Hoofdstuk 7: Elementaire functies

Analyse I

Universiteit Gent

De logaritme

De (natuurlijke) logaritme $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als

$$\boxed{\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x > 0).}$$

Eigenschappen:

- $\ln 1 = 0$.
- ln is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, met i.h.b. $\boxed{\ln' x = \frac{1}{x}.}$
- ln is strikt stijgend over $\mathbb{R}^+$.
- De vergelijking $\ln x = 1$ heeft juist één oplossing, genoteerd e, en

$$2{,}6 < e < 2{,}8.$$

Definitie: Het getal $e = 2{,}7182\ldots$ noemt men het grondtal van de natuurlijke logaritme.

Eigenschappen van de logaritme

- Voor alle $x > 0$, $y > 0$ is

$$\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y};$$

  in het bijzonder is $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ voor alle $x > 0$.
- Voor alle $x > 0$ geldt

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

- $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty.$
- ln heeft als domein $\mathbb{R}^+$ en als waardenverzameling $\mathbb{R}$.
- Voor elke $k \in \mathbb{N}^+$ hebben we

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = 0.}$$

Een toepassing van $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^k}{x} = 0$

Stelling (Euclides). Er zijn oneindig veel priemgetallen.

We kunnen de volgende kwantitatieve (=betere!) versie bewijzen:

Stelling. Zij $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_k\}$ een eindige verzameling priemgetallen. Beschouw de verzameling

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N}^+ |\, p \text{ priem en deler van } n \Rightarrow p \in \mathcal{P}\}$$

en zijn telfunctie $T(x) = \#\{n \in \mathcal{N} |\, n \leq x\}$. Dan bestaat er $C > 0$ waarvoor

$$T(x) \leq C(\ln x)^k \qquad \textit{zodra} \quad x \geq e.$$

Conclusie: Als $\mathcal{P}$ de verzameling van alle priemgetallen was, dan $\mathcal{N} = \mathbb{N}^+$. We zouden echter hebben dat $T(x) = x$ en dus

$$1 = \frac{T(x)}{x} \leq C\frac{(\ln x)^k}{x} \qquad \text{tegenstrijdig met } \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x} = 0.$$

De exponentiële

De inverse van ln is de exponentiële (functie), genoteerd exp.

Eigenschappen:

- De verwantschap tussen ln en exp wordt gegeven door

$$\begin{cases} \exp(\ln x) &= x \quad (x > 0) \\ \ln(\exp x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

- exp heeft domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $\mathbb{R}^+$, is strikt stijgend en $\exp 0 = 1$.
- exp is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, met i.h.b. $\boxed{\exp' = \exp}$.
- Voor alle x, y is

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp x \exp y};$$

in het bijzonder is $\exp(-x) = 1/(\exp x)$ voor alle x.

Eigenschappen van de exponentiële

- We hebben de ongelijkheden

$$\begin{aligned} 1 + x &\leq \exp x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \exp x &\leq \frac{1}{1-x} \quad (x < 1). \end{aligned}$$

- $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty} \qquad \text{en} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0}$$

  .

- Voor een willekeurige veeltermfunctie $P(x)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{\exp x} = 0}.$$

Machtfuncties

Voor $x > 0$ en $y \in \mathbb{R}$

$$\boxed{x^y := \exp(y \ln x)}$$

- $e^y = \exp(y \ln e) = \exp y$, dus $\boxed{x^y = e^{y \ln x}}$.
- $$x^0 = 1$$
- $$x^y x^z = x^{y+z}$$
- $$x^{-y} = \frac{1}{x^y}$$
- $$(x^y)^z = x^{yz}$$
- $$(xy)^z = x^z y^z$$

Eigenschappen van $x \mapsto a^x$ (met $a > 0$)

- $x \mapsto a^x$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, $\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$.
- Is $a > 1$, dan is $x \mapsto a^x$ is strikt stijgend met

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0 \quad \text{(voor elke veelterm } P\text{)}.$$

- Is $0 < a < 1$, dan is $x \mapsto a^x$ strikt dalend met

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Eigenschappen van $x \mapsto x^a$ (met $x > 0$)

- $x \mapsto x^a$ onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, en $\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}}$.
- Is $a > 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt stijgend met $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$.
- Is $a < 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt dalend met $\lim_{x\to 0+} x^a = +\infty$.
- Afspraak $\boxed{0^a = 0 \quad (a > 0)}$.
- Notatie:

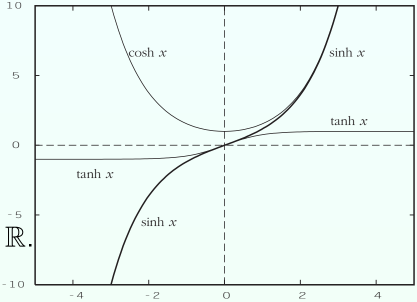
$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a^{1/n} & (a > 0,\ n \in \mathbb{N}^+) \\ -(-a)^{1/n} & (a < 0, n \text{ oneven}), \\ 0 & (a = 0,\ n \in \mathbb{N}^+). \end{cases}$$

- Is $a > 0$ en $n \in \mathbb{N}^+$, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige positief(!!) getal waarvan de n-de macht gelijk aan a is.
- Is $a < 0$ en n een oneven natuurlijk getal, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige getal waarvan de n-de macht gelijk aan a is.
- **Stelling** (Euler, 1743) $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x}$.

Hyperbolische functies

$$\boxed{\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$$\boxed{\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

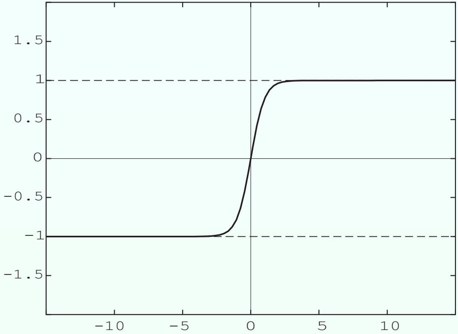


- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
  $$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
- $\sinh' = \cosh \quad$ en $\quad \cosh' = \sinh.$
- sinh is oneven en $\sinh 0 = 0$.
- sinh heeft als domein en waardenverzameling heel $\mathbb{R}$, is strikt stijgend.
- cosh is even en $\cosh 0 = 1$.
- cosh heeft als domein heel $\mathbb{R}$, als waardenverzameling $[1, +\infty[$, is strikt dalend in $]-\infty, 0[$, strikt stijgend in $]0, +\infty[$.

Hyperbolische functies

$$\boxed{\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}}$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

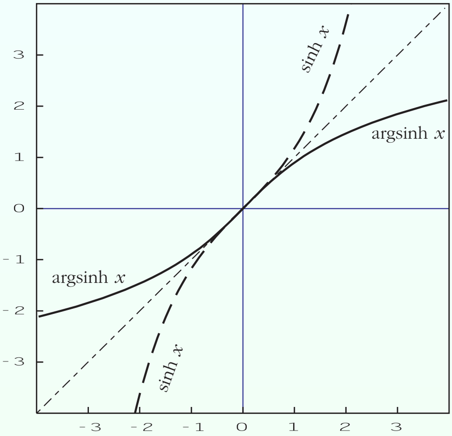


- $$\tanh' = \frac{1}{\cosh^2}.$$
- tanh is oneven
- domein $= \mathbb{R}$, waardenverzameling $=]-1, 1[$, strikt stijgend
- $$\lim_{x \to +\infty} \tanh x = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \tanh x = -1, \quad \tanh 0 = 0.$$

Inverse hyperbolische functies: argsinh

$$\operatorname{argsinh} := \sinh^{-1}$$

$$\begin{cases} \sinh(\operatorname{argsinh} x) & = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) & = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



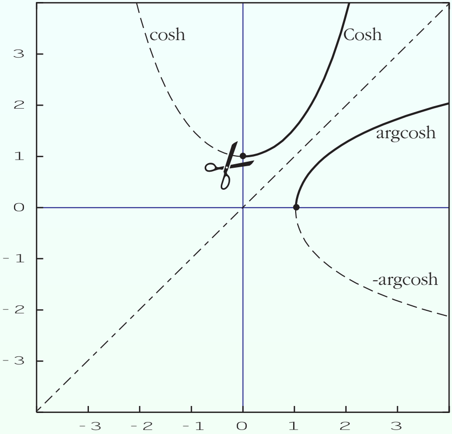
- domein = waardenverzameling = $\mathbb{R}$, strikt stijgend en $\operatorname{argsinh} 0 = 0$.
- $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Inverse hyperbolische functies: argcosh

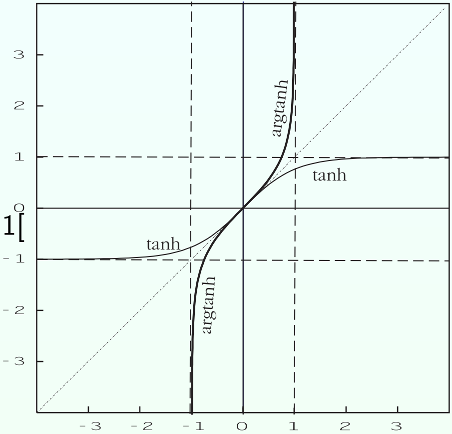
$$\text{Cosh} := \cosh\big|_{[0,+\infty[}$$

$$\text{argcosh} := \text{Cosh}^{-1}$$

$$\begin{cases} \cosh(\text{argcosh}\, x) &= x \quad \forall x \geq 1 \\ \text{argcosh}(\cosh x) &= x \quad \forall x \geq 0. \end{cases}$$



- domein $[1, +\infty[$, waardenverzameling $[0, +\infty[$, strikt stijgend en $\text{argcosh}\, 1 = 0$.
- $\text{argcosh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\text{argcosh}'\, x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



$$\operatorname{argtanh} := \tanh^{-1}$$

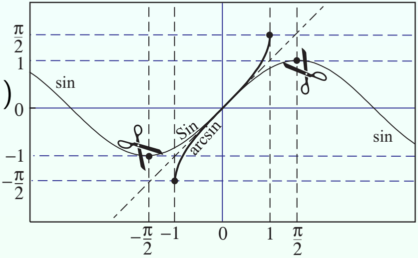
$$\begin{cases} \tanh(\operatorname{argtanh} x) & = x \quad \forall x \in \,]-1,1[\\ \operatorname{argtanh}(\tanh x) & = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- domein $= \,]-1,1[$, waardenverzameling $= \mathbb{R}$, strikt stijgend en $\operatorname{argtanh} 0 = 0$.
- $\operatorname{argtanh} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad \forall x \in \,]-1,1[$.
- $\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad \forall x \in \,]-1,1[$.

Inverse goniometrische functies: arcsin

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (x \in [-1,1])$$

$$\pi := 2 \arcsin 1$$

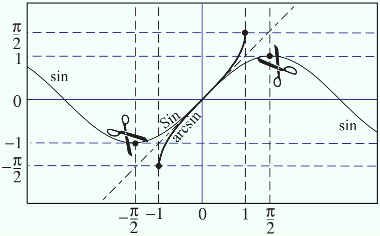


- $\arcsin 0 = 0$
- arcsin is oneven
- $$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1,1[$$
- arcsin is continu en strikt stijgend op heel $[-1,1]$.
- arcsin: domein $= [-1,1]$ en waardenverzameling $= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\mathrm{Sin} := (\arcsin)^{-1}$$

$$\sin x := \arcsin^{-1} x \ (x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right])$$

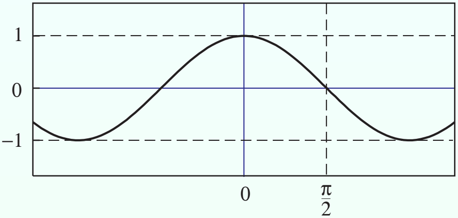
$$\sin(x + k\pi) := (-1)^k \sin x \ (k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R})$$



- $$\begin{cases} \sin(\arcsin x) & = x \quad (-1 \le x \le 1) \\ \arcsin(\sin x) & = x \quad (-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$
- sin is afleidbaar op heel $\mathbb{R}$ met $\sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$.

Goniometrische functies: sin en cos

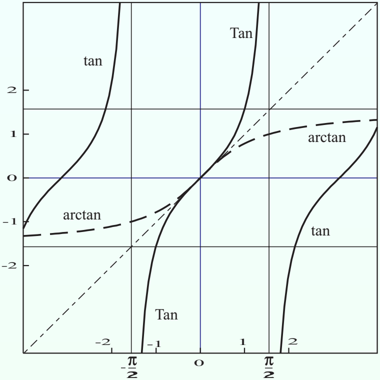
$\cos := \sin'$



- sin en cos zijn 2π-periodiek.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ en $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin' = \cos$ en $\cos' = -\sin$
- $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- sin is oneven en cos is even
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- cos is strikt dalend in $]0, \pi[$ en strikt stijgend in $]\pi, 2\pi[$

Goniometrische functies: tan

$$\tan(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \left(x \notin (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}\right)$$



- tan is oneven en π-periodiek
- $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$
- domein $= \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$, waardenverzameling $= \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to(\pi/2)-} \tan x = +\infty$ en $\lim_{x\to(-\pi/2)+} \tan x = -\infty$
- $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \notin (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}\right)$
- tan is strikt stijgend op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\tan x > x, \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ongelijkheid van Jordan

$$\boxed{\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \qquad (0 < x < \tfrac{\pi}{2})}$$

Bewijs.

- Stel $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ voor $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$, want $\tan x > x$ voor $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- f is strikt dalend op $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Bovendien is $f(0+) = 1$ en $f(\frac{\pi}{2}-) = \frac{2}{\pi}$
- $$f\left(\frac{\pi}{2} -\right) = \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 = f(0+) \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Toepassing: poolcoördinaten

Stelling. Als α en β reële getallen zijn met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, dan heeft het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta & = \alpha \\ \sin\theta & = \beta \end{cases}$$

juist één oplossing θ_0 in elk halfopen interval met lengte 2π.

Gevolg. Zij $P(x, y)$ een punt van het vlak $\mathbb{R}^2$, met $(x, y) \neq (0, 0)$. Dan bestaat er een unieke voerstraal $r > 0$ en een unieke poolhoek θ in een halfopen interval met lengte 2π (bijvoorbeeld in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$) waarvoor

$$x = r\cos\theta \quad \text{en} \quad y = r\sin\theta.$$

Bewijs. Stel $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Wegens vorige stelling bestaat er θ met

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

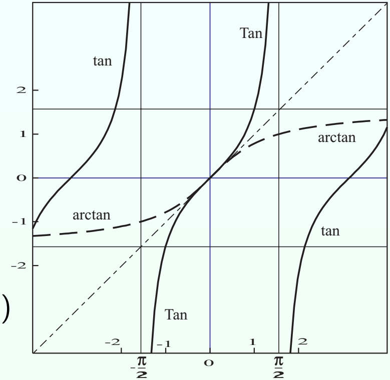
Inverse goniometrische functies: arccos en arctan

$$\arccos x := \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\mathrm{Tan} := \tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$$

$$\arctan := (\mathrm{Tan})^{-1}$$

$$\begin{cases} \tan(\arctan x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \arctan(\tan x) & = x \quad \left(x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \end{cases}$$



- $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
- domein $= \mathbb{R}$, waardenverzameling $= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- arctan is oneven en strikt stijgend
- $\arctan x < x, \quad \forall x > 0$
- $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ en $\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$
- $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.