



Wiskunde II

Koen Thas

Wiskunde II
2019–2020

Koen Thas

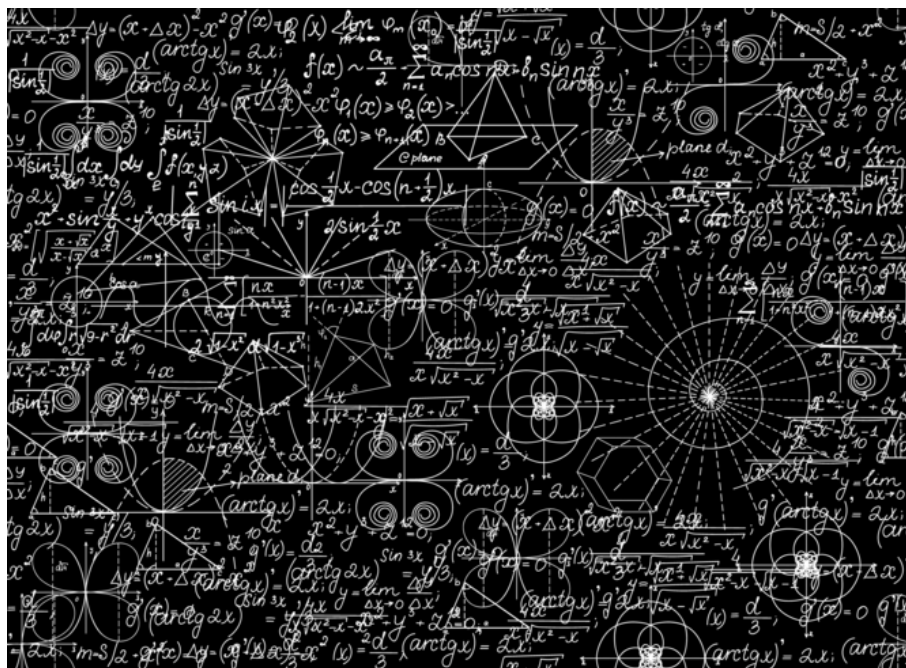
“ Leonardo Fibonacci, the great 13th century Italian mathematician (1175–1250) created the “Fibonacci sequence” to explain behavior in Nature mathematically. History has it that the first question he posed was how many rabbits would be created in one year starting with one pair. ”

(Rick Santelli)



HOOFDSTUK 0

Eerste woorden



Wiskunde wordt gekenmerkt door: *ondubbelzinnige definities* en *onweerlegbare bewijzen*, die enkel steunen op logica en op datgene wat al eerder wiskundig bewezen is.

Een *wiskundig model* van de werkelijkheid is een vereenvoudiging van de werkelijkheid in louter wiskundige termen. Men beperkt zich daarbij tot die factoren uit de werkelijkheid waarvan men vermoedt dat ze dominant zijn t.o.v. de factoren die men niet in rekening brengt.

Het wiskundig model van een bepaald probleem moet opgelost worden met louter wiskundige middelen, zonder gebruik van externe (niet-wiskundige) gegevens of methodes. Kan men het wiskundig model niet wiskundig oplossen, dan moet men het model vereenvoudigen door extra factoren uit de werkelijkheid te laten vallen, of door ze anders in wiskundige termen te vertalen.

De conclusies van het wiskundig model moeten aan de werkelijkheid getoetst worden: men moet nagaan of de wiskundige oplossing, in werkelijke termen 'hervertaald', overeenstemt met de feiten. Is dat onvoldoende het geval, dan moet het model verfijnd worden door meer factoren in rekening te brengen of door ze op een andere manier wiskundig te vertalen. Doorgaans vervangt men sommige al te drastische benaderingen door fijnere benaderingen.

Als de overeenstemming met de werkelijkheid bevredigend (geworden) is, dan kan men de wiskundige conclusies gebruiken om voorspellingen te doen over hoe de werkelijkheid zich *zal* gedragen. Door waarnemingen moet dan blijken of die voorspellingen ook uitkomen.

Praktisch: theorie en oefeningen

Het is — net als bij ‘Wiskunde I’ — niet de bedoeling van ‘Wiskunde II’ om de theorie te doen voorlopen op de oefeningen — gezien de grote oefeningenlast zal het zelfs zo zijn dat vaak de stof eerst gezien wordt in de oefeningenlessen. In de oefeningenlessen zal sowieso de benodigde theorie kort ingeleid worden, zodat de oefeningen kunnen behandeld worden zonder in eerste instantie af te hangen van de theorie. In de theorie zullen we de theoretische achtergrond verder uitdiepen, zodat de oefeningen daarna beter ingekaderd en begrepen zijn.

Over deze editie (2019–2020)

Deze nota’s werden initieel opgesteld door Chris Impens, en opgesmukt door mezelf.

De huidige editie verschilt hier en daar structureel van de editie 2012-2013 (qua vorm). (Inhoudelijk is het grootste verschil met die editie dat het hoofdstuk ‘Kegelsneden’ ingekort is, en dat de laatste drie hoofdstukken van volgorde verwisseld zijn.) In vergelijking met de edities 2013-2014 en 2014-2015 zijn er nagenoeg geen verschillen, op enkele typo’s na (en een bug die alle trema’s in Hoofdstuk 1 op de verkeerde plaats leek gezet te hebben). Een index met trefwoorden werd toegevoegd in 2016.

De editie 2016–2017 verschilt van de editie 2015–2016 hoofdzakelijk in

- @ de aanmaak van een nieuwe voorpagina;
- @ een aanpassing van de blad -en zetspiegel;
- @ de toevoeging van enkele plaatjes;
- @ de toevoeging van een appendix met daarin een voorbeeld-examen.

En tevens werden er uiteraard weer typo’s, en $\text{\LaTeX}$ -issues, rechtgezet.

De edities 2016–2017, 2017–2018 en 2018–2019 verschillen hoofdzakelijk in typo’s, en $\text{\LaTeX}$ -issues.

De editie 2019–2020 verschilt van editie 2018–2019 in

- @ het verwijderen van enkele paragrafen;
- @ het aanduiden van stukken die mogelijk in de oefeningen toegelicht worden, maar niet in de theorie (met het symbool “   ”);
- @ verdere kleine stijlveranderingen.

Niet alles wat in deze syllabus staat, zal noodzakelijk in de les gegeven worden.

Koen Thas
(koen.thas@ugent.be)
februari 2020

Inhoud

Hoofdstuk 0. Eerste woorden	v
Praktisch: theorie en oefeningen	vi
Over deze editie (2019–2020)	vi
Hoofdstuk 1. Functies, limieten, afgeleiden	1
1. Getallen	1
2. Functies	1
3. Limieten	2
4. Rekenregels	3
5. Asymptoten	6
6. Afgeleiden	7
7. Stijgen en dalen	8
8. Veeltermfuncties van de eerste graad	9
9. Veeltermfuncties van de tweede graad	10
10. De exponentiële functie	11
11. De natuurlijke logaritme	12
12. Algemene machtfuncties	13
13. Algemene logaritmen	14
14. Vierkantswortels	15
15. Drie goniometrische functies	15
16. Twee cyclometrische functies	16
17. Het oplossen van onbepaaldheden	18
18. Appendix: Afgeleiden van hogere orde	21
Hoofdstuk 2. Kegelsneden	23
1. Definities en poolvergelijking	23
2. De ellips in standaardgedaante	25
3. De hyperbool in standaardgedaante	30
4. De parabool in standaardgedaante	33
Hoofdstuk 3. Rijen van reële getallen	37
1. Definities	37
2. Meetkundige rijen	38
Hoofdstuk 4. Reeksen van getallen	43
1. Definities	43
2. Meetkundige reeksen	44
3. De regel van d' Alembert	45
Hoofdstuk 5. Taylorreeksen	47
1. Taylorreeksen	47
2. Fundamentele voorbeelden	48
Hoofdstuk 6. Bepaalde integratie	55
1. Definities en basiseigenschappen	55
2. De hoofdstelling	58
3. Toepassingen	61

Hoofdstuk 7. Onbepaalde integratie	65
1. Definities en basiseigenschappen	65
2. Praktische integratietechniek	66
3. Toepassing: nog drie Taylorreeksen	70
Hoofdstuk 8. Differentiaalvergelijkingen	73
1. Inleiding	73
2. Differentiaalvergelijking met gescheiden veranderlijken	74
3. Lineaire differentiaalvergelijking van de eerste orde 🍃🍃🍃	77
4. Differentiaalvergelijking van Bernoulli 🍃🍃🍃	78
5. Lineaire differentiaalvergelijking van de tweede orde	79
6. Toepassing: differentiaalvergelijking van Cauchy-Euler 🍃🍃🍃	88
7. Toepassing: lineair stelsel van eerste orde met constante coëfficiënten 🍃🍃🍃	89
Appendix A. Een proefexamen	91
1. Examen van 26 mei 2015 (eerste zittijd)	91
Appendix. Index	93

HOOFDSTUK 5

Taylorreeksen



1. Taylorreeksen

Een *Taylorreeks* is een reeks van de gedaante

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \dots$$

waarin $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ een rij van getallen is, en x een veranderlijke. Of de reeks al dan niet convergeert hangt van de waarde van x af. Doorgaans vindt men m.b.v. de regel van d'Alembert ofwel dat de reeks convergeert voor $-1 < x < 1$ ofwel dat ze convergeert voor alle x . De reekssom

$$(34) \quad f(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \dots$$

is dan een functie met als definitieverzameling hetzij het interval $] -1, 1[$ hetzij $\mathbb{R}$. M.b.v. deze gelijkheid kan men de functie $f(x)$ in $] -1, 1[$ of in $\mathbb{R}$ beter en beter benaderen door veeltermen:

$f(x) \approx a_0$	(nulde graad)
$f(x) \approx a_0 + a_1x$	(eerste graad)
$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2$	(tweede graad)
$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$	(derde graad)
$\vdots$	

Stelling 5.1: Termsgewijze afleiding

Men mag (34) afleiden alsof het rechterlid een eindige som was, m.a.w.: in $]-1, 1[$ of in $\mathbb{R}$ (afhankelijk van de reeks) is

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \dots$$

(Het bewijs van deze stelling zou ons te ver voeren en geven we daarom niet.)

2. Fundamentele voorbeelden**2.1. Ontwikkeling van de exponentiële functie.** We hebben

$$(35) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

BEWIJS. • Voor elke x is de reeks in het rechterlid van (35) convergent. We hebben immers

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

voor elke x . Door de regel van d'Alembert volgt convergentie voor elke x .

- De reekssom van het rechterlid van (35) is e^x . Noem de reekssom van het rechterlid voorlopig $f(x)$, m.a.w.

$$f(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

voor elke x . Door termgewijze afleiding is

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1' + x' + \left(\frac{x^2}{2!} \right)' + \left(\frac{x^3}{3!} \right)' + \cdots + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)' + \cdots \\ &= 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= f(x), \end{aligned}$$

terwijl

$$f(0) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

De functie $f(x)$ voldoet dus aan de eigenschappen

$$\begin{cases} \bullet \text{ ze is haar eigen afgeleide} \\ \bullet \text{ haar waarde in 0 is 1.} \end{cases}$$

Dat zijn ook de eigenschappen waardoor we (zie (11)) de functie e^x gekenmerkt hebben. ■

GEVOLG 5.1. In heel $\mathbb{R}$ hebben we de steeds betere benaderingen

$$e^x \approx 1$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots$$

Voor $x = 1$, bijvoorbeeld, vinden we

$$\begin{aligned} e &\approx 1 \\ e &\approx 1 + 1 = 2 \\ e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5 \\ e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2,666\dots \\ e &\approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2,708\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.2. Binomiaalreeks. Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ hebben we de z.g. *binomiaalreeks*

$$(36) \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

BEWIJS.

- De reeks in het rechterlid van (36) convergeert voor $-1 < x < 1$. De algemene term van de reeks is

$$x_n := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

zodat

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n} \right| = |x| \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = |x| \left| \frac{n-\alpha}{n+1} \right|,$$

en

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n-\alpha}{n+1} \right| = |x|.$$

Door de regel van d'Alembert volgt dat er convergentie is voor $|x| < 1$, en geen convergentie voor $|x| > 1$.

- De reekssom van het rechterlid van (36) is $(1+x)^\alpha$. Noem de reekssom van het rechterlid voorlopig $f(x)$, m.a.w.

$$f(x) := 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

voor $-1 < x < 1$. Om te vinden dat $f(x) = (1+x)^\alpha$ zullen we aantonen dat voor $-1 < x < 1$

$$\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} = 1.$$

Daartoe zullen we aantonen dat

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{(1+x)^\alpha f'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0.$$

Om dit te hebben, moet

$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0,$$

d.i.

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x).$$

We berekenen dus $(1+x)f'(x) = f'(x) + xf'(x)$. We leiden termsgewijze af:

$$f'(x) = 0 + \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \dots$$

vermenigvuldigen met x :

$$xf'(x) = \alpha x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^3 + \dots$$

en tellen op:

$$\begin{aligned}
 f'(x) + xf'(x) &= \alpha + (\alpha(\alpha - 1) + \alpha)x + \left(\frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{2!} + \alpha(\alpha - 1) \right)x^2 + \dots \\
 &= \alpha + \alpha^2x + \alpha \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots \\
 &= \alpha \left(1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \dots \right) \\
 &= \alpha f(x).
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat voor $-1 < x < 1$

$$\left(\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right)' = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = \frac{0}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0,$$

zodat $\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$ constant is in het interval $] -1, 1[$. Invullen van $x = 0$ leert dat die constante de waarde $f(0) = 1$ heeft. Bijgevolg is $f(x) = (1+x)^\alpha$.

■

OPMERKING 5.2. De convergentie is enkel gegarandeerd voor $-1 < x < 1$.

GEVOLG 5.3. In het interval $] -1, 1[$ hebben we de steeds betere benaderingen

$$\begin{aligned}
 (1+x)^\alpha &\approx 1 \\
 (1+x)^\alpha &\approx 1 + \alpha x \\
 (1+x)^\alpha &\approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Voor $\alpha = \frac{1}{2}$, bijvoorbeeld, hebben we in het interval $] -1, 1[$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+x} &\approx 1 \\
 \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} \\
 \sqrt{1+x} &\approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Om in te zien hoe goed die benaderingen zijn: voor $x = 0,21$ vinden we als benaderingen voor $\sqrt{1,21} = 1,1$ de waarden

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1,21} &\approx 1 \\
 \sqrt{1,21} &\approx 1 + \frac{0,21}{2} = 1,105 \\
 \sqrt{1,21} &\approx 1 + \frac{0,21}{2} - \frac{0,0441}{8} = 1,099\dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

2.3. Algemene werkwijze. We geven nu een algemene werkwijze om een Taylorreeks op te stellen.

Stelling 5.2

Als een functie $f(x)$ voor alle $-1 < x < 1$ of voor alle $x \in \mathbb{R}$ de volgende eigenschappen heeft:

$$(37) \quad \begin{cases} f'(x), f''(x), \dots \text{ bestaan} \\ |f'(x)| \leq C, |f''(x)| \leq C, \dots \end{cases}$$

met C een vast reëel getal, dan hebben we de Taylorreeks

$$(38) \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

voor alle $-1 < x < 1$ resp. voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(Het bewijs wordt niet gegeven.)

OPMERKING 5.4. Als de functie niet aan (37) voldoet, maar wel aan

$$(39) \quad |f^{(n)}(x)| \leq CD^n$$

met C en D vaste reële getallen, dan blijft de conclusie (62) geldig. Het bewijs verandert nauwelijks.

2.4. Ontwikkeling van sinus en cosinus. We hebben

$$(40) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

We zullen die Taylorreeks afleiden uit de algemene werkwijze. Voor $f(x) = \sin x$ hebben we

$$\sin' x = \cos x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \sin''' x = -\cos x, \quad \sin^{(iv)} x = \sin x, \dots$$

enzovoort (periodiek herhaald), zodat $|\sin^{(n)}(x)|$ ofwel $|\cos x|$ ofwel $|\sin x|$ is, in elk geval $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 0 + x \sin' 0 + \frac{x^2}{2} \sin'' 0 + \frac{x^3}{3!} \sin''' 0 + \frac{x^4}{4!} \sin^{(iv)} 0 + \dots \\ &= 0 + x \cos 0 + \frac{x^2}{2}(-\sin 0) + \frac{x^3}{3!}(-\cos 0) + \frac{x^4}{4!} \sin 0 + \dots \end{aligned}$$

d.i. (40).

GEVOLG 5.5. In $\mathbb{R}$ hebben we de steeds betere benaderingen

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x \\ \sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} \\ \sin x &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Door termsgewijze afleiding volgt uit (40)

$$(41) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (x \in \mathbb{R})$$

GEVOLG 5.6. In $\mathbb{R}$ hebben we de steeds betere benaderingen

$$\begin{aligned}\cos x &\approx 1 \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} \\ \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\ &\vdots\end{aligned}$$

OPMERKING 5.7. Als een bepaalde functie $f(x)$ in $\mathbb{R}$ of in $] -1, 1[$ echt een Taylorreeks heeft, dan kan die niets anders zijn dan

$$(42) \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots$$

Maar als $f(x)$ niet aan een voorwaarde van het type (37) of (39) voldoet, dan is de $=$ in (42) niet gegarandeerd, en voor sommige functies inderdaad fout! Men moet dus in elk geval afzonderlijk de convergentie controleren, of op zijn minst controleren dat de benaderingen

$$\begin{aligned}f(x) &\approx f(0) \\ f(x) &\approx f(0) + xf'(0) \\ f(x) &\approx f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) \\ f(x) &\approx f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) \\ &\vdots\end{aligned}$$

wel bruikbaar zijn.

VOORBEELD 5.8. 

Met het nodige geduld kan men vinden dat

$$\begin{aligned}\tan' x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan'' x &= \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} \\ \tan''' x &= \frac{4 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\cos^4 x} \\ &\vdots\end{aligned}$$

waaruit voor $x = 0$

$$\tan 0 = 0, \quad \tan' 0 = 1, \quad \tan'' 0 = 0, \quad \tan''' 0 = 2, \quad \tan^{(iv)} 0 = 0, \quad \tan^{(v)} 0 = 16, \quad \dots$$

Dit leidt tot het vermoeden dat de tangens als Taylorreeks heeft

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

Die begintermen van de Taylorreeks kan men veel efficiënter vinden door $\sin x$ en $\cos x$ te vervangen door hun Taylorreeks, en van het quotiënt alle termen in x^6 en hoger te laten vallen. Dus:

$$\begin{aligned}\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots} \\ &= x \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots}{1 - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots)}.\end{aligned}$$

Noteren we kortweg

$$X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots,$$

dan is dus

$$(43) \quad \tan x = x \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots}{1 - X}.$$

Voor $|x|$ klein genoeg (nl. zo klein dat $|X| < 1$) vinden we (oefening)

$$\frac{1}{1 - X} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \text{termen in } x^6, x^7, \dots$$

waaruit, na invullen in (43)

$$\tan x = x \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots}{1 - X} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

(oefening).