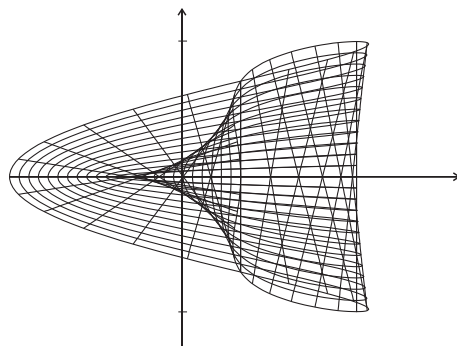




UNIVERSITEIT GENT
FACULTEIT WETENSCHAPPEN



ANALYSE IIa

Prof. J. Vindas
Editie 2019-2020

Analyse IIa behandelt

Fourierreeksen, lineaire differentiaalvergelijkingen en functies van verschillende reële veranderlijken

*en wordt
(voor studenten Wiskunde)
gevolgd door*

IIb. Differentiaalvergelijkingen

Met dank aan Prof. C. Impens voor het ter beschikking stellen van de tekst waarop deze cursus gebaseerd is. Wil zo vriendelijk zijn alle onvolkomenheden, klein en groot, te signaleren aan jasson.vindas@ugent.be. Dank bij voorbaat.

De figuur op de kaft toont een draadmodel van de z.g. band van Möbius, een oppervlak dat maar één kant heeft.

Hoofdstuk 1

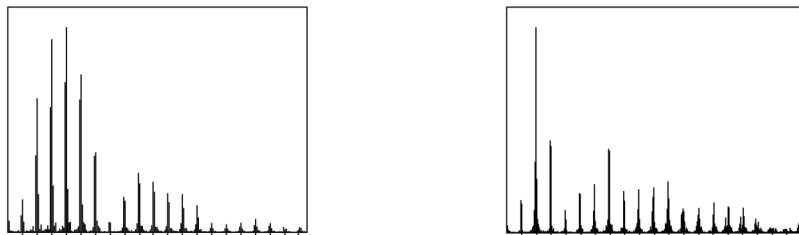
Fourierreeksen

Een groot wiskundig gedicht.

(LORD KELVIN over het werk van Fourier, 1864)

De beschrijving van de beweging van een trillende snaar werd door d'Alembert en Euler gegeven m.b.v. twee arbitraire functies, en door Daniel Bernoulli m.b.v. een reeks van sinussen en cosinussen. Zo groeide het idee dat het misschien mogelijk was een 'willekeurige' functie te ontwikkelen in sinussen en cosinussen. Na een flinke controverse toonde Fourier in 1822 dat dit inderdaad zo was: zulke ontwikkeling wordt naar hem *Fourierontwikkeling* genoemd. Een echt overtuigend bewijs werd pas door Dirichlet geleverd in 1829.

Fourierontwikkelingen vinden toepassingen in de signaalanalyse. Zo worden bv. luchttrillingen door het menselijk gehoor waargenomen als een geluidssignaal. Als de trilling periodiek is, dan bezit het signaal een toonhoogte. De relatieve sterkte van de coëfficiënten in de Fourierontwikkeling van het periodieke signaal bepaalt de klankkleur. Het analyseren (en aanpassen) van de Fouriercoëfficiënten wordt daarom ook *harmonische analyse* genoemd en wordt op grote schaal toegepast in de muziekindustrie (akoestische filters, MP3-compressie, ...). De toepassingen blijven zeker niet beperkt tot geluidssignalen: in bijna elke tak van de wetenschap wordt harmonische analyse toegepast op periodieke signalen.



Figuur 1.1: Fouriercoëfficiënten van het geluid van een gitaar, links zonder en rechts met *distortion* (de lengte van het n -de staafje komt in onze notatie overeen met $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$).

1.1 Fourierreeksen

1.1.1 Definitie. Een **Fourierreeks** of **goniometrische reeks** is een reeks van functies van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.1)$$

met a_n, b_n reële constanten. Hierin is $\cos nx$ geschreven voor de afbeelding $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \cos nx$, en analoog voor $\sin nx$.

Omdat elk van de termen van een Fourierreeks 2π -periodiek is, is haar reekssom dat ook (in de punten waar de reeks convergeert).

Wegens $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ hebben we dat $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ en $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Berekeningen met Fourierreeksen vereenvoudigen soms door de reeks uit te drukken d.m.v. de complexe exponentiële: de n -de partiële som wordt dan

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{a_k - ib_k}{2}}_{=:c_k} e^{ikx} + \underbrace{\frac{a_k + ib_k}{2}}_{=:c_{-k}} e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

met $c_k \in \mathbb{C}$, en voor de reekssom schrijven we

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} := c_0 + (c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix}) + \dots + (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

We leiden nu een methode af om de coëfficiënten van een Fourierreeks met reekssom $f(x)$ uit te drukken a.d.h.v. de functie $f(x)$.

1.1.2 Hulpstelling (Orthogonaliteit¹). *Als $n \neq m$, dan is $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = 0$.*

Bewijs. Als $m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq n$, dan is

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)t dt = 0.$$

□

1.1.3 Stelling. *Als de Fourierreeks (1.1) gelijkmatig convergeert over \mathbb{R} met reekssom f , dan is*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$$

of nog,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

¹De term *orthogonaliteit* komt voort uit de analogie met orthogonale vectoren e_j ($j = 1, \dots, n$) in \mathbb{R}^n , waarvoor het inproduct $e_i \cdot e_j = 0$ als $i \neq j$.

Bewijs. Door de gelijkmatige convergentie is de reekssom f continu en is het toegestaan reeks en integraal te verwisselen. De convergentie blijft bovendien gelijkmatig als we vermenigvuldigen met de begrensde functie e^{-inx} :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x)e^{-inx} - f(x)e^{-inx}| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |s_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Gebruik makend van de orthogonaliteit vinden we

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx &= c_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx + \left(c_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix} e^{-inx} dx + c_{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix} e^{-inx} dx \right) + \dots \\ &= c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = c_n \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi c_n, \end{aligned}$$

zodat ook

$$\begin{aligned} a_n = c_n + c_{-n} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{-inx} + e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)i(e^{-inx} - e^{inx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

□

1.1.4 Opmerking. Als de Fourierreeks gelijkmatig convergeert, dan is de reekssom continu (overdracht van continuïteit). Er zal echter blijken dat we ook functies met sprongpunten kunnen schrijven als een Fourierreeks: in dat geval kan de convergentie nooit gelijkmatig zijn.

1.2 Fourierontwikkeling

We bekijken nu de omgekeerde vraag: kunnen we een gegeven functie f ontbinden in een Fourierreeks?

1.2.1 Definitie. Als f een afbeelding $[-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ is, dan noemen we de coëfficiënten a_n en b_n uit stelling 1.1.3 de **Fouriercoëfficiënten** van f . De Fourierreeks met die coëfficiënten noemt men de **Fourierontwikkeling**² van f .

1.2.2 Opmerking. Als f even is, zijn de Fouriercoëfficiënten

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{en} \quad b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

terwijl voor een oneven f

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{en} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Het is niet zeker dat de Fourierontwikkeling van f convergeert en, als ze convergeert, dat haar reekssom f is. We zullen bewijzen dat dit wel zo is als f (ook na periodieke uitbreiding) van klasse C^1 is.

²J.B. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822

1.2.3 Hulpstelling. De n -de partieelsom van de Fourierontwikkeling van een 2π -periodieke afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gelijk aan

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt, \quad \text{waarbij } D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikt}.$$

Bewijs. We kiezen $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ en berekenen

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{ikx} e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{ik(x-u)} du \\ &\stackrel{(u-x=t)}{=} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} dt = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Doordat f en D_n beide 2π -periodiek zijn, is ook het hele integrandum 2π -periodiek. In plaats van over $]-\pi-x, +\pi-x[$ kunnen we dus integreren over gelijk welk interval met lengte 2π , b.v. over $]-\pi, \pi[$. \square

1.2.4 Gevolg. De Fourierontwikkeling van een 2π -periodieke afbeelding $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convergeert in het punt $x \in \mathbb{R}$ naar $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t) dt$ (als deze limiet bestaat).

1.2.5 Definitie. De functie D_n noemen we de n -de kernfunctie van Dirichlet.

Uit haar definitie volgt dat D_n continu is op heel \mathbb{R} en 2π -periodiek met

$$\boxed{\int_0^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^0 D_n = \frac{1}{2} \quad \text{en} \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n = 1}$$

1.2.6 Hulpstelling. Voor alle natuurlijke n en $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ is

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (1.2)$$

Bewijs. Omdat $1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$ als $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$, is

$$\begin{aligned} 2\pi D_n(x) &= \frac{1 + e^{ix} + \dots + e^{i2nx}}{e^{inx}} = \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{(e^{ix} - 1)e^{inx}} \\ &= \frac{(e^{i(2n+1)x} - 1)e^{-i(n+1/2)x}}{(e^{ix} - 1)e^{-ix/2}} = \frac{e^{i(n+1/2)x} - e^{-i(n+1/2)x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

\square

1.2.7 Hulpstelling (Hulpstelling van Riemann). Is f integreerbaar over $]a, b[$, dan geldt dat

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

Bewijs. Zij willekeurig $\varepsilon > 0$, en onderstel dat $|f| \leq M$ in $]a, b[$. Omdat f integreerbaar is, bestaat er een partitie $\pi := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ van $[a, b]$ waarvoor

$$S_\pi - s_\pi = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \ell_k < \varepsilon/2.$$

In elk interval $]x_{k-1}, x_k[$ definiëren we ω_k d.m.v.

$$\omega_k(x) := f(x) - m_k \quad (x_{k-1} < x < x_k),$$

zodat voor $k = 1, 2, \dots, n$ geldt dat

$$0 \leq \omega_k(x) \leq M_k - m_k \quad (x_{k-1} < x < x_k).$$

Dan hebben we

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx &= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \sin \lambda x \, dx \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x \, dx + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \omega_k(x) \sin \lambda x \, dx. \end{aligned}$$

Voor $\lambda > 0$ leiden we hieruit af dat

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n |m_k| \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sin \lambda x \, dx \right| + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\omega_k(x) \sin \lambda x| \, dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n |m_k| \left| \frac{\cos \lambda x_{k-1} - \cos \lambda x_k}{\lambda} \right| + \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (M_k - m_k) \underbrace{|\sin \lambda x|}_{\leq 1} \, dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n M \frac{1+1}{\lambda} + \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= n \frac{2M}{\lambda} + S_\pi - s_\pi \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

als λ voldoende groot is. □

Voor de volgende stellingen uit dit hoofdstuk zijn gewone continuïteit of integreerbaarheid niet voldoende, en hebben we een aangepast begrip nodig.

1.2.8 Definitie. Een functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ noemen we over $[a, b]$ **stuksgewijs C^1 met verdeelpunten $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1 < \dots < \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$** als $f|_{]x_{j-1}, x_j[}$ voor elke $j = 1, 2, \dots, k$ de restrictie is van een functie in $C^1([x_{j-1}, x_j])$.

1.2.9 Opmerking. Om aan de definitie te voldoen hoeft f niet gedefinieerd te zijn in de verdeelpunten, en zij is niet noodzakelijk continu over $[a, b]$. Zij is integreerbaar over $]a, b[$. Bovendien heeft f in a een rechterlimiet, in b een linkerlimiet en in elk punt van $]a, b[$ een rechter- en een linkerlimiet.

1.2.10 Stelling (Singuliere Integraal van Dirichlet). *Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan is*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f D_n = \frac{f(0+) + f(0-)}{2} \quad (1.3)$$

Bewijs. De formule (1.3) is de som van de twee formules

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f D_n = \frac{f(0+)}{2} \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 f D_n = \frac{f(0-)}{2}. \quad (1.5)$$

We tonen expliciet (1.4) aan; (1.5) krijgt men op analoge wijze. M.b.v. $\int_0^{\pi} D_n = \frac{1}{2}$ zien we dat (1.4) neerkomt op

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f D_n = f(0+) \int_0^{\pi} D_n, \quad \text{d.i.} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (f - f(0+)) D_n = 0.$$

Omdat

$$\int_0^{\pi} (f - f(0+)) D_n = \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{f(x) - f(0+)}{2\pi \sin \frac{x}{2}}}_{=:g(x)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x dx$$

zal dit volgen uit de hulpstelling van Riemann op voorwaarde dat $g(x)$ integreerbaar is op $]0, \pi[$. We bewijzen dus dat g integreerbaar is over $]0, \pi[$. Bij onderstelde is f stuksgewijs C^1 in $[-\pi, \pi]$, stel met verdeelpunten

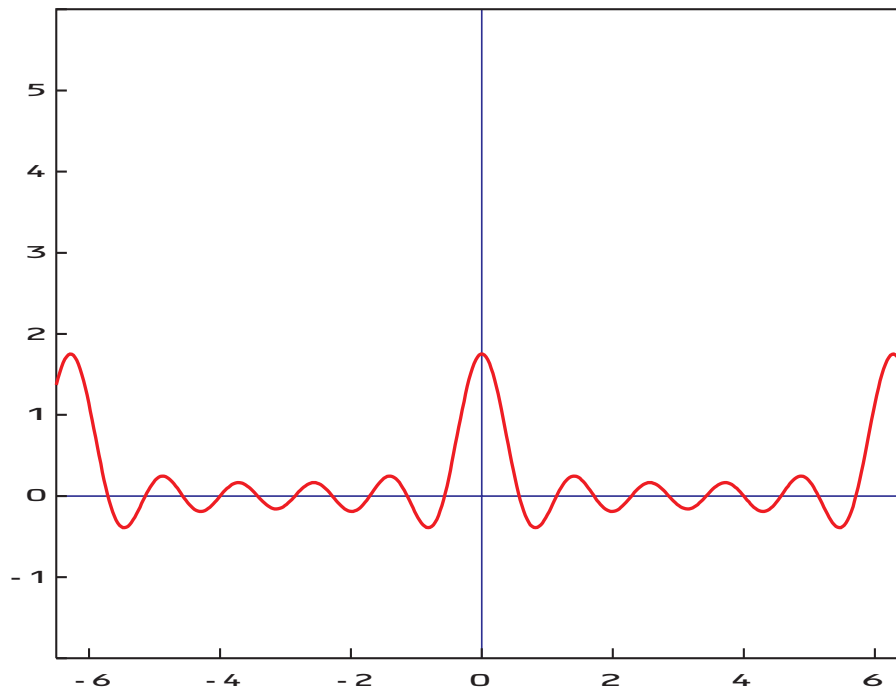
$$\underbrace{-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_j < \dots < x_k = \pi}_{\leq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{> 0}$$

Op elk interval $]x_j, x_{j+1}[, \dots,]x_k, \pi[$ is g de restrictie van een continue afbeelding. Wegens de stelling van additiviteit van de integraal (zie cursus Analyse I) is g integreerbaar over $]x_j, \pi[$. We moeten nog aantonen dat g integreerbaar is over het interval $]0, x_j[$. Wegens de l'Hospital is nu

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0+)}{2\pi \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x)}{\pi \cos \frac{x}{2}} = \frac{f'(0+)}{\pi},$$

zodat we $g(x)$ in $x = 0$ kunnen uitbreiden tot een continue functie. Omdat g ook in $x = x_j$ kan worden uitgebreid tot een continue functie, besluiten we dat g integreerbaar is over $]0, x_j[$ en bijgevolg over $]0, \pi[$. \square

1.2.11 Opmerking. De formule (1.3) noemt men de *zeefeigenschap* omdat één waarde (nl. $f(0)$) door de combinatie limiet+integraal uit het integrandum gezeefd wordt. Integralen die een zeefeigenschap vertonen heten *singulier*. De zeefeigenschap is het gevolg van het feit dat D_n voor groter wordende waarden van n een steeds hogere piek krijgt in de oorsprong. (Vergelijk, in de figuren 1.2 en 1.3, de beeldlijnen van D_5 en D_{15} .)



Figuur 1.2: Kernfunctie van Dirichlet D_5 .

1.2.12 Stelling (Convergentie van de Fourierontwikkeling). *Als f 2π -periodiek is en stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f in elke $x \in \mathbb{R}$ naar $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$, m.a.w.*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

met a_n, b_n de Fouriercoëfficiënten van f .

Bewijs. We hebben in stellingen 1.2.3 en 1.3 alles voorhanden om het bewijs te voltooien:

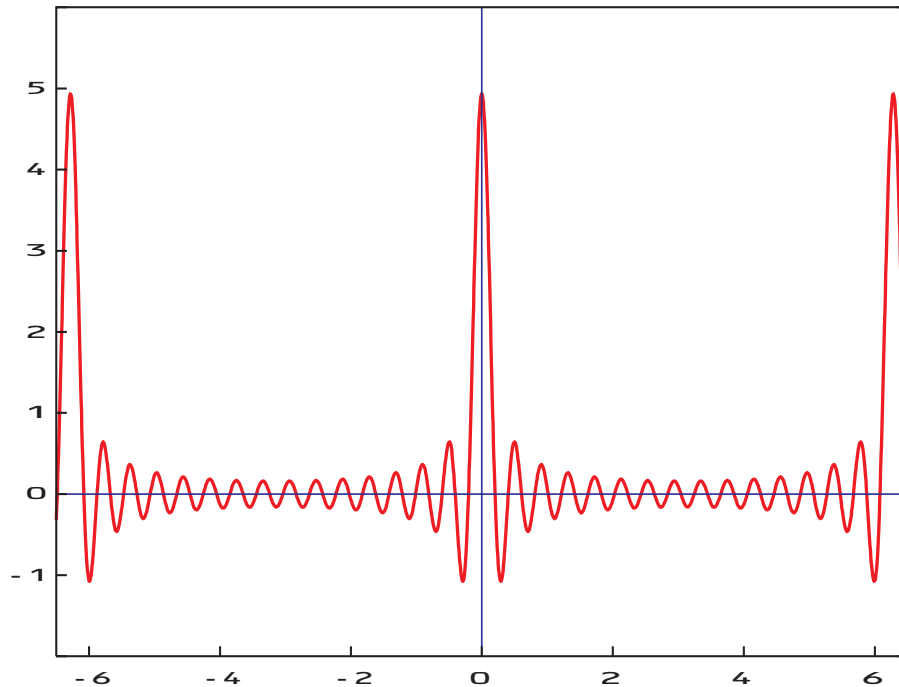
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

omdat de functie $f_x(t) := f(x+t)$ (met x vast) stuksgewijs C^1 is op heel \mathbb{R} met $f_x(0) = f(x)$. \square

In een discontinuïteitspunt x van f convergeert de Fourierontwikkeling dus naar de gemiddelde waarde van de sprong van f in x .³ Als er geen discontinuïteitspunten zijn, krijgen we het volgende resultaat:

1.2.13 Gevolg (Convergentie van de Fourierontwikkeling, bijzonder geval). *Als f 2π -periodiek is en van klasse C^1 op heel \mathbb{R} , dan convergeert de Fourierontwikkeling van f op heel \mathbb{R} naar f .*

³Intuïtief komt dit omdat de kernfuncties van Dirichlet even zijn (waardoor ze de waarden links en rechts van de oorsprong met hetzelfde gewicht uitgeven).



Figuur 1.3: Kernfunctie van Dirichlet D_{15} .

Om dit resultaat ook voor *niet-periodieke* functies te kunnen toepassen voeren we enkele definities in.

1.2.14 Definitie. Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan definieert men de **periodieke uitbreiding**, genoteerd f^π , als de functie (niet noodzakelijk overal gedefinieerd) die ontstaat door de beperking $f/[-\pi, \pi[$ periodiek met periode 2π voort te zetten. De **genormaliseerde periodieke uitbreiding** wordt gedefinieerd door

$$f^{\pi, \nu}(x) := \frac{f^\pi(x+) + f^\pi(x-)}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Deze laatste functie is over heel \mathbb{R} gedefinieerd want f^π heeft in elk punt een rechter- en een linkerlimiet.

1.2.15 Stelling. *Is f stuksgewijs C^1 over $[-\pi, \pi]$, dan convergeert de Fourierontwikkeling van f in elke $x \in \mathbb{R}$ naar $f^{\pi, \nu}(x)$.*

Bewijs. Pas de convergentiestelling 1.2.12 toe op de periodieke functie f^π . □

Op volkomen analoge wijze⁴ toont men de volgende veralgemening van de theorie aan, waarin niet langer het interval $[-\pi, \pi]$, maar een willekeurig interval $[-L, L]$ ($L > 0$) het uitgangspunt is, en de periode dus $2L$ is i.p.v. 2π .

1.2.16 Stelling. *Als f stuksgewijs C^1 is over $[-L, L]$, en als men de Fouriercoëfficiënten*

⁴of door de vorige stelling toe te passen op een herschaalde functie $g(x) := f(cx)$, voor een gepaste $c > 0$

t.o.v. $[-L, L]$ definieert d.m.v.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

dan convergeert

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

over \mathbb{R} naar de genormaliseerde periodieke uitbreiding van f buiten $[-L, L]$.

1.3 Oefeningen

- Geef de Fourierontwikkeling (t.o.v. $[-\pi, \pi]$) van de volgende functies, en ga na waar ze geldig is:

$$(1) x \quad (2) |x| \quad (3) f(x) = \begin{cases} -1 & \forall x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[\\ 1 & \forall x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (4) x^2.$$

- Ontwikkel de functie $f(x) = \begin{cases} x & \forall x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & \forall x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$ in reeks van cosinussen, en ga na waar die ontwikkeling geldig is.

- Ontwikkel de functie $f(x) = \begin{cases} a & \forall x \in [0, \pi/2[\\ -a & \forall x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$ (met a constant) in reeks van sinussen, en ga na waar die ontwikkeling geldig is.

- Construeer een reeks van sinussen die over $[0, 1]$ samenvalt met de functie $f(x) = \begin{cases} (1-a)x & \forall x \in [0, a] \\ a(1-x) & \forall x \in [a, 1] \end{cases}$ met $0 < a < 1$ constant.

- (1) Bepaal de Fourierontwikkeling van $f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$ t.o.v. $[-5, 5]$ (2) Bepaal de reekssom van de gevonden reeks (3) Definieer $f(-5)$, $f(0)$, $f(5)$ zo dat de gevonden reeks de Fourierontwikkeling is van de nieuwe f over $[-5, 5]$.

- (1) Stel de Fourierontwikkeling op van $\cos \alpha x$ t.o.v. $[0, \pi]$ (α constant, $\alpha \notin \mathbb{Z}$) (2) Leid uit deze Fourierreeks een reeks af voor $1/\tan \alpha\pi$.

- (1) Stel de Fourierontwikkeling op van de functie $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ \sin x & (0 < x < \pi) \end{cases}$ (2) Onderzoek de convergentie van die reeks (3) Bereken $\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$

8. (1) Ontwikkel $x(\pi - x)$ ($0 < x < \pi$) in een reeks die enkel sinussen bevat (2) Onderzoek de convergentie van die reeks (3) Bereken de reekssom $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$.
9. (1) Ontwikkel $f(x) := \cos x$ ($0 < x < \pi$) in een reeks van sinussen (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Definieer $f(0)$ en $f(\pi)$ zo dat de reeks naar $f(x)$ convergeert in heel $[0, \pi]$ (4) Bereken de reekssom $\frac{1}{3} - \frac{3}{35} + \frac{5}{99} - \frac{7}{195} + \frac{9}{323} - \dots$.
10. (1) Ontwikkel $f(x) := \sin x$ ($0 < x < \pi$) in een reeks van cosinussen (2) Bepaal de reekssom en verklaar (3) Definieer $f(0)$ en $f(\pi)$ zo dat de reeks naar $f(x)$ convergeert in heel $[0, \pi]$.
11. Geef voor de volgende functies de Fourierontwikkeling t.o.v. het opgegeven interval, en bepaal er de reekssom van:
- (1) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ t.o.v. $[-3, 3]$ (2) $f(x) = \begin{cases} 2 + 3x & 0 \leq x < 4 \\ 0 & -4 < x < 0 \end{cases}$ t.o.v. $[-4, 4]$ (3) $f(x) = \begin{cases} \cosh x & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ \cosh x & 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ t.o.v. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
12. (1) Ontwikkel $x(\pi - x)$ ($0 < x < \pi$) in een reeks die enkel cosinussen bevat (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Bepaal de reekssom van $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$.
13. (1) Geef de Fourierontwikkeling van $f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ (2) Onderzoek de convergentie van de gevonden reeks (3) Bepaal de reekssom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.
14. (1) Geef de Fourierontwikkeling van $\sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) t.o.v. $[-\pi, \pi]$. (2) Vul in de bekomen reeks de waarde $x = \pi/2$ in en leid daaruit af dat $\frac{1}{\cos \beta} = 4\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{\pi^2 (2k+1)^2 - 4\beta^2}$ voor alle $\beta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.
15. (1) Geef een reeks van *cosinussen* die voor $0 < x < 2$ convergeert naar de functie $f(x) = x$. (2) Geef de reekssom in $x = 0$ en $x = 2$. Leg uit. (3) Geef de waarde van $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$.

Inhoud

1	Fourierreeksen	3
1.1	Fourierreeksen	4
1.2	Fourierontwikkeling	5
1.3	Oefeningen	11
2	Lineaire differentiaalvergelijkingen	13
2.1	Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde	13
2.2	Differentiaalvergelijkingen van hogere orde	14
2.3	Differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	17
2.4	Methode van de onbepaalde coëfficiënten	19
2.5	Operatormethode	21
2.6	Oefeningen	22
3	Differentiaalrekening met verschillende veranderlijken	26
3.1	De euclidische ruimte	26
3.2	Rijen	29
3.3	Limieten	32
3.4	Continuïteit	33
3.5	Afleidbaarheid in twee veranderlijken	34
3.6	Afleidbaarheid in $n \geq 2$ veranderlijken	38
3.7	Elementaire vectoranalyse	43
3.8	Oefeningen	48
4	Impliciete functies	52
4.1	Afgeleiden als lineaire afbeeldingen	52
4.2	Impliciete functies	54
4.3	Stelling van de inverse functies	58
4.4	Aanvullingen	59
4.5	Oefeningen	60
5	Lijnintegralen	61
5.1	Aanvulling	61
5.2	Gladde krommen	62
5.3	Lijnintegraal van een continu scalairenveld	64
5.4	Lijnintegraal van een continu vectorveld	66
5.5	Oefeningen	71

6	Dubbelintegralen	72
6.1	Opbouw en herleiding tot enkelvoudige integralen	72
6.2	Dubbelintegralen in poolcoördinaten	85
6.3	Stelling van Green	88
6.4	Oefeningen	92
7	Oppervlakte-integralen	93
7.1	Gladde oppervlakken	93
7.2	Oppervlakte-integraal van een continu scalairenveld	96
7.3	Oppervlakte-integraal van een continu vectorveld	98
7.4	Oefeningen	105
8	Drievoudige integralen	108
8.1	Opbouw en herleiding	108
8.2	Divergentiestelling	109
8.3	Drievoudige integralen in cilinder- en in bolcoördinaten	112
8.4	Oefeningen	116

Trefwoorden

- n -dimensionale euclidische ruimte, 26
- x -projecteerbaar gebied, 83
- xy -projecteerbaar gebied, 108
- xz -projecteerbaar gebied, 108
- y -projecteerbaar gebied, 84
- yz -projecteerbaar gebied, 108

- aaneensluitende oriëntaties, 105
- adherent punt, 27
- afgesloten oppervlak, 103
- afleidbaar, 35
- afstand, 26, 30
- azimuthhoek, 48

- beginpunt, 33, 68
- begrensd, 27
- Bernoulli
 - Daniel, 3
- bijna overal continu, 79
- bolcoördinaten, 48
- boloppervlak, 94
- Bolzano, 33
- Bolzano-Weierstrass, 29
- booglengte, 65
- bovenintegraal, 72
- bovensom, 72

- Cantor, 31
- Cauchy-Schwarz, 48, 61, 67
- C^1 , 37
- cilindercoördinaten, 47
- C^n , 38
- compact, 27
- continu, 33

- d'Alembert, 3
- diameter, 27
- diffeomorfisme, 58

- differentiaalvergelijking, 13
- Dirichlet, 3, 6
- divergentiestelling, 110
- doorprikte omgeving, 27
- dubbelintegraal, 72

- eenvoudig gebied, 88, 109
- eindpunt, 33, 68
- Euler, 3
- extremumstelling, 34

- Fourier, 3, 5
- Fouriercoëfficiënten, 5
- Fourierontwikkeling, 5

- Gauss, 110
- geïsoleerd punt, 27
- gebied, 33
- gebroken lijn, 33
- gelijk georiënteerd, 99
- genormaliseerde periodieke uitbreiding, 10
- gesloten, 27
- gesloten bal, 27
- gesloten oppervlak, 103
- glad, 37
- glad oppervlak, 93
- gladde kromme, 62
- gradiënt, 43
- Green, 88, 110
- grens, 27
- grenspunt, 27
- Guldin, 98, 115

- Heine, 34
- Heine-Borel, 31
- Hoene, 17
- homogeen, 13
- homogene functiestelling van Euler, 51

- inproduct, 26
- integreerbaar, 72
- inwendig punt, 26
- inwendige, 26

- Jacobiaan(se determinant), 52, 87
- Jacobiaanse matrix, 52

- karakteristieke veelterm, 18
- Kelvin, 100
- kenmerk van Cauchy, 30
- kenmerk van Darboux, 73
- kernfunctie van Dirichlet, 6
- kettingregel, 39, 53
- kringintegraal, 88

- Laplaciaan, 43
- lengte, 26
- lijnintegraal
 - van scalairenveld, 64
 - van vectorveld, 66
- lijnstuk, 33
- limiet, 32

- Möbiusband, 103
- middelwaardestelling, 42
 - voor dubbelintegralen, 75

- normaalvector, 93
- nulverzameling, 78

- omgeving, 26
- onbepaalde coëfficiënten, 20
- onderintegraal, 72
- ondersom, 72
- open, 27
- open bal, 26
- open gebied, 33
- ophopingspunt, 27
- oplossing van differentiaalvergelijking, 13
- oppervlakte, 82, 97
- oppervlakte-integraal
 - van scalairenveld, 96
 - van vectorveld, 98
- oppervlaktenormaal, 93
- Ostrogradski, 110
- overgang tussen parametervoorstellingen,
 - 64, 96

- Pappus, 115
- parametervoorstelling, 62, 93
- partiële afgeleide, 36
- partitie, 72
- periodieke uitbreiding van f , 10
- projectie, 39
- punt, 26

- raakvector, 62
- radiale eenheidsvector, 110
- rand, 27
- randkromme, 104
- randpunt, 27
- Riemann, 6
- Riemannintegreerbaar, 72
- rij, 29
- rotor, 43
- ruimtehoek, 112

- scalair(en)veld, 43
- sfeer, 94
- singuliere integraal, 8
- singuliere integraal van Dirichlet, 8
- sluiting, 27
- stervormig oppervlak, 110
- Stokes, 99
- stuksgewijze glad oppervlak, 103
- stuksgewijze gladde kromme, 68

- Taylorformule, 77
- tegengesteld georiënteerd, 99
- torusoppervlak, 94
- totale afgeleide, 52

- vector, 26
- vector(en)veld, 43
- vectorwaardige functie, 39
- vergelijking
 - tweede orde, 14
- verlaging van orde, 14
- vernestelde compacta, 31
- volume, 114

- Weierstrass, 34
- wervelvrij, 69
- Wronski, 17

- zeefeigenschap, 8
- zenitsafstand, 48