

Wiskunde I

Koen Thas

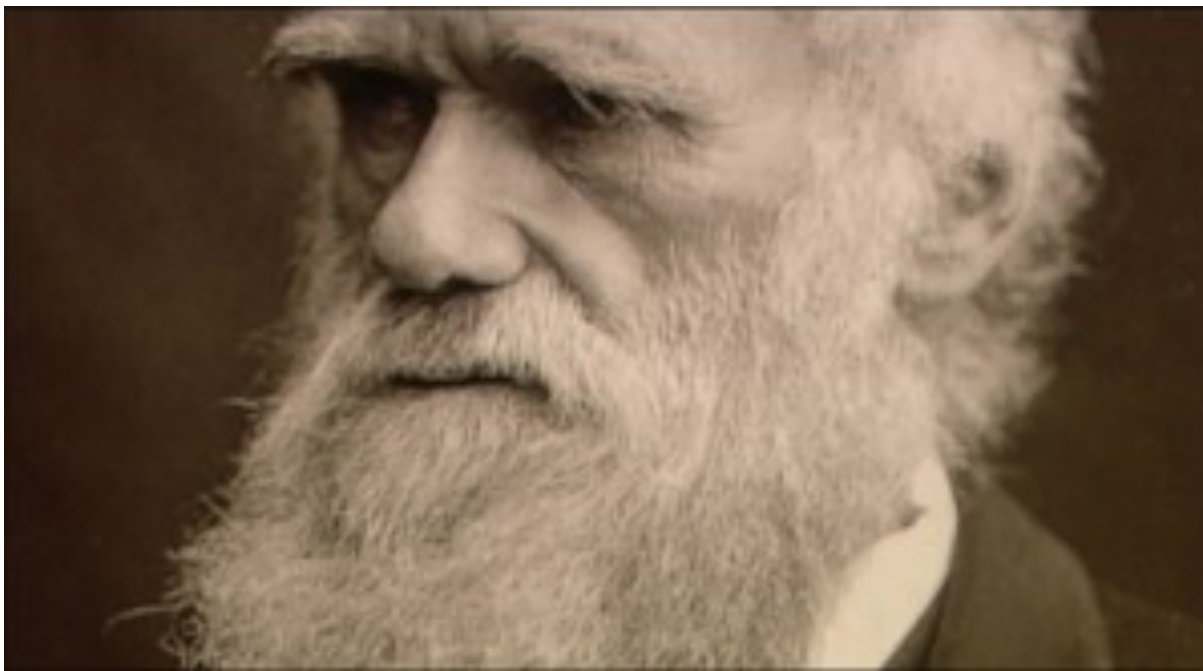


Wiskunde I
2019–2020

Koen Thas

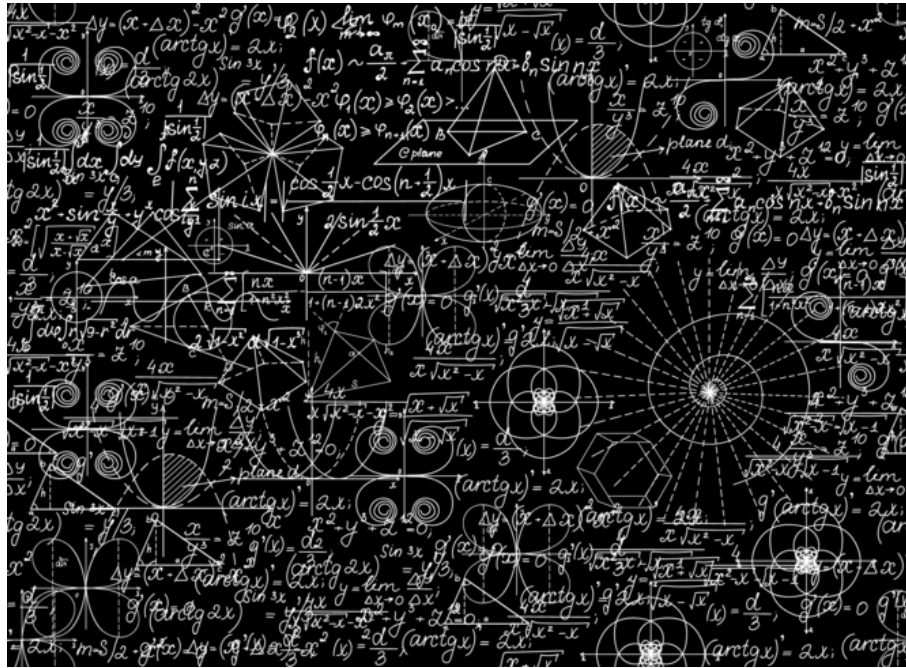
“ I attempted mathematics, and even went during the summer of 1828 with a private tutor to Barmouth, but I got on very slowly. The work was repugnant to me, chiefly from my not being able to see any meaning in the early steps of algebra. This impatience was very foolish, and in after years I have deeply regretted that I did not proceed far enough at least to understand something of the great leading principles of mathematics, for men thus endowed seem to have an extra sense. ”

(Charles Darwin, 1887, *Autobiography*, p.58.)



HOOFDSTUK 0

Voorbeschouwing | enkele woorden ...



Wiskunde wordt gekenmerkt door: *ondubbelzinnige definities* en *onweerlegbare bewijzen*, die enkel steunen op logica en op datgene wat al eerder wiskundig bewezen is.

Een *wiskundig model* van de werkelijkheid is een vereenvoudiging van de werkelijkheid in louter wiskundige termen. Men beperkt zich daarbij tot die factoren uit de werkelijkheid waarvan men vermoedt dat ze dominant zijn t.o.v. de factoren die men niet in rekening brengt.

Het wiskundig model van een bepaald probleem moet opgelost worden met louter wiskundige middelen, zonder gebruik van externe (niet-wiskundige) gegevens of methodes. Kan men het wiskundig model niet wiskundig oplossen, dan moet men het model vereenvoudigen door extra factoren uit de werkelijkheid te laten vallen, of door ze anders in wiskundige termen te vertalen.

De conclusies van het wiskundig model moeten aan de werkelijkheid getoetst worden: men moet nagaan of de wiskundige oplossing, in werkelijke termen 'hervertaald', overeenstemt met de feiten. Is dat onvoldoende het geval, dan moet het model verfijnd worden door meer factoren in rekening te brengen of door ze op een andere manier wiskundig te vertalen. Doorgaans vervangt men sommige al te drastische benaderingen door fijnere benaderingen.

Als de overeenstemming met de werkelijkheid bevredigend (geworden) is, dan kan men de wiskundige conclusies gebruiken om voorspellingen te doen over hoe de werkelijkheid zich *zal* gedragen. Door waarnemingen moet dan blijken of die voorspellingen ook uitkomen.

Praktisch: theorie en oefeningen

Het is niet de bedoeling van ‘Wiskunde I’ om de theorie te doen voorlopen op de oefeningen | gezien de grote oefeningenlast zal het zelfs zo zijn dat vaak de stof eerst gezien wordt in de oefeningenlessen. In de oefeningenlessen zal sowieso de benodigde theorie kort ingeleid worden, zodat de oefeningen kunnen behandeld worden zonder in eerste instantie af te hangen van de theorie. In de theorie zullen we de theoretische achtergrond verder uitdiepen, zodat de oefeningen daarna beter ingekaderd en begrepen zijn.

Over deze editie (2019–2020)

Deze nota’s werden initieel opgesteld door Chris Impens, en vanaf het academiejaar 2012–2013 opgesmukt door mezelf. De editie 2015–2016 verschilt van de editie 2014–2015 hoofdzakelijk in

- @ de toevoeging van een nieuw (laatste) hoofdstuk (“De Google matrix”);
- @ de toevoeging van een subject index.

Tevens werden hier en daar typo’s, en $\text{\LaTeX}$ -issues, rechtgezet. De editie 2016–2017 verschilt van de editie 2015–2016 hoofdzakelijk in

- @ de aanmaak van een nieuwe voorpagina;
- @ een aanpassing van de blad -en zetspiegel;
- @ de toevoeging van enkele plaatjes;
- @ de toevoeging van een appendix met daarin twee voorbeeld-examens.

De editie 2017–2018 verschilt van editie 2016–2017 in

- @ de aanmaak van een nieuw inleidend hoofdstuk.

En tevens werden er uiteraard weer typo’s, en $\text{\LaTeX}$ -issues, rechtgezet.

De editie 2018–2019 was nagenoeg dezelfde als die van 2017–2018.

De editie 2019–2020 verschilt van editie 2018–2019 in

- @ het verwijderen van enkele paragrafen;
- @ het verplaatsen van een aantal secties;
- @ het aanduiden van stukken die in de oefeningen toegelicht worden, maar niet in de theorie (met het symbool “”), en van een hoofdstuk dat niet gegeven wordt in de theorie, maar wel gebruikt wordt in de oefeningen (in **olijfgroen**);
- @ verdere kleine stijlveranderingen.

Niet alles wat in deze syllabus staat, zal noodzakelijk in de les gegeven worden.

Koen Thas
(koen.thas@ugent.be)
september 2019
Gent

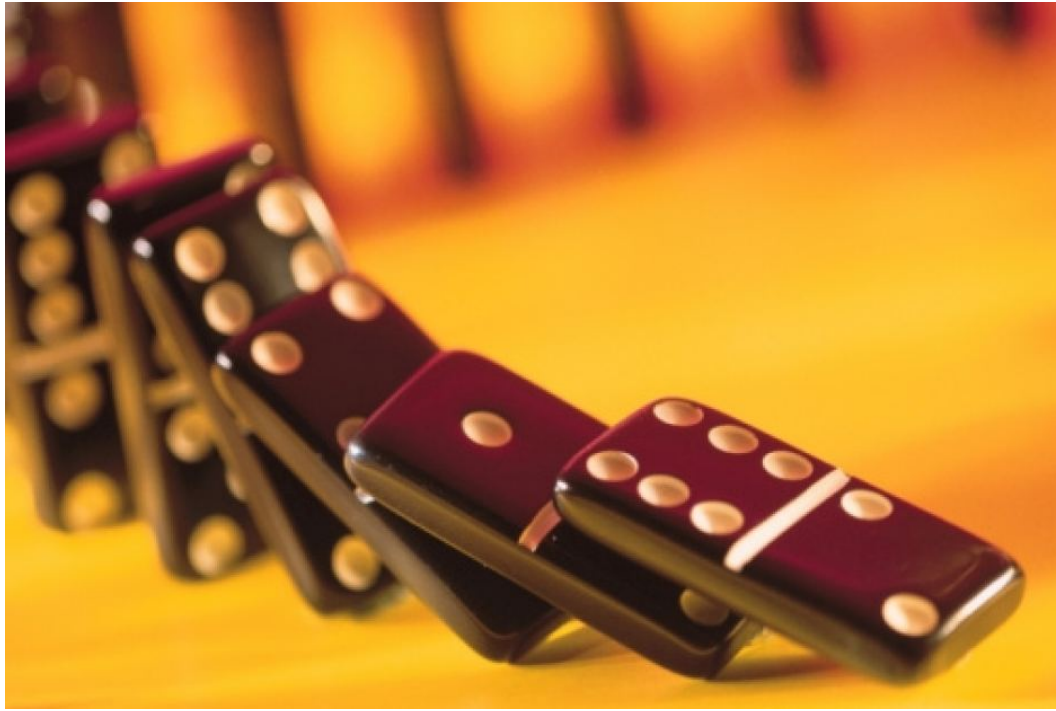
Inhoud

Hoofdstuk 0. Voorbeschouwing enkele woorden ...	v
Praktisch: theorie en oefeningen	vi
Over deze editie (2019–2020)	vi
Hoofdstuk 1. Inleidende begrippen en methodes	1
1. Verzamelingen	1
2. Functies	2
3. Diverse getallen	3
4. Reële functies	4
5. Symbolen	4
6. Bewijsmethodes	5
Hoofdstuk 2. Elementaire algebra	7
1. Bewerkingen op getallen	7
2. Rekenen met reële getallen	7
3. Veeltermen	9
4. Merkwaardige producten en quotiënten	12
5. Oplossen van veeltermvergelijkingen	13
Hoofdstuk 3. Goniometrie	15
1. Basismeetkunde	15
2. Georiënteerde hoeken en de goniometrische cirkel	17
3. Goniometrische vergelijkingen 	21
4. Vlakke driehoeksmeting	23
5. Appendix: Boldriehoeksmeting	25
6. Pool-, cilinder- en bolcoördinaten.	29
7. Toepassingen en voorbeelden 	31
Hoofdstuk 4. Complexe getallen	37
1. De verzameling $\mathbb{C}$	37
2. Veeltermfuncties en n -de machtswortels	40
Hoofdstuk 5. Matrices en determinanten	43
1. Matrices	43
2. Determinanten	45
3. De eliminatiemethode van Gauss	53
Hoofdstuk 6. Meetkunde in het vlak 	73
1. Drie meetkundige interpretaties van vectoren in het vlak	74
2. Inproduct van twee vectoren van het vlak	79
3. Rechten in het vlak	80
Hoofdstuk 7. Lineaire afbeeldingen	85
1. Matrices en lineaire afbeeldingen	85
2. Injectieve lineaire afbeeldingen	88
3. Dimensie van de waardenverzameling	89
Hoofdstuk 8. De Google matrix	93

1. Google Page rank: basisidee	93
2. Belangrijk voorbeeld	94
3. Twee problemen	97
4. Oplossing van Brin en Page: de damping factor	98
5. Oefening 🍃🍃🍃	99
Appendix A. Twee proefexamens	101
1. Examen van 6 februari 2015 (eerste zitting)	101
2. Examen van 19 augustus 2013 (tweede zitting)	102
Appendix. Bibliografie	103
Appendix. Index	105

HOOFDSTUK 1

Inleidende begrippen en methodes



1. Verzamelingen

De verzameling bestaande uit de objecten $a, b, c, \dots$ noteert men als $\{a, b, c, \dots\}$. Elk van die objecten is een *element* van die verzameling. Men noteert “ a is een element van de verzameling V ” als “ $a \in V$ ”.

1.1. Doorsnede. Voor verzamelingen A en B , definiëren we de *doorsnede* $A \cap B$ als

$$(1) \quad A \cap B := \{c \mid c \in A \text{ en } c \in B\}.$$

De laatste uitdrukking wil zeggen: “de verzameling van alle elementen c waarvoor geldt dat c een element is van A en een element van B ”. Soms schrijven we ook

$$(2) \quad A \cap B := \{c \mid (c \in A) \wedge (c \in B)\}.$$

1.2. Unie. Voor verzamelingen A en B , definiëren we de *unie* $A \cup B$ als

$$(3) \quad A \cup B := \{c \mid c \in A \text{ of } c \in B\}.$$

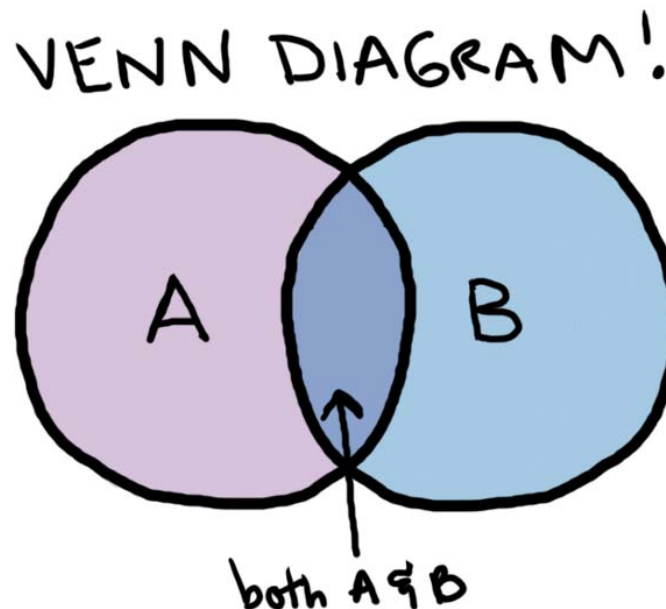
We schrijven ook

$$(4) \quad A \cup B := \{c \mid (c \in A) \vee (c \in B)\}.$$

1.3. Deelverzamelingen. Indien A een verzameling is, is een *deelverzameling* van A , een verzameling C waarvan elk element ook een element is van A . We noteren $C \subseteq A$. Indien we daarnaast weten dat $A \neq C$, schrijven we ook $C \subset A$.

In het algemeen hebben we voor verzamelingen A en B :

$$(5) \quad \begin{cases} A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B; \\ A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B. \end{cases}$$



1.4. Productverzamelingen. Indien A en B verzamelingen zijn, is $A \times B := \{(c, d) \mid c \in A, d \in B\}$; deze verzameling noemen we het *Cartesisch product* van A en B .

1.5. De ledige verzameling. De *ledige verzameling* is de verzameling die geen elementen bevat, genoteerd $\{\}$ of $\emptyset$.

2. Functies

2.1. Een *functie* f associeert met elk element x uit een bepaalde verzameling A ten hoogste één welbepaald element uit een verzameling B , genoteerd $f(x)$. Als we de verzamelingen A en B willen specificeren, schrijven we ook $f : A \mapsto B$ of $f : A \longrightarrow B$. We noemen $f : A \mapsto B$ een *afbeelding* indien *elk* element uit A een beeld heeft. Men noemt x het *orgineel* of *argument* en $f(x)$ het *beeld* of de *(functie)waarde*. Verschillende originelen kunnen hetzelfde beeld hebben. In de praktijk gebruikt men f (de functie) en $f(x)$ (het functievoorschrift) door elkaar. Zo spreekt men van ‘de functie $\sin x$ ’, terwijl men zou moeten zeggen ‘de functie die x op $\sin x$ afbeeldt’, en noteren $x \mapsto \sin x$.

2.2. De naam die men kiest voor de veranderlijke is willekeurig en meestal ingegeven door de fysische context. Als de veranderlijke een *plaats* aanduidt kiest men meestal x , en t als het om de *tijd* gaat. Ook de letter die men voor de functiewaarde kiest, y bijvoorbeeld, is willekeurig en kan ingegeven zijn door de achtergrond van het vraagstuk.

2.3. Graaf van een functie. Indien $f : A \mapsto B$ een functie is, is de *graaf* of *grafiek* van f de verzameling van alle koppels $(x, f(x))$, waarbij x het domein doorloopt.

2.4. Het *domein* of de *definitieverzameling* van een functie is de verzameling van de elementen x waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is. Het heeft meestal geen zin een functie te onderzoeken buiten haar definitieverzameling.

2.5. De *waardenverzameling* van de functie f is de verzameling van alle elementen $f(x)$ met x in de definitieverzameling.

2.6. Injectiviteit, surjectiviteit en bijectiviteit. Een functie $f : A \mapsto B$, is *injectief* indien voor alle koppels $(u, v) \in A \times A$ met $u \neq v$ geldt dat $f(u) \neq f(v)$. Ze is *surjectief* indien haar waardenverzameling samenvalt met B . Ze is *bijjectief* indien ze zowel injectief als surjectief is.

We zeggen dat twee verzamelingen C, D *gelijkmachtig* (“even groot”) zijn, indien er een bijectie tussen C en D bestaat.

Voorbeeld. De verzameling $\mathbb{N}$ en de verzameling bestaande uit de getallen $7, 8, 9, \dots$ zijn gelijkmachtig via de bijectie

$$(6) \quad \alpha : \mathbb{N} \mapsto \{7, 8, 9, \dots\} : n \mapsto n + 7.$$

Ander voorbeeld: de verzamelingen $\{1, 2, 3\}$ en $\{u, v, w\}$ zijn ook gelijkmachtig.

3. Diverse getallen

3.1. Natuurlijke getallen. De *natuurlijke getallen* zijn: $0, 1, 2, \dots$. De verzameling van alle natuurlijke getallen noteren we als $\mathbb{N}$, m.a.w.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

De *natuurlijke getallen zonder nul* zijn: $1, 2, \dots$. De verzameling van de natuurlijke getallen zonder nul noteren we als $\mathbb{N}_0$ of $\mathbb{N}^\times$, m.a.w.

$$\mathbb{N}_0 = \{1, 2, \dots\}.$$

3.2. Gehele en rationale getallen. De *gehele getallen* vormen de verzameling $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. *Voorbeelden:* $-5, 3, 0$.

Een *breuk* is een verhouding, genoteerd als

$$(7) \quad p/q \text{ of } p : q \text{ of } \frac{p}{q},$$

van twee natuurlijke getallen, p (de teller) en q (de noemer, niet nul). *Voorbeelden:* $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$.

Rekenregels. Voor alle $a, b, c, d, f \in \mathbb{Z}$ met $b, d, f \neq 0$, hebben we:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{d} : \frac{b}{f} = \frac{af}{bd}.$$

(Meestal noteert men het vermenigvuldigingsteken “ $\cdot$ ” niet. Men schrijft dan $\frac{a}{b} \frac{c}{d}$.)

Een *rationaal getal* is van de vorm $\pm p/q$, met p/q een breuk. Twee breuken waarvan de ene ontstaat door teller en noemer van de andere met een zelfde geheel getal te vermenigvuldigen of door een zelfde geheel getal te delen, beschouwt men als hetzelfde rationaal getal. *Voorbeelden:* $-\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

De verzameling van alle rationale getallen noteren we als $\mathbb{Q}$.

3.3. Reële getallen. Een *reëel getal* is elk getal dat in decimale vorm kan geschreven worden, waarbij het aantal decimalen niet eindig hoeft te zijn. *Voorbeelden:* 1 (geen decimalen; dit reëel getal is in het bijzonder een natuurlijk getal); $-\frac{1}{2} = -0,5$ (één decimaal; dit reëel getal is in het bijzonder een rationaal getal); $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$ (oneindig veel decimalen; ook dit reëel getal is in het bijzonder een rationaal getal); $\pi = 3,141592\dots$ (oneindig veel decimalen; dit reëel getal is geen rationaal getal, hoewel dat niet op het gezicht te zien is).

De verzameling van alle reële getallen noteren we als $\mathbb{R}$. De verzameling van alle reële getallen met 0 uitgezonderd noteren we als $\mathbb{R}_0$ of $\mathbb{R}^\times$.

4. Reële functies

Onderstel dat $f : A \mapsto B$ een *reële functie* is | dit wil zeggen dat $A \subseteq \mathbb{R}$ en $B \subseteq \mathbb{R}$. Dan kunnen we de graaf van f meetkundig als volgt voorstellen. In een vlak¹ voorzien van een assenstelsel xOy (aannemend dat x de veranderlijke aanduidt en y de functiewaarde) vormen de punten $(x, f(x))$ (dus met x als abscis en $f(x)$ als ordinaat) een kromme, genoemd *beeldlijn* van de functie f . De formule $y = f(x)$ is de vergelijking van die kromme.

5. Symbolen

In deze sectie worden de elementen x_i beschouwd in een verzameling waar we ze kunnen optellen, respectievelijk vermenigvuldigen (zoals in $\mathbb{N}$ of $\mathbb{Q}$).

5.1. Som. Om een uitdrukking zoals $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) eleganter en handiger voor te stellen, schrijven we ook:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m x_i.$$

5.2. Product. Om een uitdrukking zoals $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) eleganter en handiger voor te stellen, schrijven we ook:

$$(9) \quad \prod_{i=1}^m x_i.$$

5.3. Pijlen. Indien U en G uitspraken zijn, schrijven we

$$(10) \quad U \implies G$$

indien G uit U volgt. We schrijven

$$(11) \quad U \iff G$$

indien $U \implies G$ en $G \implies U$.

Voorbeelden. In $\mathbb{N}$ hebben we dat

$$(12) \quad x \geq 2 \implies x \geq 1.$$

En indien A en B verzamelingen zijn, hebben we dat

$$(13) \quad a \in A \cap B \iff (a \in A) \wedge (a \in B).$$

¹Eigenlijk het *reële vlak* $\mathbb{R}^2$.

6. Bewijsmethodes

6.1. Algemene opmerkingen.

- Indien je moet bewijzen dat voor elke $x \in X$ (X een bepaalde verzameling) een bepaalde eigenschap E geldt, dan volstaat het *niet* om E te bewijzen voor enkele waarden uit X ! | je moet E bewijzen voor alle waarden uit X .
- Indien je moet bewijzen dat NIET voor elke $x \in X$ (X een bepaalde verzameling) een bepaalde eigenschap E geldt, dus dat de uitspraak “voor elke $x \in X$ geldt eigenschap E ” niet waar is, dan volstaat het om voor tenminste één waarde uit X te bewijzen dat E niet klopt.
- Bewijzen dat de uitspraak “voor elke $x \in X$ geldt eigenschap E ” niet waar, is niet hetzelfde als bewijzen dat “voor elke $x \in X$ geldt eigenschap E niet”!!!

6.2. Bewijs door contradictie. Deze techniek is makkelijk: indien je moet bewijzen dat uit een uitspraak U , de uitspraak G volgt, onderstel je dat G niet geldt, en dan bewijs je dat A dan ook niet kan gelden. (En daaruit volgt het gestelde dus.)

Kort: we moeten bewijzen dat

$$(14) \quad U \implies G$$

en we doen dat door het volgende te bewijzen:

$$(15) \quad \neg G \implies \neg U.$$

Hier betekent “ $\neg G$ ”: “niet G ” (of: “de bewering G is niet waar”).

Voorbeeld: Hoeveel priemgetallen? Een *priemgetal* is een natuurlijk getal $p > 1$ dat (in $\mathbb{N}$) enkel deelbaar is door 1 en zichzelf. Elk natuurlijk getal $n \neq 0, 1$ is een product van priemgetallen. (Probeer dit te bewijzen. *Tip:* gebruik de bewijstechniek van inductie die we later in dit hoofdstuk zullen zien.)

We tonen nu aan dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. We doen dit via twee resultaten die we bewijzen door contradictie.

HULPSTELLING 1.1. Onderstel dat $a, b \in \mathbb{N}_0$, en dat $a > 1$ een deler is van b . Dan is a geen deler van $b + 1$.

BEWIJS. Aangezien a een deler is van b , kunnen we b schrijven als $b = ma$, voor een bepaalde $m \in \mathbb{N}_0$. Onderstel nu dat a *wel* een deler is van $b + 1$. Dan is a dus een deler van

$$(16) \quad b + 1 = ma + 1.$$

Dus $ma + 1 = wa$ voor een bepaalde $w \in \mathbb{N}_0$, en er geldt duidelijk dat $w > m$. Dus $(w - m)a = 1$. En dit levert de gezochte contradictie, want $a > 1$ en $w - m > 0$. ■

Stelling 1.1

Er zijn oneindig veel priemgetallen.

BEWIJS. Onderstel dat er maar een eindig aantal priemgetallen is. We noteren ze als $p_1, p_2, \dots, p_u$, voor een bepaalde $u \in \mathbb{N}_0$. Definieer nu

$$(17) \quad K := \prod_{i=1}^u p_i + 1.$$

Aangezien elke getal een product is van priemgetallen, is K dat ook. Dus K is deelbaar door p_j voor een bepaalde $j \in \{1, 2, \dots, u\}$. Aangezien $\prod_{i=1}^u p_i$ ook deelbaar is door p_j , krijgen we een tegenstrijdigheid door Hulpstelling 1.1. ■

OPMERKING 1.2. Een hulpstelling wordt ook vaak “lemma” genoemd.

6.3. Bewijs met inductie. Een bewijs met inductie laat toe om beweringen die gedaan worden voor (bijvoorbeeld) alle natuurlijke getalen $k = 0, 1, 2, \dots$ (of $k = 1, 2, \dots$) te bewijzen; deze techniek kan dus gebruikt worden om 1 bewijs te leveren voor oneindig veel waarden!

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stap 1. Basisgeval. Bewijs de bewering voor het kleinste geval. (Typisch gezien} \\ \quad k = 0 \text{ of } k = 1.) \\ \text{Stap 2. Inductiehypothese. Neem de bewering aan voor alle } k \leq m. \\ \text{Stap 3. Inductiestap. Bewijs de bewering nu voor } k = m + 1. \end{array} \right\}$$

Onderstel dus bijvoorbeeld dat je de bewering voor de waarde $k = 1$ bewezen hebt. Door STAP 2 en STAP 3, is ze dan ook waar voor $k = 2$. Dus door STAP 2 en STAP 3, is ze ook waar voor $k = 3$. Enzoverder. En zo kan je na een eindig aantal stappen de bewering aantonen voor elk gegeven natuurlijk getal $k \geq 1$.

Voorbeeld: een interessante sommatie. Door gebruik te maken van inductie, bewijzen we nu volgende stelling.

Stelling 1.2

Voor elke natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$, is

$$(18) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

BEWIJS. Stap 1. Voor $n = 1$ is de bewering duidelijk.

Stap 2. Inductiehypothese. Neem de bewering aan voor alle $k \leq n - 1$.

Stap 3. Inductiestap. We hebben dat

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

HOOFDSTUK 7

Lineaire afbeeldingen



FIGUUR 7.1. “Linear map of the world” (Leonhard Euler, 1753).

1. Matrices en lineaire afbeeldingen

Op bladzijde 2 is gedefinieerd wat een ‘functie’ van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is: een manier om met elk reëel getal x uit een bepaalde verzameling reële getallen (de definitieverzameling) één welbepaald reëel getal, genoteerd $f(x)$, te associëren. Men noemt $f(x)$ het *beeld* van het *origineel* x . Zo’n functie kan aanschouwelijk voorgesteld worden door haar *beeldlijn* of *graf(iek)*, een kromme in het vlak. We breiden deze definitie nu uit.

1.1. Een functie van $\mathbb{R}^m$ ($m \geq 1$) naar $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) associeert met elke vector $\vec{x}$ uit een bepaalde verzameling vectoren van $\mathbb{R}^m$ (de definitieverzameling) een welbepaalde vector, genoteerd $f(\vec{x})$ van $\mathbb{R}^n$. Driedimensionale wezens zoals wij kunnen zich de ‘graf(iek)’ van die functie alleen aanschouwelijk voorstellen als $n + m \leq 3$.

OPMERKING 7.1. Als $n > 1$, dan noteert men het functievoorschrift f meestal ook met een vectorpijlte erboven, dus als $\vec{f}$. Die functie levert immers *vectoren* af, geen getallen.

Men noemt een functie van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^n$ een *afbeelding* van $\mathbb{R}^m$ naar $\mathbb{R}^n$ als zij met *elke* vector van $\mathbb{R}^m$ een vector van $\mathbb{R}^n$ associeert, dus als haar definitieverzameling heel $\mathbb{R}^m$ is. Men noteert dan $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ of

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^m).$$

De verzameling van alle beelden $f(\vec{x})$ heet de *waardenverzameling* van de functie. Is de definitieverzameling als D genoteerd, dan noteert men $f(D)$ voor de waardenverzameling. Voor een afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is de waardenverzameling dus $f(\mathbb{R}^m)$. (Dit hoeft niet heel $\mathbb{R}^n$ te zijn.)

DEFINITIE 7.2. Een afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heet *lineair* als zij de volgende twee eigenschappen heeft:

- (1) voor alle $\vec{u}$ en $\vec{v}$ van $\mathbb{R}^m$ is $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$;
- (2) voor elke $\vec{u}$ van $\mathbb{R}^m$ en elk reëel getal r is $f(r\vec{u}) = rf(\vec{u})$.

Men kan de beide voorwaarden tegelijk uitdrukken als: voor alle $\vec{u}$ en $\vec{v}$ van $\mathbb{R}^m$ en alle reële getallen a en b is

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v}).$$

In plaats van *lineaire afbeelding* $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ zegt men ook *lineaire transformatie* van $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

OPMERKING 7.3. Het menselijk brein heeft een uitgesproken voorliefde voor de wetmatigheid

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Lineaire afbeeldingen hebben die eigenschap, maar vele afbeeldingen zijn niet lineair en hebben die eigenschap dus niet. Zo is

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} &\neq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \\ \sqrt{x+y} &\neq \sqrt{x} + \sqrt{y}, \\ \sin(x+y) &\neq \sin x + \sin y \quad \text{enz.} \end{aligned}$$

Elke matrix legt een lineaire afbeelding vast, zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 7.1

Is M een $(n \times m)$ -matrix van reële getallen, dan is f_M , gedefinieerd door

$$f_M(\vec{x}) = M\vec{x} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^m)$$

(met de vectoren getransponeerd, dus als kolommatrices, genoteerd) een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

BEWIJS.

$$\begin{aligned} f_M(\vec{u} + \vec{v}) &= M(\vec{u} + \vec{v}) = M\vec{u} + M\vec{v} = f_M(\vec{u}) + f_M(\vec{v}) \\ f_M(r\vec{u}) &= M(r\vec{u}) = r(M\vec{u}) = rf_M(\vec{u}). \end{aligned}$$

■

Men noemt de lineaire afbeelding f_M *geassocieerd* met de matrix M .

Voorbeeld. De (2×3) -matrix

$$(129) \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

definieert de afbeelding $f_M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}.$$

Voluit geschreven is f_M dus, als men het origineel als (x, y, z) noteert en het beeld als (x', y') :

$$(130) \quad \begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = dx + ey + fz. \end{cases}$$

Omgekeerd is het zo dat elke lineaire afbeelding met een welbepaalde matrix is geassocieerd.

Stelling 7.2

Is $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding, en is $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^m$, dan is f de lineaire afbeelding geassocieerd met de $(n \times m)$ -matrix waarvan de opeenvolgende kolommen zijn:

$$f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m).$$

BEWIJS. Wij zullen de stelling bewijzen voor een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. (De redenering is algemeen geldig.) Als

$$(131) \quad \begin{cases} f(1, 0, 0) = (a, b) \\ f(0, 1, 0) = (c, d) \\ f(0, 0, 1) = (e, f), \end{cases}$$

dan is de matrix met $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$ als opeenvolgende kolommen:

$$M = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}.$$

De met deze matrix geassocieerde lineaire afbeelding f_M zet (x, y, z) om in

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy + ez \\ bx + dy + fz \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ = xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3).$$

Omdat f lineair is, hebben we

$$xf(\vec{e}_1) + yf(\vec{e}_2) + zf(\vec{e}_3) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3),$$

wat gewoon $f(x, y, z)$ is. De met de matrix M geassocieerde lineaire afbeelding f_M is dus inderdaad de gegeven lineaire afbeelding f . ■

1.2. Belangrijke gevolgtrekking: ‘matrices’ (bepaalde schikkingen van getallen) en ‘lineaire afbeeldingen’ (bepaalde bewerkingen op vectoren) zijn in feite twee verschillende beschrijvingen van eenzelfde fenomeen. Sommige aspecten worden beter begrepen als men ze van ‘matrices’ in ‘lineaire afbeeldingen’ vertaalt.

1.3. Zijn $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ en $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ twee lineaire afbeeldingen, dan is de samengestelde afbeelding $G(F(x_1, \dots, x_m))$ een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^p$. Men noteert die samenstelling (verkregen door eerst F toe te passen en dan G) als $G \circ F$ (G na F).

Stelling 7.3

Is A de matrix van de lineaire afbeelding F , en B de matrix van de lineaire afbeelding G , dan is BA de matrix van de lineaire afbeelding $G \circ F$.

BEWIJS. Wij zullen het bewijs leveren voor $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. (De redenering is algemeen geldig.) Als F als matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ heeft, dan is

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

en als G als matrix $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix}$ heeft, dan is

$$\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \\ z'' = ix' + jy'. \end{cases}$$

De samenstelling van beide is dus

$$\begin{cases} x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y \\ y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y \\ z'' = i(ax + by) + j(cx + dy) = (ia + jc)x + (ib + jd)y. \end{cases}$$

Hieruit blijkt dat $G \circ F$ als matrix heeft

$$\begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \\ ia + jc & ib + jd. \end{pmatrix}$$

Dit herkennen wij (die het matrixproduct al op bladzijde 44 gedefinieerd hebben) als het matrixproduct BA . ■

Deze stelling toont dat het product van twee matrices (op het eerste gezicht zeer kunstmatig gedefinieerd) de vertaling is van een zeer natuurlijke bewerking op lineaire afbeeldingen, nl. ze aaneenschakelen.

2. Injectieve lineaire afbeeldingen

Elke lineaire afbeelding behoudt de nulvector en behoudt lineaire afhankelijkheid:

Stelling 7.4

Voor elke lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ geldt:

- (1) de nulvector wordt omgezet in de nulvector;
- (2) lineair afhankelijke vectoren worden omgezet in lineair afhankelijke vectoren.

BEWIJS. (a) Elke lineaire afbeelding heeft de eigenschap $f(r\vec{u}) = rf(\vec{u})$, die zich voor $r = 0$ herleidt tot $f(\vec{0}) = \vec{0}$. (De eerste $\vec{0}$ bestaat uit m nullen, de tweede uit n .)

(b) Als $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ een lineair afhankelijk stel vectoren van $\mathbb{R}^m$ is, dan zijn $f(\vec{u}), f(\vec{v}), \dots$ eveneens lineair afhankelijk. Inderdaad: er bestaat een lineaire combinatie $a\vec{u} + b\vec{v} + \dots = \vec{0}$ met niet alle coëfficiënten nul. Er volgt dat $f(a\vec{u} + b\vec{v} + \dots) = f(\vec{0})$, m.a.w. $af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) + \dots = \vec{0}$. Omdat niet alle coëfficiënten nul zijn, betekent dit dat $f(\vec{u}), f(\vec{v}), \dots$ lineair afhankelijk zijn. ■

OPMERKING 7.4. (a) Vectoren die níet de nulvector zijn kunnen eveneens omgezet worden in de nulvector. *Voorbeeld:* voor de lineaire afbeelding $f(x, y) = x + y$ van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ is $f(1, -1) = 0$.

(b) Lineair *onafhankelijke* vectoren kunnen eveneens omgezet worden in een lineair *afhankelijk* stel. *Voorbeeld:* voor de lineaire afbeelding $f(x, y) = x + y$ van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ is $f(1, -1) = 0$. Het lineair onafhankelijk ‘stel’ bestaande uit de ene vector $(1, -1)$ wordt dus omgezet in het lineair afhankelijk ‘stel’ bestaande uit de nulvector.

DEFINITIE 7.5. Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heet *injectief* als $f(\vec{x}) = \vec{0}$ uitsluitend geldt voor $\vec{x} = \vec{0}$, m.a.w. als we hebben

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0}.$$

Stelling 7.5

Voor elke injectieve lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ geldt:

- (1) verschillende originelen hebben verschillende beelden, d.w.z.: als $\vec{u} \neq \vec{v}$, dan is $f(\vec{u}) \neq f(\vec{v})$;
- (2) lineair onafhankelijke vectoren hebben lineair onafhankelijke beelden.

BEWIJS. (a) Onderstel $\vec{u} \neq \vec{v}$. Uit $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ zou volgen dat $f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$ d.i. $f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$. Bij een injectieve f is dat enkel mogelijk als $\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$, hetgeen zou leiden tot $\vec{u} = \vec{v}$, tegen de onderstelling in. Vandaar is wel degelijk $f(\vec{u}) \neq f(\vec{v})$.

(b) Als $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ een lineair onafhankelijk stel vectoren van $\mathbb{R}^m$ is, dan zijn $f(\vec{u}), f(\vec{v}), \dots$ eveneens lineair onafhankelijk. Om dat te vinden bekijken we een lineaire combinatie $af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) + \dots = \vec{0}$, d.i., $f(a\vec{u} + b\vec{v} + \dots) = \vec{0}$. Bij een injectieve f is dat enkel mogelijk als $a\vec{u} + b\vec{v} + \dots = \vec{0}$. Doordat $\vec{u}, \vec{v}, \dots$ lineair onafhankelijk zijn, volgt $a = b = \dots = 0$. Uit $af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) + \dots = \vec{0}$ volgt dus ondubbelzinnig dat alle coëfficiënten nul zijn, m.a.w., $f(\vec{u}), f(\vec{v}), \dots$ zijn lineair onafhankelijk. ■

Stelling 7.6

De lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ met matrix M is injectief als en slechts als $\text{rang } M = m$.

BEWIJS. De injectiviteit van f betekent bij definitie dat $f(\vec{x}) = \vec{0}$ maar één oplossing heeft, nl. $\vec{x} = \vec{0}$. Wegens $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ is $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$, en omdat M de matrix van f is hebben we $f(\vec{x}) = M\vec{x}$. Voluit geschreven is $f(\vec{x}) = \vec{0}$ dus

$$(132) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0}},$$

zijnde een homogeen stelsel van n vergelijkingen voor de m onbekenden $(x_1, \dots, x_m)$. Uit het onderdeel ‘oplossen van stelsels’ weten we dat het bestaan van een unieke oplossing equivalent is met $\text{rang } M = m$. ■

GEVOLG 7.6. Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is nooit injectief als $n < m$. (Inderdaad, dan is $\text{rang } M \leq n < m$.)

GEVOLG 7.7. Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (dus met $n = m$) is injectief als en slechts als de bijhorende matrix inverteerbaar is.

3. Dimensie van de waardenverzameling

De waardenverzameling van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, genoteerd als $f(\mathbb{R}^m)$, bestaat bij definitie uit alle vectoren $f(\vec{x})$ met $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. We geven nu een andere omschrijving.

Stelling 7.7

Is $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ de standaardbasis van $\mathbb{R}^m$, dan bestaat de waardenverzameling van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uit alle mogelijke lineaire combinaties van de vectoren

$$(133) \quad f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m).$$

BEWIJS. De waardenverzameling bestaat uit alle vectoren $f(\vec{x})$ met $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Elke $f(\vec{x})$ is een lineaire combinatie van de vectoren (133) want $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_m\vec{e}_m$, zodat

$$f(\vec{x}) = x_1f(\vec{e}_1) + \dots + x_mf(\vec{e}_m).$$

Omgekeerd, elke lineaire combinatie van de vectoren (133), stel

$$(134) \quad c_1f(\vec{e}_1) + \dots + c_mf(\vec{e}_m),$$

behoort tot de waardenverzameling $f(\mathbb{R}^m)$ want de vector (134) is $f(c_1\vec{e}_1 + \dots + c_m\vec{e}_m)$, met $c_1\vec{e}_1 + \dots + c_m\vec{e}_m \in \mathbb{R}^m$. ■

DEFINITIE 7.8. Het grootste aantal lineair onafhankelijke vectoren van (133) noemt men de *dimensie* van de waardenverzameling $f(\mathbb{R}^m)$, en noteren wij als $\dim f(\mathbb{R}^m)$.

Stelling 7.8

De dimensie van de waardenverzameling van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is gelijk aan de rang van haar matrix M .

BEWIJS. De matrix M heeft de vectoren van (133) als opeenvolgende kolommen. Is $\text{rang } M = r$, dan zijn r , en niet meer dan r , van die kolommen lineair onafhankelijk. Onder de m vectoren (133) zijn er dus r , en niet meer dan r , lineair onafhankelijk. ■

We hebben dus

$$\dim f(\mathbb{R}^m) = \text{rang } M \quad (\leq m \text{ en } \leq n).$$

De volgende stelling geeft de meetkundige interpretatie van ‘dimensie van de waardenverzameling’. Om geen ‘rechten’ en ‘vlakken’ te moeten invoeren in meer dan drie dimensies beperken we de volgende stelling tot $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

Stelling 7.9

Gegeven een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($m \leq 3, n \leq 3$) waarvan de matrix M een rang $r (\leq 3)$ heeft.

- (1) Is $r = 0$, dan bestaat de waardenverzameling enkel uit de oorsprong van $\mathbb{R}^n$.
- (2) Is $r = 1$, dan is de waardenverzameling een rechte door de oorsprong van $\mathbb{R}^n$. (Is $n = 1$, dan is de waardenverzameling dus heel $\mathbb{R}$.)
- (3) Is $r = 2$ (wat enkel mogelijk is als $m \geq 2$ en $n \geq 2$) dan is de waardenverzameling een vlak door de oorsprong van $\mathbb{R}^n$. (Is $n = 2$, dan is de waardenverzameling dus heel $\mathbb{R}^2$.)
- (4) Is $r = 3$ (hier enkel mogelijk als $m = n = 3$) dan is de waardenverzameling heel $\mathbb{R}^3$.

BEWIJS. (a) Als $r = 0$, dan bevat (133) geen enkele lineair onafhankelijke vector, m.a.w. : elke vector uit (133) is de nulvector. Bijgevolg herleidt elke lineaire combinatie van (133) zich tot de nulvector. De waardenverzameling $f(\mathbb{R}^m)$ bestaat uitsluitend uit die nulvector.

(b) Als $r = 1$, dan bevat (133) een lineair onafhankelijke vector $f(\vec{e}_i) \neq \vec{0}$, en elk stel van twee vectoren van (133) is lineair afhankelijk. Elke vector van (133) is een veelvoud van $f(\vec{e}_i)$. Inderdaad, bekijken we naast $f(\vec{e}_i)$ nog een andere vector $f(\vec{e}_j)$ van (133), dan bestaan er dus reële getallen a, b die niet allebei nul zijn en waarvoor $af(\vec{e}_i) + bf(\vec{e}_j) = \vec{0}$. Uit $b = 0$ zou volgen dat $af(\vec{e}_i) = \vec{0}$, dus (wegens $a \neq 0$) $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, wat strijdig is met het gegeven. Bijgevolg is $b \neq 0$, en uit $af(\vec{e}_i) + bf(\vec{e}_j) = \vec{0}$ halen we dan $f(\vec{e}_j) = -\frac{b}{a}f(\vec{e}_i)$.

Elke lineaire combinatie van (133) is dus gewoon een veelvoud van $f(\vec{e}_i)$. De waardenverzameling $f(\mathbb{R}^m)$ bestaat dus uit alle vectoren $tf(\vec{e}_i)$, met t reëel. Stelt men $f(\vec{e}_i)$ voor als de plaatsvector $\overrightarrow{OP}$, dan is de verzameling van alle punten $tf(\vec{e}_i)$ de rechte door O en P .

(c) Als $r = 2$, dan bevat (133) twee lineair onafhankelijke vectoren, stel $f(\vec{e}_i)$ en $f(\vec{e}_j)$, en elk stel van drie vectoren van (133) is lineair afhankelijk. Elke vector van (133) is een lineaire combinatie van

$f(\vec{e}_i)$ en $f(\vec{e}_j)$. (Analoge verificatie als onder (b).) Elke lineaire combinatie van (133) is dus gewoon een lineaire combinatie van $f(\vec{e}_i)$ en $f(\vec{e}_j)$. De waardenverzameling $f(\mathbb{R}^m)$ bestaat dan uit alle vectoren $uf(\vec{e}_i) + vf(\vec{e}_j)$, met u en v reëel. Stelt men $f(\vec{e}_i)$ voor als de plaatsvector $\overrightarrow{OP}$, en $f(\vec{e}_j)$ als de plaatsvector $\overrightarrow{OQ}$, dan is de verzameling van alle punten $uf(\vec{e}_i) + vf(\vec{e}_j)$ het vlak door O , P en Q .

(d) Als $r = 3$ (en $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) dan zijn de drie vectoren van (133) lineair onafhankelijk. Elke vector van $\mathbb{R}^3$ is een lineaire combinatie van die drie, en behoort bijgevolg tot de waardenverzameling. De waardenverzameling is dus $\mathbb{R}^3$.

