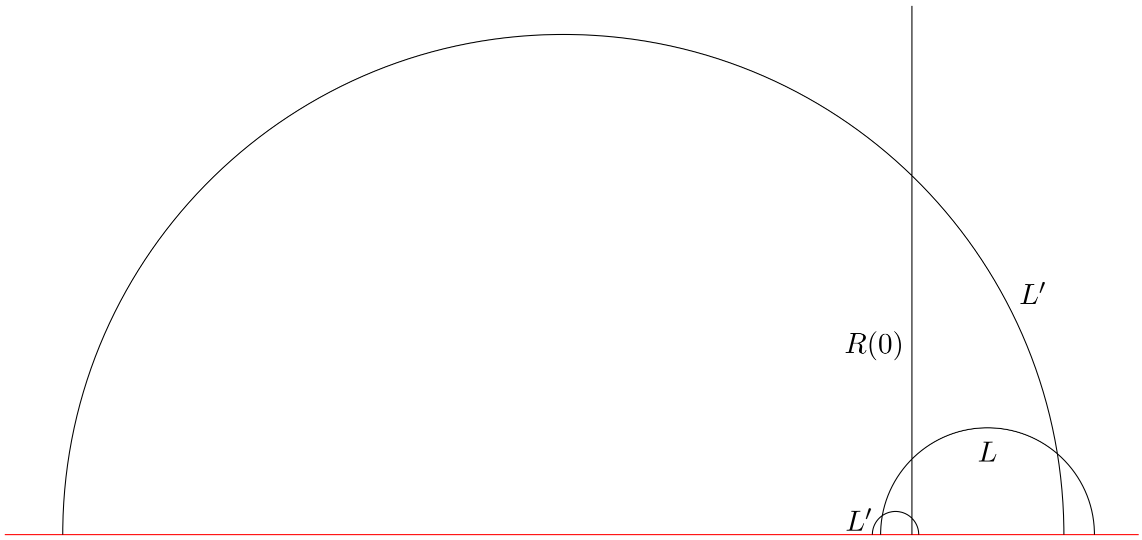
3 Driehoeken

Opgave 6. *Zij $C(c, r)$ een rechte die de rechte $R(0)$ snijdt in een hoek van 45°. Aan welke vergelijking voldoen c and r?*

Welke van deze rechten gaat door het punt $(0,1)$? Noem een dergelijke rechte L. Vind een rechte L' die een hoek van $45°$ maakt met $R(0)$ én met L. Bereken het snijpunt van L en L'.

Tip: om hoeken tussen rechten met elkaar te vergelijken (ook in de volgende opgave) is het beter om niet de cosinussen van de hoeken met elkaar te vergelijken, maar de *kwadraten* van die cosinussen. Merk op dat $\cos^2\theta = \cos^2(\pi - \theta)$.

Opgelet: er zijn twee oplossingen voor L en per waarde van L nog eens twee oplossingen voor L'. Je moet dus 4 snijpunten berekenen. In de figuur hebben we twee van de vier oplossingen getekend, de andere twee bekom je door de figuur te spiegelen t.o.v. de Y-as.



Merk op dat je zojuist een gelijkzijdige[2] driehoek hebt geconstrueerd met hoeken van $45°$.

Ter controle: de lijn $L' = C(c,r)$ voldoet aan

$$r = \left(1 \pm \sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2, \quad c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}r,$$

maar je moet in Sage heel wat 'handwerk' verrichten om dit symbolisch resultaat te bekomen. Het snijpunt van L en L' heeft coördinaten

$$x = \pm\frac{1 \pm \sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{1 \pm \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}, \quad r = 2x^2.$$

Opgave 7. *Controleer dat jouw (numerieke) oplossing van opgave 6 wel degelijk overeenkomt met de formules hierboven.*

Opgave 8. *Zij pqq' een driehoek met $p = (0,1)$, $q = (0,2)$. Beschouw de punten $s = (x,y)$ met de eigenschap dat de hoeken in hoekpunten p en q van de driehoek pqs gelijk zijn aan elkaar. (M.a.w., pqs is een 'gelijkbenige' driehoek met basis pq.)*

[2] Eigenlijk moeten we dit een *gelijkhoekige* driehoek noemen. We weten nog niet hoe afstanden worden gedefinieerd in het hyperbolisch vlak.

Bewijs met behulp van Sage dat deze punten op een (hyperbolische) rechte $C(c, r)$ liggen. Bepaal c en r. Wat is het snijpunt van $C(c, r)$ met de rechte pq?

Tip: wanneer je de voorwaarde waaraan (x, y) moet voldoen, met behulp van Sage uitdrukt in de vorm $f(x, y) = 0$, bekom je een ingewikkelde rationale functie $f(x, y)$. Je moet f opsplitsen in factoren om de vergelijking van $C(c, r)$ te vinden.

De rechte $C(c, r)$ is de (hyperbolische) middelloodlijn van het lijnstuk pq. Het snijpunt met pq is dus het (hyperbolisch) middelpunt van dit lijnstuk. Je zou verwachten dit middelpunt coördinaten $(0, \frac{3}{2})$ heeft, maar zoals je zojuist hebt berekend, is dit niet het geval en zijn de coördinaten $(0, \sqrt{2})$. De reden hiervoor is dat afstanden in een hyperbolisch vlak anders gemeten worden dan in het Euclidisch vlak.

4 Afstanden

Zij $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$. Definieer

$$\Delta(p_1, p_2) = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{y_1 y_2}.$$

Opgave 9. *Bereken $\Delta((0, 1), (0, \sqrt{2}))$, $\Delta((0, \sqrt{2}), (0, 2))$ en $\Delta((0, 1), (0, 2))$.*

Ter controle: de eerste twee waarden zijn dezelfde.

Opgave 10. *Bereken $\Delta(p_1, p_2)$ voor elk van de zijden p_1p_2 van de 4 gelijkzijdige driehoeken uit opgave 6.*

Ter controle: alle (twaalf) waarden zijn dezelfde, nl. $2\sqrt{2}$.

Deze resultaten suggereren dat we Δ zouden kunnen gebruiken als afstandsfunctie in het hyperbolisch vlak. 'Lijnstukken' waarvan we verwachten dat ze even lang zijn, hebben immers dezelfde waarde voor Δ. Jammer genoeg is er nog één 'detail' dat niet klopt: uit opgave 9 blijkt wel dat het middelpunt van een lijnstuk even ver ligt van beide uiteinden, maar de lengte van het 'halve' lijnstuk is niet de helft van de totale lengte ...

Wikipedia zal je vertellen dat de *metriek* in ons model van het hyperbolisch vlak wordt gegeven door

$$\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{y}.$$

Je kan de booglengte van een deel van een kromme bepalen als integraal van $\mathrm{d}s$ — geen paniek, dit klinkt veel ingewikkelder dan het is.

Stel bijvoorbeeld dat we de lengte willen bepalen van het lijnstuk dat $(0, a)$ verbindt met $(0, b)$. De punten van dit lijnstuk hebben coördinaten $(0, y)$ met $a \leq y \leq b$. Vullen we dit in in de formule van de metriek, dan krijgen we

$$\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}}{y} = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}y)^2}}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

en de lengte van het lijnstuk is de integraal hiervan tussen de gepaste grenzen:

$$\int_{y=a}^{b} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln b - \ln a = \ln b/a.$$

De lengtes van de lijnstukken uit opgave 9 zijn dus $\ln\sqrt{2}$, $\ln\sqrt{2}$ en $\ln 2$ — en de laatste waarde is inderdaad het dubbele van de eerste twee.

Als tweede voorbeeld bepalen we de lengte van het (hyperbolisch) lijnstuk dat $(0,1)$ verbindt met $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ — een deel van de rechte $C(0,1)$. De punten op dit lijnstuk hebben coördinaten van de vorm $(\cos t, \sin t)$ met $\pi/6 \leq t \leq \pi/2$. Dus:

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}\cos t = -\sin t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}\sin t = \cos t\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}.$$

en de lengte van het lijnstuk wordt

$$\ell = \int_{t=\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}.$$

Opgave 11. *Bepaal de exacte waarde van ℓ. Bepaal ook $2\sinh(\ell/2)$ en vergelijk dit met de Δ-waarde voor ditzelfde lijnstuk. Zie je een verband?*

Tip: Sage heeft last met het vereenvoudigen van uitdrukkingen die hyperbolische functies[3] bevatten zoals 'sinh'. Vervang daarom de hyperbolische sinus door zijn definitie

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

en gebruik `canonicalize_radical()` om de uitdrukkingen te vereenvoudigen. Daarmee ben je nog niet klaar, want Sage heeft ook last met het vereenvoudigen van wortels van wortels. Neem daarom het kwadraat van je resultaat en pas daarop `maxima_methods().rootscontract()` toe.

Opgave 12. *Herhaal voorgaande oefening voor lijnstukken tussen $(0,1)$ en $(\cos\theta, \sin\theta)$ met $\theta = 5\pi/60$, $6\pi/60$, $7\pi/60$, ..., $29\pi/60$.* ***Doe dit niet symbolisch maar numeriek.*** *Maak een grafiek van de waarden van $2\sinh(\ell/2)$ in elk van deze gevallen, ten opzichte van de Δ-waarden voor dezelfde lijnstukken. Wat is het verband tussen beide waarden?*

Hoewel we dit verband enkel hebben bepaald in enkele specifieke gevallen, blijkt dit algemeen correct te zijn en kan je dit gebruiken als basis van een exacte definitie van afstand tussen twee punten in een hyperbolisch vlak.

Met deze opgave hebben we slechts een tipje van de sluier opgelicht. Het hyperbolisch vlak heeft nog veel andere interessante eigenschappen. Zo bestaat er een hyperbolische driehoeksmeetkunde, zijn er nog andere modellen van dezelfde meetkunde, bestaan er hyperbolische betegelingen (o.a., gebruikt door de Nederlandse kunstenaar M. C. Escher), is er een *game* dat zich in het hyperbolisch vlak afspeelt, ...

[3] Je had je misschien al afgevraagd waarom hyperbolische functies zo heten. Omdat ze een belangrijke rol spelen in hyperbolische meetkunde...