Hoofdstuk 7

Elementaire functies en praktische integratie

In dit hoofdstuk leiden we de voornaamste eigenschappen van elementaire functies rigoureus af d.m.v. de theorie uit de vorige hoofdstukken. Om dit efficiënt te doen, wijken we dikwijls af van de historische ('natuurlijke') volgorde waarin de functies tot stand gekomen zijn.

Historisch gezien definieert men bijv. eerst a^x voor natuurlijke, dan voor gehele, dan voor rationale, en tenslotte voor reële x. Bij elke uitbreiding moet men dan nagaan dat de rekenregels geldig blijven. De logaritme verschijnt pas daarna wanneer we de inverse afbeelding van a^x bekijken. In de volgende paragraaf werken we omgekeerd, en vinden hierdoor met sprekend gemak de eigenschappen van a^b $(a, b \in \mathbb{R})$.

Analoog definiëren we eerst de boogsinus, en pas daarna de sinus, hoewel de historische volgorde omgekeerd is. Hierdoor kunnen we snel en rigoureus (zonder te steunen op 'meetkundig evidente' eigenschappen) de voornaamste eigenschappen van sinus aantonen.

In het onderdeel 7.3.6 zal blijken dat men, om alle rationale functies[1] te kunnen integreren, genoeg heeft aan het integreren van (a) veeltermen, (b) $\frac{1}{x}$ en (c) $\frac{1}{1+x^2}$. We besteden daarom bijzondere aandacht aan de integralen van $\frac{1}{x}$ en $\frac{1}{1+x^2}$.

7.1 De hyperbolische familie

7.1.1 De logaritme

De functie $f(t) = 1/t$ is continu over het open interval $J = \mathbb{R}^+$. Wegens 6.4.1 geldt voor elke $x > 0$ dat $\int_1^x \frac{dt}{t}$ bestaat en dat $\left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x}$. Vandaar

7.1.1 Definitie. De **(natuurlijke) logaritme**[2] $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd als

$$\boxed{\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad (x > 0).}$$

[1]Een **rationale functie** is een quotiënt van twee veeltermfuncties.

[2]In het Latijn: *logarithmus naturalis,* vanwaar de notatie; *log-arithmos* betekent *verhoudings-getal.* Leibniz en Wallis schrijven de verwantschap uit onze definitie toe aan Gregorio a San Vicente, beter bekend als *Grégoire de Saint Vincent* (° Brugge 1584, † Gent 1667).

7.1.2 Stelling.

1. $\ln 1 = 0$.
2. $\ln$ *is onbepaald afleidbaar over* $\mathbb{R}^+$*, met in het bijzonder*
$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$
3. $\ln$ *is strikt stijgend over* $\mathbb{R}^+$.
4. *De vergelijking* $\ln x = 1$ *heeft juist één oplossing, genoteerd* e*, en* $2{,}6 < e < 2{,}8$.
5. *Voor alle* $x > 0$*,* $y > 0$ *is* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$*; in het bijzonder is* $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ *voor alle* $x > 0$.
6. *Voor alle* $x > 0$ *geldt*
$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1.$$
7. *We hebben*
$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \textit{en} \quad \lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty.$$
8. $\ln$ *heeft als domein* $\mathbb{R}^+$ *en als waardenverzameling* $\mathbb{R}$.
9. *We hebben*
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Bewijs. 1. $\int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$.
2. De formule is een toepassing van 6.4.1. De afgeleide functie $x \mapsto \frac{1}{x}$ is op haar beurt onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$.
3. Wegens $\ln' x > 0$ voor alle $x > 0$.
4. We hebben

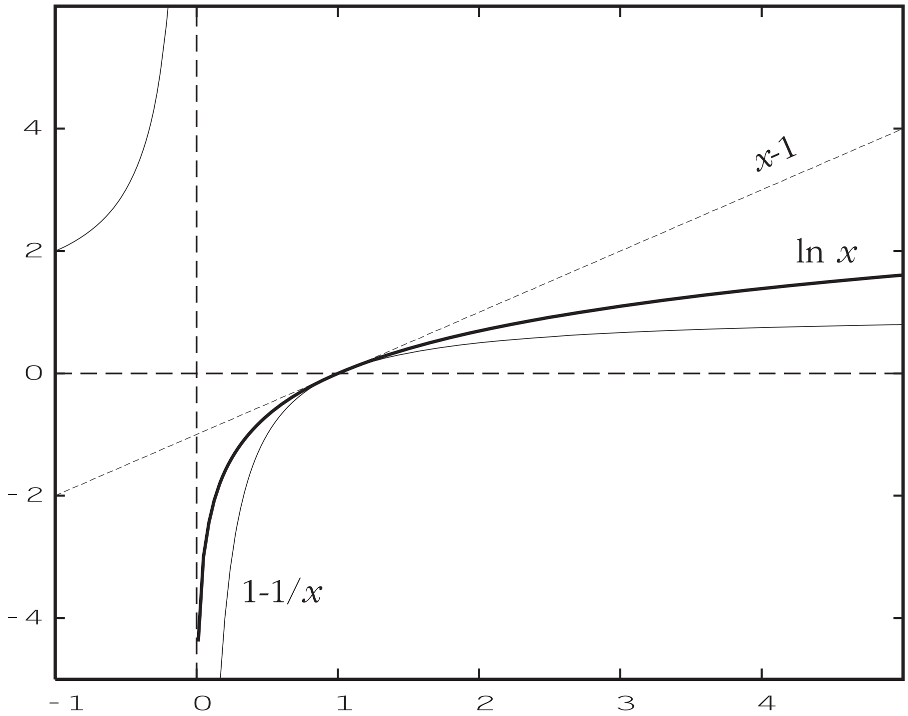
$$\begin{aligned}
\ln 2{,}6 &= \int_1^{26/10} \frac{dt}{t} = \int_1^{11/10} \frac{dt}{t} + \int_{11/10}^{12/10} \frac{dt}{t} + \int_{12/10}^{13/10} \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{25/10}^{26/10} \frac{dt}{t} \\
&< \frac{1/10}{1} + \frac{1/10}{11/10} + \frac{1/10}{12/10} + \cdots + \frac{1/10}{25/10} = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{25} = 0{,}98\cdots < 1 \\
\ln 2{,}8 &= \int_1^{28/10} \frac{dt}{t} = \int_1^{16/15} \frac{dt}{t} + \int_{16/15}^{17/15} \frac{dt}{t} + \int_{17/15}^{18/15} \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{41/15}^{42/15} \frac{dt}{t} \\
&> \frac{1/15}{16/15} + \frac{1/15}{17/15} + \frac{1/15}{18/15} + \cdots + \frac{1/15}{42/15} = \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{42} = 1{,}008\cdots > 1.
\end{aligned}$$

Omdat $\ln$ continu is, is ook 1 een functiewaarde, van een x tussen 2,6 en 2,8. Omdat $\ln$ strikt stijgend is, is deze x enig.
5. Voor $a > 0$ is
$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \overset{(u=at)}{=} \int_a^{ax} \frac{du}{u} = \ln(ax) - \ln a$$
m.a.w., $\ln(ax) = \ln a + \ln x$ voor elke $a > 0$, $x > 0$. Het bijzonder geval volgt uit de keuze $y = 1/x$.

6. Beschouw voor $x > 0$ de functie $g(x) := x - 1 - \ln x$. Uit het tekenonderzoek van $g'(x) = 1-(1/x)$ blijkt dat g strikt stijgt in het interval $]1, +\infty[$ en strikt daalt in het interval $]0, 1[$, zodat een minimum bereikt wordt in $x = 1$. Vandaar $g(x) > g(1)$ voor alle $0 < x \neq 1$, d.w.z. $\ln x < x - 1$. Nemen we in het bijzonder $x = 1/y$ (y is dan eveneens een willekeurig positief getal verschillend van 1) dan vinden we $\ln(1/y) < (1/y) - 1$, dus $-\ln y < (1/y) - 1$ of nog $\ln y > 1 - (1/y)$. Door combinatie van beide ongelijkheden krijgen we

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1, \quad (x > 0, x \neq 1).$$

Voor $x = 1$ ontstaat de gelijkheid $0 = 0 = 0$.



Figuur 7.1: $\ln x$ tussen de hyperbool $1 - 1/x$ en de rechte $x - 1$.

7. Neem willekeurig $M \in \mathbb{R}$ en kies een natuurlijke $n > M$. Als dan $x > e^n$, hebben we

$$\ln x > \ln(e^n) = n \ln e = n > M,$$

d.w.z. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
Als $x \to 0+$, dan is $1/x \to +\infty$, zodat $-\ln x = \ln(1/x) \to +\infty$, en dus $\ln x \to -\infty$.
8. Uit de bovenstaande limieten volgt dat ln willekeurig grote en willekeurig kleine waarden bereikt. Door de tussenwaardestelling is dus elke willekeurige $y_0 \in \mathbb{R}$ een waarde van ln.
9. Met de regel van de l'Hospital vinden we

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

□

7.1.3 Definitie. Het getal $e = 2{,}7182\ldots$ noemt men het **grondtal van de natuurlijke logaritme**.

7.1.2 De exponentiële

De functie ln, met domein $\mathbb{R}^+$ en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en continu, met een afgeleide die nergens nul is. Bijgevolg (zie 4.2.16) heeft deze functie een inverse, die (zie 5.1.11) eveneens strikt stijgend, continu en afleidbaar is.

7.1.4 Definitie. De inverse van ln is de **exponentiële (functie)**, genoteerd exp.

Zijn de eenheden op de x-as en de y-as dezelfde, dan ontstaat de beeldlijn van exp door de beeldlijn van ln rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.1.5 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* ln *en* exp *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \exp(\ln x) & = x \quad (x > 0) \\ \ln(\exp x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. *Is $x > 0$, dan is $\ln x$ het enige getal waarvan de exponentiële gelijk aan x is.*

3. exp *heeft domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $\mathbb{R}^+$, is strikt stijgend en* $\exp 0 = 1$.

4. exp *is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, met in het bijzonder* $\exp' = \exp$.

5. *Voor alle x, y is $\exp(x+y) = \exp x \, \exp y$; in het bijzonder is $\exp(-x) = 1/(\exp x)$ voor alle x.*

6. *We hebben de ongelijkheden*

$$1 + x \leqslant \exp x \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$\exp x \leqslant \frac{1}{1-x} \quad (x < 1).$$

7. $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$ *en* $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$.

8. *Voor een willekeurige veeltermfunctie $P(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{\exp x} = 0.$$

Bewijs. 1-2. Uit de definitie van exp als inverse van ln.
3. Uit de definitie van exp als inverse van ln en 4.2.16.
4. Vermits exp de inverse van ln is volgt voor $c > 0$ (zie 5.1.11)

$$\exp'(\ln c) = \frac{1}{\ln' c} = c.$$

Stellen we $x = \ln c$ dan verkrijgen we $\exp' x = \exp x$. Na herhaald toepassen volgt $\exp^{(n)} = \exp$ voor $n = 1, 2, \ldots$.
5. We weten dat voor alle $\alpha > 0$ en $\beta > 0$

$$\ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta.$$

Stellen we $\alpha = \exp x$ en $\beta = \exp y$, dan is $\ln \alpha = x$ en $\ln \beta = y$, zodat de bovenstaande formule zich herleidt tot

$$\ln(\exp x \exp y) = x + y.$$

Laten we hierop exp inwerken, dan krijgen we

$$\exp x \exp y = \exp(x + y).$$

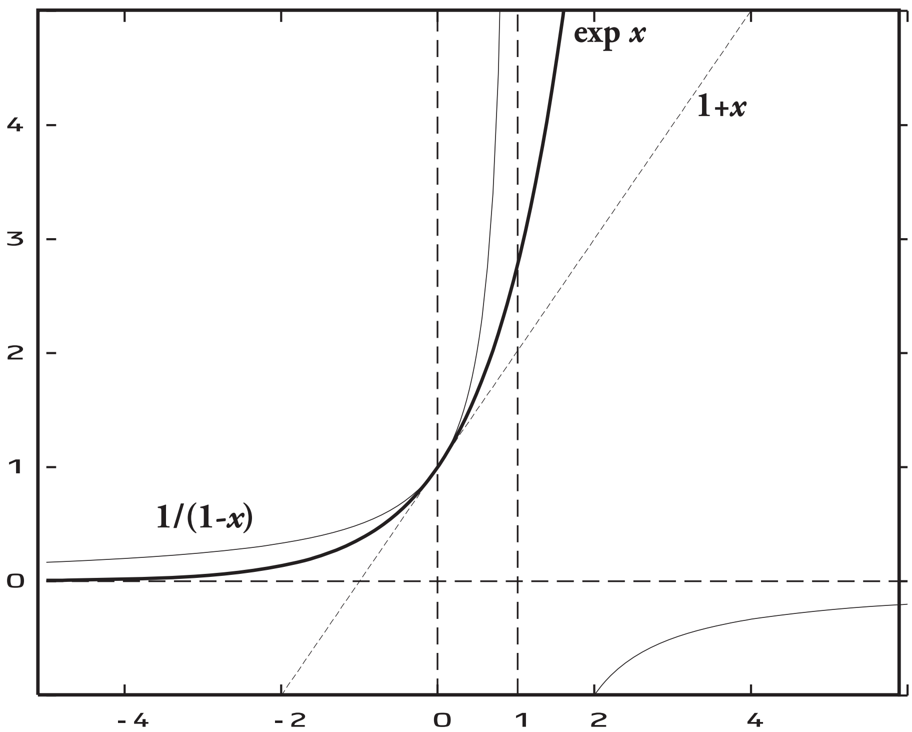
Het bijzonder geval komt overeen met de keuze $y = -x$.
6. De gelijkheden voor $x = 0$ zijn triviaal. Neem dus $x \neq 0$. We steunen op de ongelijkheden

$$1 - \frac{1}{\alpha} < \ln \alpha < \alpha - 1 \quad (0 < \alpha \neq 1).$$

Stellen we $\alpha = \exp x$, dan is $\ln \alpha = x$, zodat de bovenstaande formules zich herleiden tot

$$1 - \frac{1}{\exp x} < x < \exp x - 1 \quad (x \neq 0).$$

De rechtse ongelijkheid leidt tot $\exp x > 1 + x$, en de linkse, mits $1 - x > 0$, tot $\exp x < \frac{1}{1-x}$.



Figuur 7.2: $\exp x$ tussen de rechte $x + 1$ en de hyperbool $1/(1 - x)$.

7. Volgt uit de ongelijkheden 6.
8. De beschouwde limiet is een onbepaaldheid van type ∞/∞. Bij herhaald toepassen van de regel van de l'Hospital blijft de noemer onveranderd, terwijl de veelterm in de teller telkens van graad verlaagt. Uiteindelijk vindt men dus

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{\exp x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax + b}{\exp x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\exp x} = 0.$$

$\square$

7.1.3 Machtfuncties

7.1.6 Definitie. Voor $x > 0$ en $y \in \mathbb{R}$ definiëren we $\boldsymbol{x}$ **tot de macht** $\boldsymbol{y}$ als

$$x^y := \exp(y \ln x).$$

In x^y noemt men x het **grondtal** en y de **exponent**.

Nemen we in het bijzonder e als grondtal, dan zien we dat

$$e^y = \exp(y \ln e) = \exp y.$$

De eerder beschouwde exponentiële functie is dus niets anders dan de machtfunctie met e als grondtal. Voortaan zullen we dan ook meestal e^x schrijven i.p.v. $\exp x$. In deze notatie is dus

$$\boxed{x^y = e^{y \ln x}} \tag{7.1}$$

7.1.7 Stelling.

1. *Voor* $x > 0$ *is* $x^0 = 1$.
2. *Voor* $x > 0$ *is* $x^y x^z = x^{y+z}$.
3. *Voor* $x > 0$ *is* $x^{-y} = \frac{1}{x^y}$.
4. *Voor* $x > 0$ *is* $(x^y)^z = x^{yz}$.
5. *Voor* $x > 0, y > 0$ *is* $(xy)^z = x^z y^z$.

Bewijs. 1. $x^0 = \exp(0 \ln x) = \exp(0) = 1$.
2. $x^y x^z = \exp(y \ln x) \exp(z \ln x) = \exp((y + z) \ln x) = x^{y+z}$.
3. $x^{-y} x^y = x^{y-y} = x^0 = 1$.
4. $(x^y)^z = \exp(z \ln(\exp(y \ln x))) = \exp(zy \ln x) = x^{yz}$.
5. $(xy)^z = \exp(z \ln(xy)) = \exp(z(\ln x + \ln y)) = \exp(z \ln x) \exp(z \ln y) = x^z y^z$. □

Uit de definitie van x^y kunnen twee verschillende types van **machtfunctie** afgeleid worden: $x \mapsto a^x$ en $x \mapsto x^a$ (a constant). De eerste van die twee is, voor $a > 1$, enkel een variant van e^x en voor $0 < a < 1$ een variant van e^{-x}.

7.1.8 Stelling (Eigenschappen van $\boldsymbol{a^x}$ met $\boldsymbol{a > 1}$). *Is* $a > 1$, *dan hebben we de volgende eigenschappen.*

1. a^x *is onbepaald afleidbaar over* $\mathbb{R}$, *en* $(a^x)' = a^x \ln a$ *voor alle* x.
2. a^x *is strikt stijgend met* $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *en* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
3. *Voor een willekeurige veeltermfunctie* $P(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0.$$

Bewijs. 1. Uit de kettingregel.
2. $(a^x)' = a^x \ln a > 0$ omdat $\ln a > 0$ wegens $a > 1$. Bijgevolg is a^x strikt stijgend over $\mathbb{R}$. Voorts is (als we $x \ln a = t$ stellen)

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty \\ \text{en} \quad &\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\ln a} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0. \end{aligned}$$

3. De limiet is van het type $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Zoals eerder voor het geval $a = e$ volstaat het, herhaaldelijk de regel van de l'Hospital toe te passen. Het enige verschil is dat er nu, bij elke toepassing van de regel, in de noemer een factor $\ln a$ bijkomt. $\square$

7.1.9 Stelling (Eigenschappen van a^x met $0 < a < 1$). *Is $0 < a < 1$, dan hebben we de volgende eigenschappen.*

1. *a^x is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$, en $(a^x)' = a^x \ln a$ voor alle x.*
2. *a^x is strikt dalend met $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.*

Bewijs. 1. Uit de kettingregel.
2. Is $0 < a < 1$, dan is $a^x = 1/(b^x)$ met $b := 1/a > 1$. We weten dat b^x strikt stijgt met $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ en $\lim_{x\to-\infty} b^x = 0$. Bijgevolg is a^x strikt dalend met $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. $\square$

7.1.10 Opmerking. Voor $a = 1$ is $a^x = 1$ voor alle x.

Nu de machtfunctie van het tweede type, met veranderlijk grondtal en vaste exponent. De definitie van $x^a := e^{a\ln x}$ heeft enkel zin voor $x > 0$. Maar die beperking is overbodig als a een *geheel* getal is. Voor $a = n \in \mathbb{N}^+$ kunnen we x^n voor alle $x \in \mathbb{R}$ definiëren als het product van n factoren x, en voor $a = -n$ kunnen we x^{-n} voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiëren als $1/x^n$. Men gaat gemakkelijk na dat deze elementaire definities voor $x > 0$ samenvallen met wat de algemene definitie levert.
Voortaan laten we het elementaire geval $a \in \mathbb{Z}$ dus buiten beschouwing.

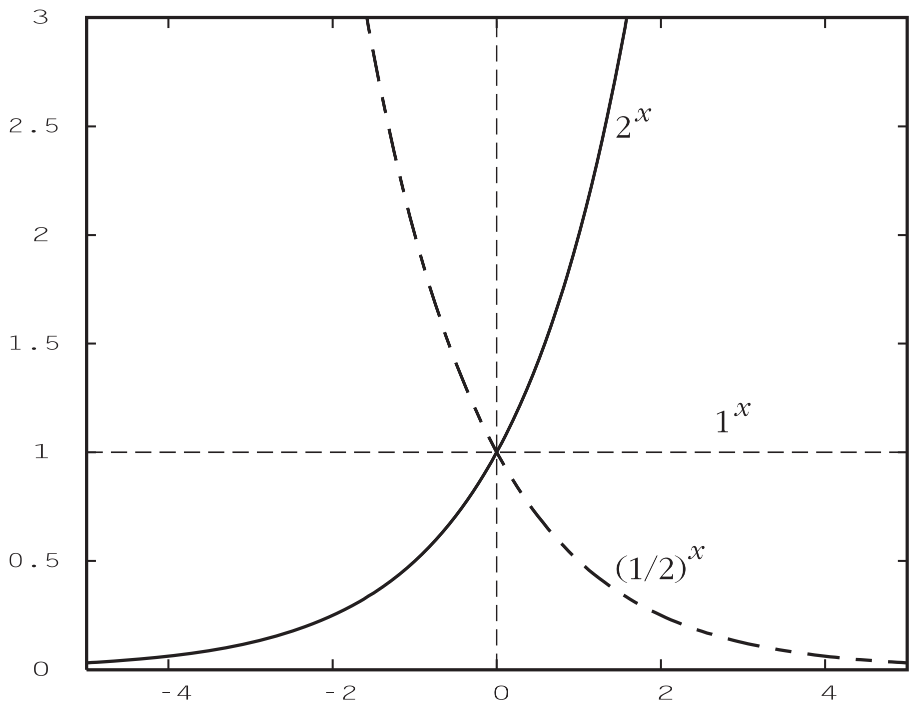
7.1.11 Stelling (Eigenschappen van x^a met $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$).

1. *$x \mapsto x^a$ is onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}^+$, en $(x^a)' = ax^{a-1}$ voor alle $x > 0$.*
2. *Als $a > 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt stijgend; is $a < 0$, dan is $x \mapsto x^a$ strikt dalend met $\lim_{x\to0+} x^a = +\infty$.*
3. *Voor elke $a > 0$ is $\lim_{x\to0+} x^a = 0$.*

Bewijs. 1. Uit de kettingregel.
2. De afgeleide $(x^a)' = ax^{a-1} = ae^{(a-1)\ln x}$ is > 0 voor $a > 0$ en < 0 voor $a < 0$. Voor $a < 0$ is $\lim_{x\to0+} a \ln x = +\infty$ en dus $\lim_{x\to0+} x^a = +\infty$.
3. $\lim_{x\to0+} x^a = \lim_{x\to0+} e^{a\ln x}$ $(= e^{-\infty}) = 0$. $\square$

De eigenschap 3. van de stelling rechtvaardigt de afspraak

$$\boxed{0^a = 0 \quad (a > 0)}$$



Figuur 7.3: Beeldlijnen van 1^x, $(1/2)^x$, 2^x.

7.1.12 Notatie. We noteren[3]

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a^{1/n} & (a > 0, n \in \mathbb{N}^+) \\ -(-a)^{1/n} & (a < 0, n \text{ oneven}), \end{cases}$$

met $\sqrt{a}$ i.p.v. $\sqrt[2]{a}$.

Dit betekent dat $\sqrt[n]{x}$ gedefinieerd is als hetzij $x > 0$, hetzij n oneven en $x < 0$. Men kan triviaal aanvullen met $\sqrt[n]{0} = 0$ voor alle natuurlijke $n > 0$.

7.1.13 Stelling.

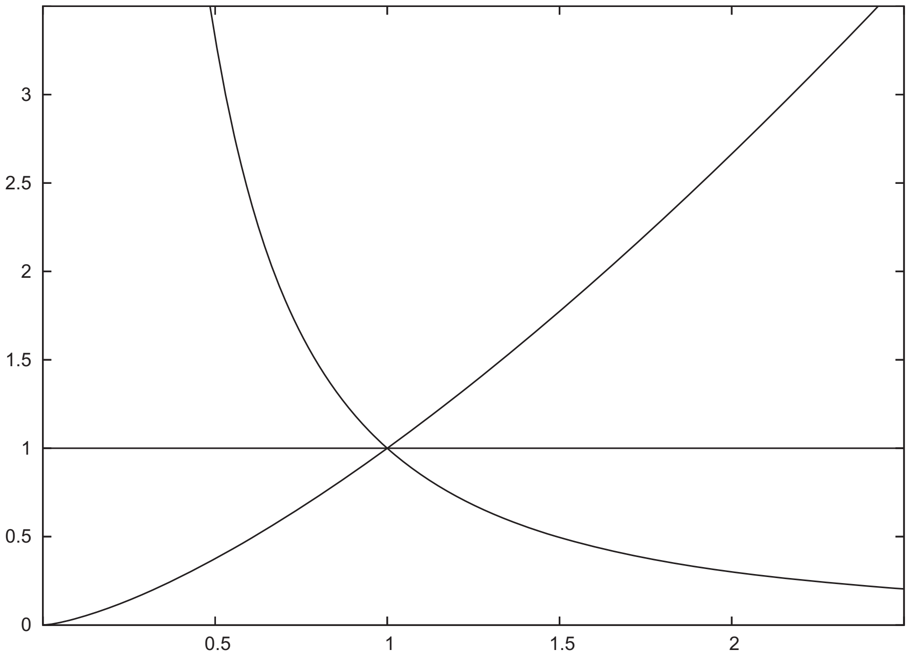
1. *Is $a > 0$ en n een positief natuurlijk getal, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige positief(!!) getal waarvan de n-de macht gelijk aan a is.*

2. *Is $a < 0$ en n een oneven natuurlijk getal, dan is $\sqrt[n]{a}$ het enige getal waarvan de n-de macht gelijk aan a is.*

Bewijs. 1. Bekijk de eenterm $P(x) = x^n$ in $\mathbb{R}$. Dan is $P(a^{1/n}) = \left(a^{1/n}\right)^n = a^1 = a$. Over $\mathbb{R}^+$ is $P(x)$ strikt stijgend (afgeleide $nx^{n-1} > 0$ voor $x > 0$). Er kan dus in $\mathbb{R}^+$ geen ander getal bestaan dat door P eveneens op a afgebeeld wordt.
2. Dit keer is $P(-(-a)^{1/n}) = (-1)^n(-a) = a$ wegens n oneven. Tevens is $P(x)$ nu over heel $\mathbb{R}$ strikt stijgend (afgeleide $nx^{n-1} > 0$ voor alle x, ook voor $x < 0$ wegens $n-1$ even). Er kan dus geen ander getal bestaan dat door P eveneens op a afgebeeld wordt. $\square$

[3]Het teken $\sqrt{}$ is de hoekige 'r' van het Latijn *radix* (wortel). Deze van oorsprong Arabische benaming verwijst echt naar de wortel van een plant.

7.1.14 Opmerking. Is $a > 0$ en n een *even* natuurlijk getal, dan bestaat er ook een *negatief* getal waarvan de n-de macht gelijk aan a is, nl. $-a^{1/n}$.



Figuur 7.4: Beeldlijnen van $x^{\sqrt{2}}$ (stijgend), x^0 (constant), $x^{-\sqrt{3}}$ (dalend, met verticale asymptoot).

7.1.15 Voorbeeld. Over $]0,1[$ is

$$f(x) = 1/\sqrt{x}$$

continu maar zeker niet integreerbaar, want f is in elke omgeving van 0 onbegrensd. Toch heeft f in $]0,1[$ een primitieve, nl.

$$F(x) = 2\sqrt{x}$$

die een rechterlimiet $F(0+) = 0$ en een linkerlimiet $F(1-) = 2$ heeft. We hebben dus $\int_0^1 f = [F]_0^1 = 2$, maar de integraal is oneigenlijk.

7.1.16 Stelling (Euler, 1743). *Voor elke reële x is*

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t = e^x}$$

Bewijs. Neem willekeurig $x \in \mathbb{R}$ vast. Als $t \to +\infty$ zal het grondtal $1 + \frac{x}{t} \to 1$, zodat $1 + \frac{x}{t} > 0 = 1 - \varepsilon$ voor t voldoende groot.
Met de regel van de l'Hospital berekenen we vooreerst

$$\lim_{u\to0+}\frac{\ln(1+ux)}{u} = \lim_{u\to0+}\frac{x}{1+ux} = x.$$

Door de continuïteit van exp volgt dan

$$e^x = \lim_{u\to0+} e^{\ln(1+ux)/u} \stackrel{u=1/t}{=} \lim_{t\to+\infty} e^{t\ln(1+x/t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{x}{t}\right)^t.$$

$\square$

I.h.b. is dus

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

7.1.4 De hyperbolische functies

Bepaalde combinaties van exponentiëlen komen vaak genoeg voor om ze als afzonderlijke functies te aanzien.

7.1.17 Definitie. De **hyperbolische functies** zijn de **hyperbolische sinus** (ook: **sinus hyperbolicus**), de **hyperbolische cosinus** (ook: **cosinus hyperbolicus**) en de **hyperbolische tangens** (ook: **tangens hyperbolicus**), gedefinieerd als

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

(Andere notaties zijn sh, ch, th, sinhyp, coshyp, tanhyp.) De eigenschappen van de hyperbolische functies zijn uiteraard onmiddellijke gevolgen van de eigenschappen van de exponentiële functie. Wij groeperen hieronder de belangrijkste eigenschappen.

7.1.18 Stelling.

1. *Voor alle* $x \in \mathbb{R}$ *is* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

2. *Voor alle* x *en* y *is*

$$\begin{aligned}\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y\\ \cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

3. *De drie hyperbolische functies zijn over* $\mathbb{R}$ *onbepaald afleidbaar, met in het bijzonder*

$$\sinh' = \cosh, \quad \cosh' = \sinh, \quad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2}.$$

4. $\sinh$ *is oneven, heeft als domein en waardenverzameling geheel* $\mathbb{R}$*, is strikt stijgend en heeft* $\sinh 0 = 0$.

5. $\cosh$ *is even, heeft als domein geheel* $\mathbb{R}$*, als waardenverzameling* $[1, +\infty[$*, is strikt dalend in* $]-\infty, 0[$*, strikt stijgend in* $]0, +\infty[$*, en heeft* $\cosh 0 = 1$.

6. $\tanh$ *is oneven, heeft als domein geheel* $\mathbb{R}$*, als waardenverzameling* $]-1, 1[$*, is strikt stijgend, en heeft*

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh x = 1, \quad \lim_{x\to-\infty}\tanh x = -1, \quad \tanh 0 = 0.$$

Bewijs. 1. Uit de definitie.
2.

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4}\\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y)\end{aligned}$$

en analoog voor de andere formules.
3. Uit

$$\begin{aligned}
\sinh' x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\
\cosh' x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \\
\tanh' x &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.
\end{aligned}$$

4. $\sinh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x$, zodat sinh oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x. Omdat

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty - 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 - \infty$$

bereikt sinh elk reëel getal x. Het strikt stijgend karakter volgt uit $\sinh' x = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} > 0$, en $\sinh 0 = (1-1)/2 = 0$.
5. $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \cosh x$, zodat cosh even is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat e^x en e^{-x} bestaan voor elke reële x. Wegens $\cosh' x = \sinh x$ is cosh strikt stijgend voor $x > 0$ en strikt dalend voor $x < 0$, met $\cosh 0 = 1$. Verder is $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$ (en uiteraard $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty$), zodat de waardenverzameling $[1, +\infty[$ is.
6. $\tanh(-x) = \sinh(-x)/\cosh(-x) = -\sinh x/\cosh x = -\tanh x$, zodat tanh oneven is. De definitieverzameling is $\mathbb{R}$ omdat $\sinh x$ en $\cosh x \neq 0$ bestaan voor elke reële x. Omdat $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} > 0$, is tanh strikt stijgend over $\mathbb{R}$, en $\tanh 0 = 0$. Verder is

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

en, omdat de functie oneven is,

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1.$$

Omdat tanh bovendien strikt stijgend is, impliceert dit dat de waardenverzameling van tanh een deel is van $]-1, 1[$. Wegens de tussenwaardestelling worden alle waarden tussen -1 en $+1$ bereikt. $\square$

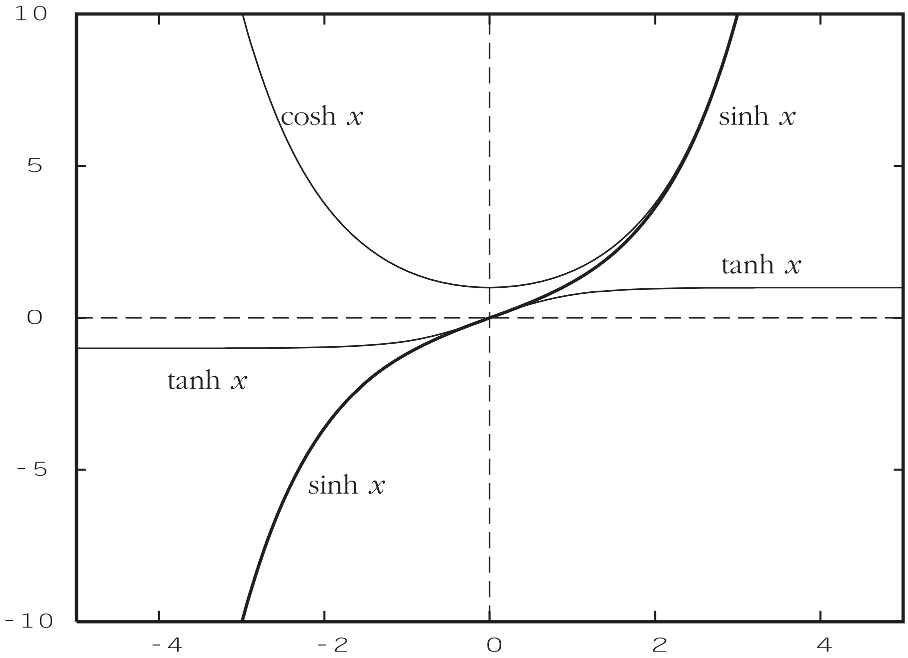
7.1.5 De inverse hyperbolische functies

De hyperbolische sinus, met domein en waardenverzameling $\mathbb{R}$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

7.1.19 Definitie. De inverse functie van sinh noemt men **argument sinus hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor argsinh.

(Andere notaties: asinh, arcsinh, argsh.) De beeldlijn van argsinh ontstaat door de beeldlijn van sinh te spiegelen om de eerste bissectrice.

7.1.20 Stelling.



Figuur 7.5: De drie hyperbolische functies.

1. *De verwantschap tussen* sinh *en* argsinh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \sinh(\operatorname{argsinh} x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \operatorname{argsinh}(\sinh x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. *Voor elke* $x \in \mathbb{R}$ *is* $\operatorname{argsinh} x$ *het enige getal*[4] *waarvan de hyperbolische sinus gelijk aan* x *is.*

3. argsinh *heeft domein en waardenverzameling* $\mathbb{R}$*, is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argsinh} 0 = 0$.

4. *Voor alle reële* x *is*

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

5. *Voor alle reële* x *is*

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

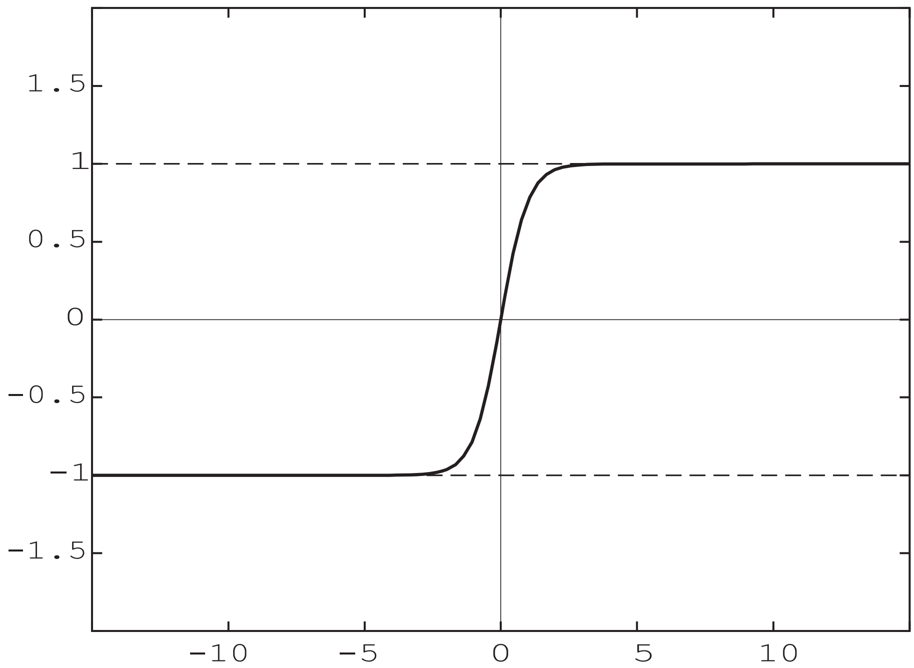
Bewijs. 1-3. Uit de definitie van argsinh als inverse.
4. Neem een vaste $x \in \mathbb{R}$. Stellen we $y := \operatorname{argsinh} x$, dan is $\sinh y = x$, d.w.z. $e^y - e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} - 1 = 2xe^y$, waaruit ondubbelzinnig

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

(Het negatieve getal $x - \sqrt{x^2 + 1}$ kan natuurlijk niet $e^y > 0$ zijn.) Zo komen we tot

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

[4] of *argument,* zoals men de veranderlijke in een functievoorschrift $f(x)$ ook wel noemt



Figuur 7.6: De hyperbolische tangens met asymptoten $y = \pm 1$.

5. Uit $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ leiden we af dat

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$\square$

De hyperbolische cosinus is strikt stijgend over het interval $[0, +\infty[$. Noteren we tijdelijk

$$\operatorname{Cosh} := \cosh / [0, +\infty[\,,$$

dan is Cosh, met domein $[0, +\infty[$ en waardenverzameling $[1, +\infty[$, strikt stijgend en continu, met een afgeleide $\operatorname{Cosh}' x = \sinh x$ die voor geen enkele $x > 0$ nul is.
Bijgevolg heeft Cosh een inverse met dezelfde eigenschappen (strikt stijgend, continu, afleidbaar voor $x > \operatorname{Cosh} 0 = 1$), waarvan de beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van Cosh rond de eerste bissectrice te spiegelen.

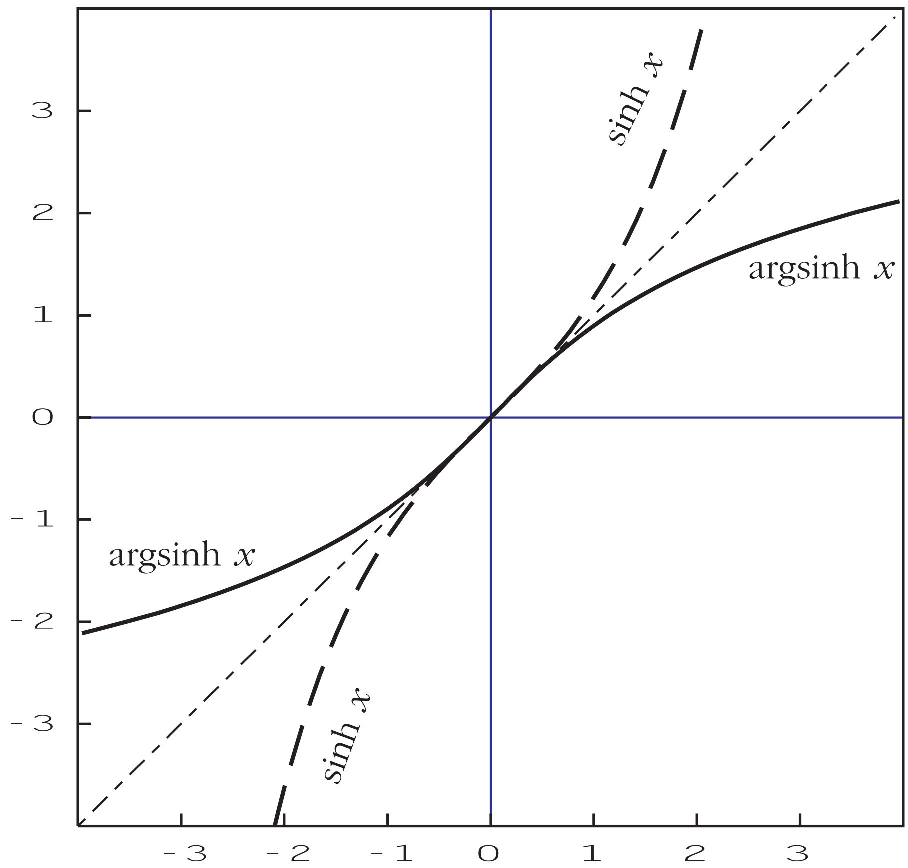
7.1.21 Definitie. De inverse

$$\operatorname{argcosh} := (\operatorname{Cosh})^{-1} : [1, +\infty[\, \to [0, +\infty[\, = \operatorname{argcosh}([1, +\infty[)$$

noemen we **argument cosinus hyperbolicus**.

(Andere notaties: acosh, arccosh, argch.)

7.1.22 Stelling.



Figuur 7.7: argsinh als inverse van sinh.

1. *De verwantschap tussen* cosh *en* argcosh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \cosh(\operatorname{argcosh} x) &= x \quad (x \geqslant 1) \\ \operatorname{argcosh}(\cosh x) &= x \quad (x \geqslant 0) \end{cases}$$

2. argcosh *heeft als domein* $[1, +\infty[$, *als waardenverzameling* $[0, +\infty[$, *is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argcosh} 1 = 0$.

3. *Voor elke* $x \geqslant 1$ *is* $\operatorname{argcosh} x$ *het enige nietnegatieve(!!) getal waarvan de hyperbolische cosinus gelijk aan* x *is.*

4. *Voor alle* $x \geqslant 1$ *is*

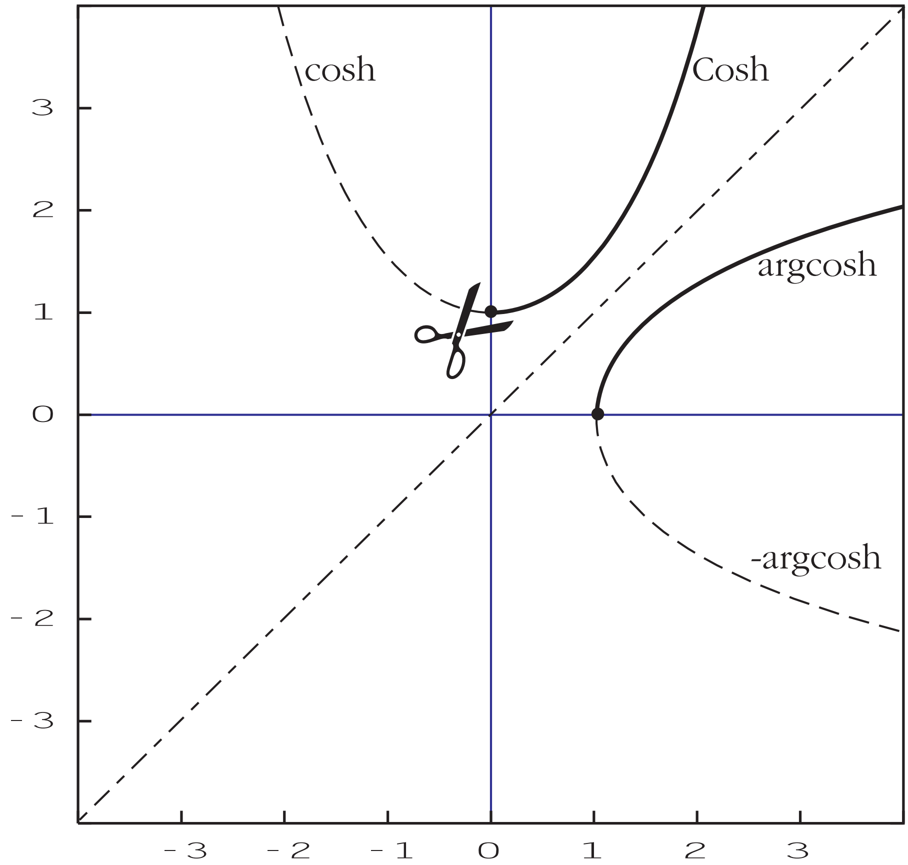
$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. *Voor alle* $x > 1$ *is*

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Bewijs. 1. Omdat argcosh en Cosh elkaars inverse zijn hebben we

$$\begin{cases} \operatorname{Cosh}(\operatorname{argcosh} x) &= x \quad \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\text{argcosh}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\} \\ \operatorname{argcosh}(\operatorname{Cosh} x) &= x \quad \text{voor alle } x \in \mathcal{D}_{\text{Cosh}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}. \end{cases}$$



Figuur 7.8: argcosh als inverse van Cosh := cosh / $[0, +\infty[$.

Wat functiewaarden betreft is Cosh = cosh (want enkel de *domeinen* verschillen), zodat het te bewijzen volgt.
2. Uit de definitie van argcosh als inverse.
3. Het getal $\operatorname{argcosh} x$ voldoet aan de vereisten: $\operatorname{argcosh} x \geqslant 0$ en $\cosh(\operatorname{argcosh} x) = x$. Het is het enige getal met die eigenschappen want cosh is strikt stijgend over $[0, +\infty[$.
4. Neem een vaste $x \in [1, +\infty[$. Stellen we $y = \operatorname{argcosh} x$, dan is $\cosh y = x$, d.w.z. $e^y + e^{-y} = 2x$. Dit is gelijkwaardig met de vierkantsvergelijking $e^{2y} + 1 = 2xe^y$, waaruit men twee oplossingen haalt die (het product van de wortels is immers 1) elkaars omgekeerde zijn:

$$e^y = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} \geqslant 1 & \text{want } x \geqslant 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \leqslant 1. \end{cases}$$

Nu is $y = \operatorname{argcosh} x \geqslant 0$, dus $e^y \geqslant 1$. Zo vinden we ondubbelzinnig dat

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

waaruit

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

5. Uit $\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ leiden we, voor $x > 1$, af dat

$$\operatorname{argcosh}' x = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

□

7.1.23 Opmerkingen.

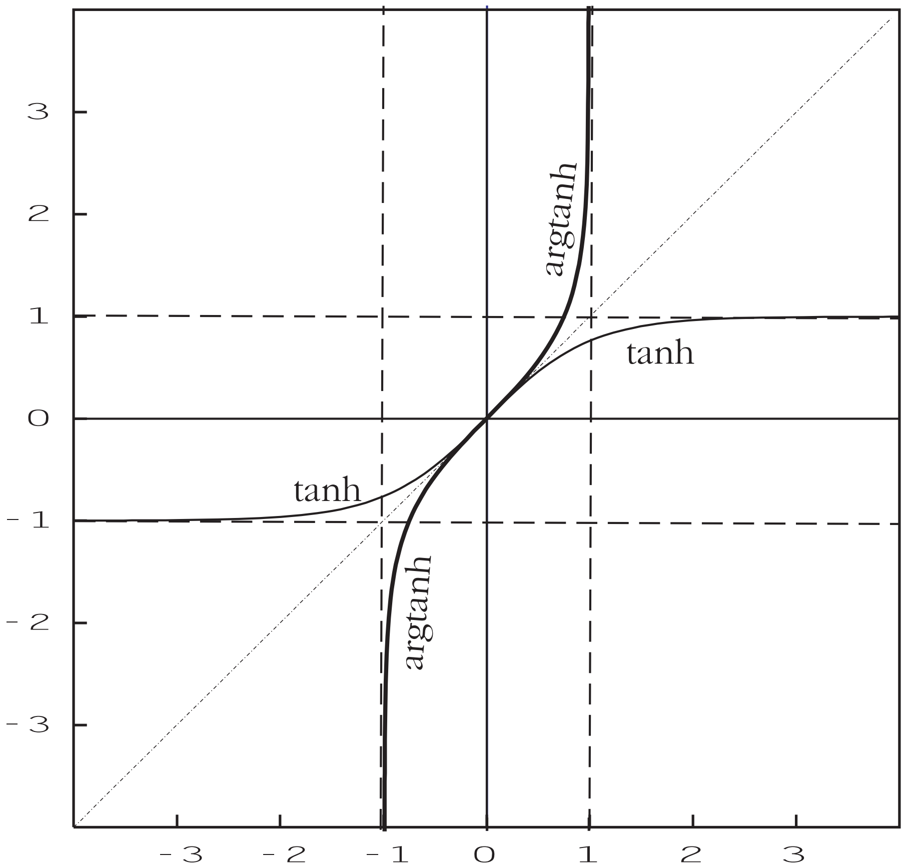
1. Voor $x > 1$ bestaat er ook een *negatief* getal met een cosh gelijk aan x, namelijk $-\operatorname{argcosh} x$.

2. argcosh is niet afleidbaar in het punt $x = 1$. De raaklijn aan de beeldlijn is daar evenwijdig met de y-as.

De hyperbolische tangens, met domein $\mathbb{R}$ en waardenverzameling $]-1, 1[$, is strikt stijgend en continu, en heeft dus een inverse met dezelfde eigenschappen.

7.1.24 Definitie. De inverse functie van tanh noemt men **argument tangens hyperbolicus**, en wij noteren hiervoor argtanh.

De beeldlijn van argtanh ontstaat door de beeldlijn van tanh te spiegelen om de eerste bissectrice.



Figuur 7.9: argtanh als inverse van tanh, met verticale asymptoten bij $x = \pm 1$.

7.1.25 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* tanh *en* argtanh *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \tanh(\operatorname{argtanh} x) & = x \quad (-1 < x < 1) \\ \operatorname{argtanh}(\tanh x) & = x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

2. argtanh *heeft als domein het interval* $]-1,1[$*, als waardenverzameling* $\mathbb{R}$*, is strikt stijgend en heeft* $\operatorname{argtanh} 0 = 0$.

3. *Voor elke* $x \in]-1,1[$ *is* $\operatorname{argtanh} x$ *het enige reëel getal waarvan de hyperbolische tangens gelijk aan* x *is.*

4. *Voor alle* $x \in]-1,1[$ *is*
$$\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

5. *Voor alle* $x \in]-1,1[$ *is*
$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Bewijs. 1-3. Uit de definitie van argtanh als inverse.
4. Neem een vaste $x \in]-1,1[$. Stellen we $y = \operatorname{argtanh} x$, dan is $\tanh y = x$, d.w.z. $\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} = x$. Dit is gelijkwaardig met de vergelijking $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$, waaruit

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

5. Uit $\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ leiden we af dat

$$\operatorname{argtanh}' x = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

$\square$

Uit de opgestelde formules blijkt dat de inverse hyperbolische functies niet echt nieuwe transcendente functies zijn, maar combinaties van de logaritme, de vierkantswortel (die zelf een bijzondere machtfunctie is) en de elementaire veldbewerkingen $(+, -, \cdot, /)$.

7.2 De goniometrische familie

Man muss immer umkehren.
Carl Jacobi, 1804–1851

7.2.1 arcussinus

De functie $f(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ is continu over het open interval $J =]-1,1[$. Wegens 6.4.1 geldt voor elke $x \in]-1,1[$ dat $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ bestaat en dat $\left(\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Verder is

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^x \leqslant 2, \quad \forall x \in [0,1[$$

zodat de oneigenlijke integraal

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant 2$$

bestaat wegens 4.2.11. Vandaar

7.2.1 Definitie. De **arcussinus** (of **boogsinus**) wordt gedefinieerd door

$$\arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (x \in [-1,1])$$

(Andere notaties: asin, Bgsin, bgsin.)

7.2.2 Definitie.

$$\pi := 2 \arcsin 1$$

De rol die e speelt voor de hyperbolische functiefamilie wordt voor de goniometrische familie overgenomen door π. Via boven- en ondersommen kan men opnieuw numerieke benaderingen voor $\pi(= 3{,}141592\dots)$ afleiden.

7.2.3 Opmerking. In Wiskundige Analyse II zullen we zien dat $\arcsin y_0$ $(0 \leqslant y_0 \leqslant 1)$ haar gebruikelijke goniometrische betekenis heeft als de booglengte van de cirkelboog $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant y_0$. I.h.b. is $\pi/2$ de booglengte van een kwartcirkel met straal 1.

7.2.4 Stelling.

1. $\arcsin 0 = 0$.

2. arcsin *is oneven, m.a.w. voor alle* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *is* $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

3. voor alle $-1 < x < 1$ *is*

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. arcsin *is continu op heel* $[-1,1]$.

5. arcsin *is strikt stijgend op heel* $[-1,1]$.

6. arcsin *heeft als waardenverzameling* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

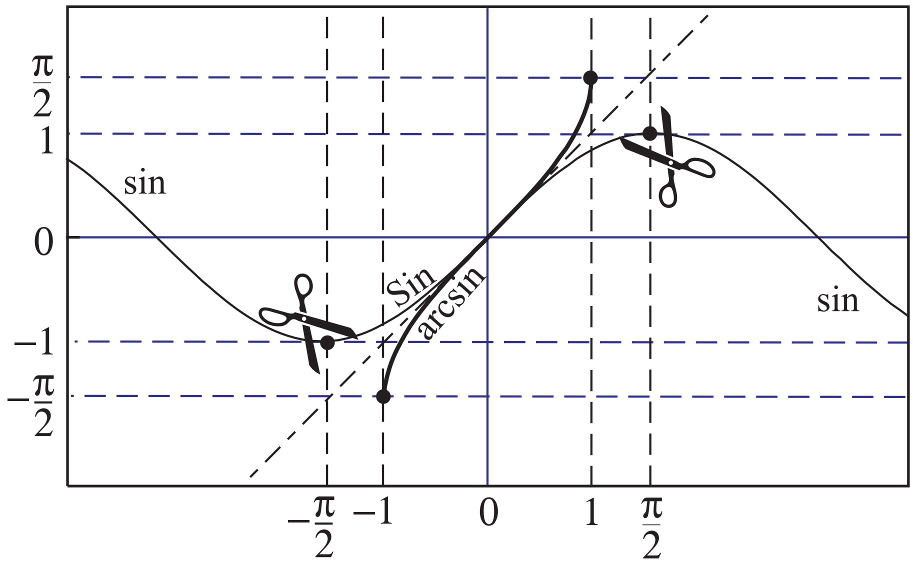
Bewijs. 1. $\int_0^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0$.
2. Uit

$$\arcsin(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \overset{t=-u}{=} \int_0^x \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin x.$$

3. Wegens 6.4.1.
4. Omdat arcsin afleidbaar is in $]-1,1[$, is arcsin ook continu op $]-1,1[$. Door de definitie van oneigenlijke integraal is $\lim_{x\to 1} \arcsin x = \arcsin 1$, zodat $\arcsin x$ ook continu is in $x = 1$. Analoog in $x = -1$.
5. Wegens $\arcsin' x > 0$ voor alle $x \in\,]-1,1[$ is arcsin strikt stijgend op $]-1,1[$. Omdat arcsin continu is op $[-1,1]$ is ook $\arcsin 1 > \arcsin x$ en $\arcsin -1 < \arcsin x$ voor alle $-1 < x < 1$.
6. Omdat arcsin stijgend is, is $-\pi/2 = -\arcsin 1 = \arcsin(-1) \leqslant \arcsin x \leqslant \arcsin 1 = \pi/2$ voor elke $x \in [-1,1]$. Door de tussenwaardestelling is elk getal $y_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ een waarde van arcsin. □

In deze context noemt men het interval $[0,\pi/2]$ vaak het **eerste kwadrant**, het interval $[\pi/2,\pi]$ het **tweede kwadrant**, het interval $[\pi,3\pi/2]$ het **derde kwadrant**, het interval $[3\pi/2,2\pi]$ het **vierde kwadrant**.

7.2.2 De goniometrische functies



Figuur 7.10: arcsin met inverse Sin.

Vermits arcsin, met domein $[-1,1]$ en waardenverzameling $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, strikt stijgend en continu is, heeft hij een inverse, eveneens strikt stijgend en continu, die we tijdelijk als

$$\mathrm{Sin} := (\arcsin)^{-1} : [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1] = \mathrm{Sin}\left([-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]\right)$$

noteren. Haar beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van arcsin rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.2.5 Definitie. De **sinus**[5] wordt gedefinieerd als een voortzetting van Sin: we stellen

$$\begin{aligned} \sin x &:= \arcsin^{-1} x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(x+k\pi) &:= (-1)^k \sin x, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zo is de functie sin, door haar definitie, *periodiek met periode* 2π, en gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$.

7.2.6 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* sin *en* arcsin *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \sin(\arcsin x) &= x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \\ \arcsin(\sin x) &= x \quad (-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

[5] Latijn voor *boezem.* Deze fraaie benaming danken we aan een verkeerde Arabische vertaling van het Sanskriet voor *halve koorde,* wat de oorspronkelijke betekenis was.

2. *Voor elke $x \in [-1,1]$ is* $\arcsin x$ *het enige getal uit* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *(!!) waarvan de sinus gelijk aan x is.*

3. $\sin$ *is afleidbaar op heel* $\mathbb{R}$ *met* $\sin' x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, *voor* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Bewijs. 1. Zoals in Stelling 7.1.22.1.
2. Uit de definitie van Sin als inverse van arcsin.
3. Omdat arcsin afleidbaar is op $]-1,1[$ met $\arcsin' x \neq 0$, is Sin afleidbaar op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en is

$$\mathrm{Sin}'(\arcsin c) = \frac{1}{\arcsin' c} = \sqrt{1-c^2} \quad (-1 < c < 1)$$

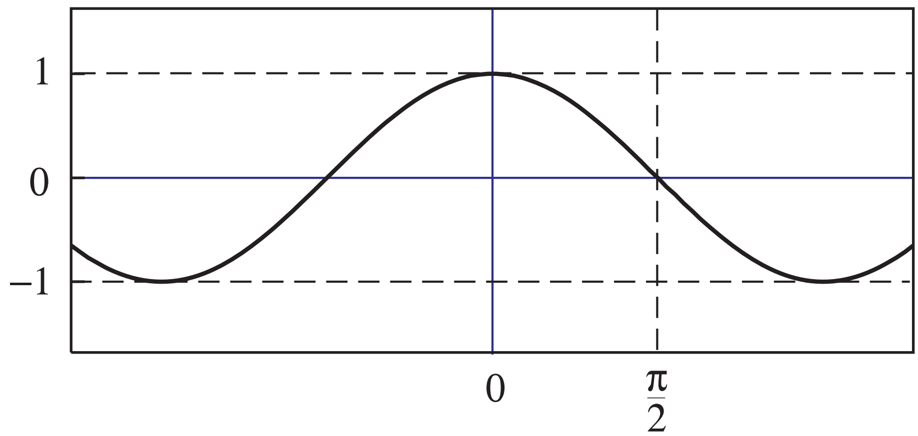
wegens stelling 5.1.11. Schrijven we $x = \arcsin c$, dan volgt $\sin' x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, voor $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Omdat Sin continu is op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, is dan

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sin' x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \sqrt{1-\sin^2 x} = 0.$$

Analoog is $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x + 1}{x + \frac{\pi}{2}} = 0$, en door $\sin(x+\pi) = -\sin x$ dus ook $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$, waaruit $\sin'(\frac{\pi}{2}) = 0$. Door $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ is sin dan ook afleidbaar op heel $\mathbb{R}$ met $\sin'(-\frac{\pi}{2}) = 0$. $\square$

7.2.7 Definitie. De **cosinus** wordt gedefinieerd als de afgeleide van de sinus:

$$\cos x := \sin' x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Figuur 7.11: Beeldlijn van cos.

7.2.8 Stelling.

1. $\sin$ *en* $\cos$ *zijn over heel* $\mathbb{R}$ *gedefinieerd en periodiek met periode* 2π.

2. *Voor alle* $x \in \mathbb{R}$ *is* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3. *Voor alle* $x \in \mathbb{R}$ *is* $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ *en* $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

4. sin *en* cos *zijn onbepaald afleidbaar over* $\mathbb{R}$, *met* $\sin' = \cos$ *en* $\cos' = -\sin$.

5. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

6. $\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$.

7. Voor alle $x \in \mathbb{R}$ *is* $\sin(-x) = -\sin x$ *en* $\cos(-x) = \cos x$.

8. Voor alle x *en* y *geldt*

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

9. Voor alle x *en* y *geldt*

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y\\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

10. sin *is strikt stijgend in het interval* $0 < x < \pi/2$; *strikt dalend in het interval* $\pi/2 < x < 3\pi/2$, *strikt stijgend in het interval* $3\pi/2 < x < 2\pi$.

11. cos *is strikt dalend in het interval* $0 < x < \pi$ *en strikt stijgend in het interval* $\pi < x < 2\pi$.

12. $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bewijs. 1. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is $\cos(x + k\pi) = (\sin(x + k\pi))' = (-1)^k \sin' x = (-1)^k \cos x$, zodat ook cos periodiek is met periode 2π.
2. Omdat $\cos x = \sin' x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ voor $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ volgt het gevraagde op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Door $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$ en $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$ geldt dit ook op heel $\mathbb{R}$.
3. Uit 2.
4. Als $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, dan is

$$\cos' x = \left(\sqrt{1 - \sin^2 x}\right)' = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\sin x.$$

Door de voortzetting geldt dit ook voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}$. Is $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (zekere $k \in \mathbb{Z}$), dan volgt eveneens dat

$$\begin{aligned}\cos'(2k+1)\frac{\pi}{2} &= \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos(2k+1)\frac{\pi}{2}}{x - (2k+1)\frac{\pi}{2}} \left(= \frac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\cos' x}{1} = -\lim_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}} \sin x = -\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

vermits sin continu is.
5. Wegens $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ en $\sin(x + \pi) = -\sin x$.
6. Uit $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ volgt $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$ en $\cos 0 = 1$. Wegens $\cos(x + \pi) = -\cos \pi$ volgen ook de andere hoofdwaarden.
7. Omdat arcsin oneven is, is ook Sin oneven. Voor $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ is verder

$$\sin(-(x + k\pi)) = \sin(-x - k\pi) = (-1)^k \sin(-x) = -(-1)^k \sin x = -\sin(x + k\pi).$$

Door afleiden van de identiteit $\sin(-x) = -\sin x$ volgt $\cos(-x) = \cos x$ op heel $\mathbb{R}$.
8. We moeten beide formules *gelijktijdig* bewijzen. Neem een vaste $a \in \mathbb{R}$ en definieer de afbeelding

$$f(x) := (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)^2.$$

Hiervoor vinden we door de kettingregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)(\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a) \\ &\quad + 2(\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)(-\sin(x+a) + \sin x \cos a + \cos x \sin a) = 0. \end{aligned}$$

Bijgevolg is f constant over $\mathbb{R}$. Invullen van $x = 0$ leert dat die constante nul is, m.a.w.

$$(\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)^2 = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Bijgevolg ook

$$\sin(x+a) - \sin x \cos a - \cos x \sin a = \cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a = 0$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$.
9. Uit 8., door $-y$ te gebruiken i.p.v. y.
10. Omdat $\sin' x = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} > 0$ op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, is sin strikt stijgend op dit interval. Wegens $\sin(x+\pi) = -\sin x$ is sin dan strikt dalend op $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, enz.
11. Omdat $\sin 0 = 0$ en sin strikt stijgend is op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, is $\sin x > 0$ op $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, zodat $\cos' x < 0$ op dit interval en $\sin x < 0$ op $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, zodat $\cos' x > 0$ op dit interval. Wegens $\cos(x+\pi) = -\cos x$ volgt het gedrag op de andere intervallen.
12. Uit 8. volgt dat $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. De keuze $x = \frac{\pi}{4}$ levert $0 = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{4}$, waaruit (wegens $\sin \frac{\pi}{4} \geqslant 0$) $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Wegens $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ is ook $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, waaruit (wegens $\cos \frac{\pi}{4} \geqslant 0$) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

7.2.9 Definitie. De **tangens** wordt gedefinieerd d.m.v.

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}.$$

7.2.10 Stelling.

1. tan *heeft als domein* $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$*, als waardenverzameling* $\mathbb{R}$*, is oneven, en*

$$\lim_{x \to (\pi/2)-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to (-\pi/2)+} \tan x = -\infty.$$

2. tan *is periodiek met periode* π*,* $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ *en* $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$.

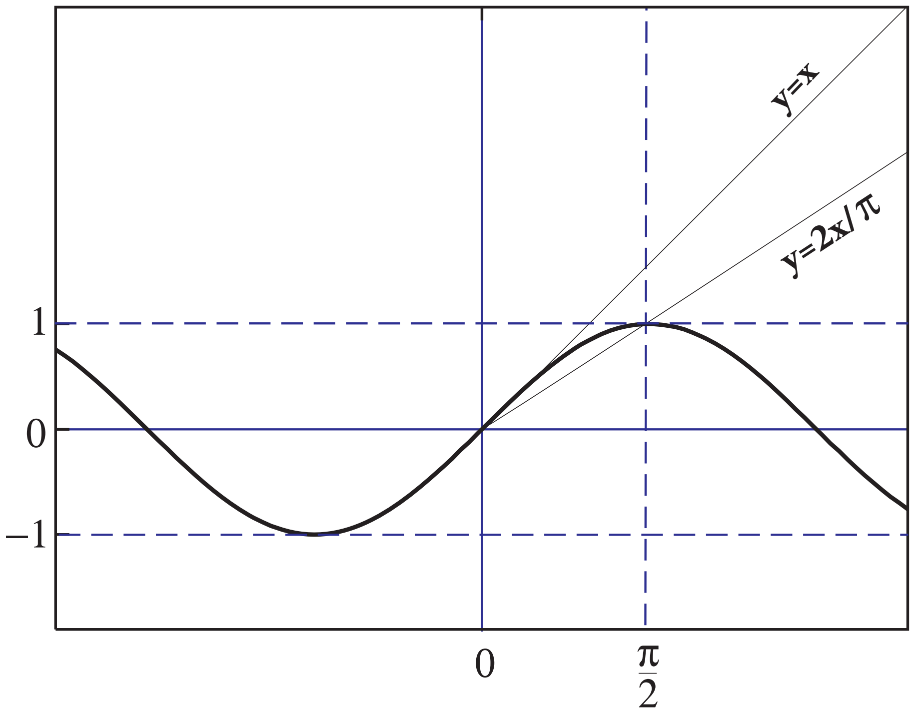
3. tan *is strikt stijgend op elk interval* $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*).*
   Is x *geen oneven veelvoud van* $\pm\pi/2$*, dan is* $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. $\tan x > x$ *voor alle* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Bewijs. 1. Omdat $\cos x = 0$ juist als $x \in (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$, is tan gedefinieerd op $\mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$. $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. Omdat $\sin x \to 1$ en $\cos x \to 0$ ($\cos x > 0$) als $x \to (\pi/2)-$, is $\tan x \to +\infty$ als $x \to (\pi/2)-$. Omdat tan oneven is, is dan ook $\tan x \to -\infty$ als $x \to (-\pi/2)+$. Hierdoor bereikt tan willekeurig grote en willekeurig kleine waarden op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Door de tussenwaardestelling wordt dus elke reële waarde bereikt door tan op $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. $\tan(x+\pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$ en $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$, waaruit $\tan\frac{3\pi}{4} = \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.
3. $\tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ als $x \notin (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$.
4. Stellen we $f(x) := \tan x - x$, dan is $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ op $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, zodat $f(x)$ strikt stijgend is op dit interval, en dus (door continuïteit) $f(x) > f(0) = 0$ op $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. □

De elementaire goniometrische[6] formules volgen gemakkelijk uit de hier verzamelde grondeigenschappen. Wij beschouwen ze als bekend, en gebruiken ze zonder extra bewijs.

De nu volgende ongelijkheden drukken uit (zie de figuur) dat de beeldlijn van de sinus in het eerste kwadrant onder de rechte $y = x$ en boven de rechte $y = \frac{2}{\pi}x$ ligt. De linkse ongelijkheid staat bekend als de **ongelijkheid van Jordan.**



Figuur 7.12: Beeldlijn van sin, met illustratie van de ongelijkheid van Jordan.

7.2.11 Stelling.

$$\boxed{\frac{2x}{\pi} < \sin x < x \qquad (0 < x < \tfrac{\pi}{2})} \tag{7.2}$$

Bewijs. Voor $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ in $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ is $f'(x) = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2} < 0$, want $\tan x > x$ in dat interval. Bovendien is $f(0+) = 1$ en $f(\frac{\pi}{2}-) = \frac{2}{\pi}$. Wegens 4.2.12 (voor functies met negatieve afgeleide,

[6] letterlijk: *hoekmetende*

dus strikt dalend) hebben we dan

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \Big(0 < x < \frac{\pi}{2}\Big).$$

□

7.2.12 Stelling. *Als α en β reële getallen zijn met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, dan heeft het stelsel*

$$\begin{cases} \cos\theta &= \alpha \\ \sin\theta &= \beta \end{cases}$$

juist één oplossing θ_0 in elk halfopen interval met lengte 2π.

Bewijs. (a) Voor $\alpha = 0$ is $\beta = \pm 1$. Het stelsel $\cos\theta = 0, \sin\theta = 1$ is gelijkwaardig met de vergelijking $\sin\theta = 1$ en heeft als oplossingenverzameling $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. De oplossingen liggen op een onderlinge afstand 2π, zodat er van deze vergelijking precies één oplossing ligt in een vooropgegeven halfopen interval met lengte 2π. Analoog voor het stelsel $\cos\theta = 0, \sin\theta = -1$.
(b) Voor $\alpha \neq 0$ is het gegeven stelsel gelijkwaardig met $\tan\theta = \beta/\alpha, \cos\theta = \alpha$. De eerste vergelijking heeft een unieke oplossing $\theta_0 \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ want in dat interval is tan strikt stijgend en bereikt hij alle reële getallen. De oplossingenverzameling van de eerste vergelijking is dus $\theta = \theta_0 + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Die oplossingen liggen op een onderlinge afstand π, zodat er precies twee oplossingen liggen in een vooropgegeven halfopen interval met lengte 2π, stel θ_1 en $\theta_2 := \theta_1 + \pi$. Voor beide geldt dat $1 + \tan^2\theta_i = 1/\cos^2\theta_i = 1/\alpha^2$, m.a.w. $\cos\theta_i = \pm\alpha$. Wegens

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_1 + \pi) = \cos\theta_1 \cos\pi - \sin\pi \sin\theta_1 = -\cos\theta_1$$

heeft één van de getallen θ_1, θ_2 een cosinus gelijk aan α, en de andere een cosinus gelijk aan $-\alpha$. In het gegeven halfopen interval met lengte 2π ligt dus precies één oplossing van het stelsel. □

7.2.13 Toepassing (Poolcoördinaten). *Zij $P(x, y)$ een punt van het vlak $\mathbb{R}^2$, met $(x, y) \neq (0, 0)$. Dan bestaat er een unieke **voerstraal** $r > 0$ en een unieke **poolhoek** θ in een halfopen interval met lengte 2π (bijvoorbeeld in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$) waarvoor*

$$x = r\cos\theta \qquad \textit{en} \qquad y = r\sin\theta.$$

Bewijs. Als zulke r en θ bestaan, dan is $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, en

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Wegens de voorgaande stelling bestaat er juist één θ in een halfopen interval met lengte 2π (b.v., $]-\pi, \pi]$ of $[0, 2\pi[$) die hieraan voldoet. Dit toont aan dat de gezochte r en θ, als ze bestaan, zeker uniek zijn.
Hun bestaan zelf volgt ook uit de voorafgaande stelling. Nemen we immers

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \alpha := \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \beta := \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

dan is $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ hetgeen θ in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$ ondubbelzinnig bepaalt. □

Het koppel (θ, r) noemen we het koppel **poolcoördinaten** van $P(x, y)$. Aan de oorsprong kennen we oneindig veel koppels poolcoördinaten toe, nl. alle koppels $(\theta, 0)$ met θ willekeurig in $]-\pi, \pi]$ of in $[0, 2\pi[$. Elk ander punt heeft dus precies één stel poolcoördinaten.

7.2.3 Andere cyclometrische functies

Behalve arcsin bestaan nog twee andere **inverse goniometrische functies** (ook **cyclometrische**[7] **functies** genoemd), nl. arccos en arctan. Wegens

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

heeft arccos als functie geen echte reden van bestaan. We bekijken daarom alleen arctan. Noteren we tijdelijk

$$\mathrm{Tan} := \tan / \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,$$

dan is Tan, met domein $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en waardenverzameling $\mathbb{R}$, strikt stijgend en continu, met een afgeleide die nergens nul is. Bijgevolg heeft Tan een inverse met dezelfde eigenschappen (strikt stijgend en continu, afleidbaar op heel $\mathbb{R}$), waarvan de beeldlijn ontstaat door de beeldlijn van Tan rond de eerste bissectrice te spiegelen.

7.2.14 Definitie. De inverse

$$\arctan := (\mathrm{Tan})^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[= \arctan(\mathbb{R})$$

noemen we de **arcustangens**.

7.2.15 Stelling.

1. *De verwantschap tussen* tan *en* arctan *wordt gegeven door*

$$\begin{cases} \tan(\arctan x) &= x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \arctan(\tan x) &= x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

2. *Voor elke $x \in \mathbb{R}$ is* $\arctan x$ *het enige getal uit* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *(!!) waarvan de tangens gelijk is aan x.*

3. arctan *heeft als domein heel* $\mathbb{R}$ *en als waardenverzameling* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, *is strikt stijgend, oneven en voor alle $x > 0$ is*

$$\arctan x < x.$$

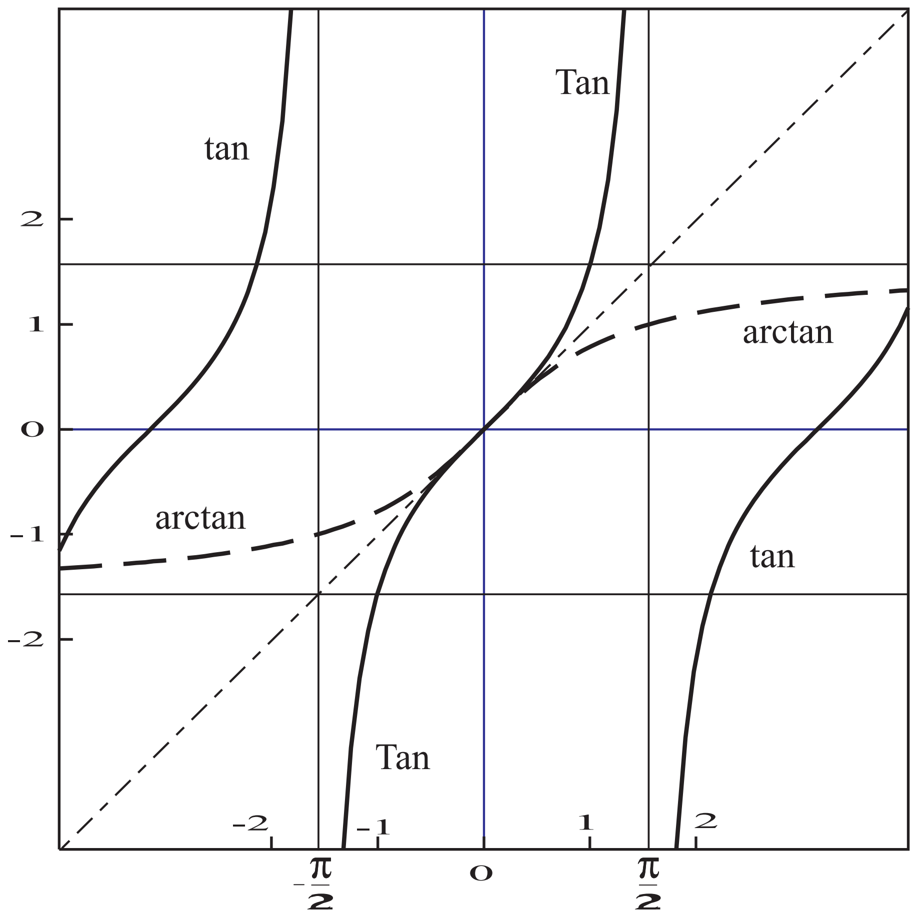
4. $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ *en*

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad \textit{en} \qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

5. arctan *is over* $\mathbb{R}$ *onbepaald afleidbaar, met in het bijzonder*

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

[7]letterlijk: *cirkelmetende*



Figuur 7.13: arctan als inverse van Tan := tan $/\,\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Bewijs. 1. Zoals in Stelling 7.1.22.1.
2–3. Uit de definitie van arctan als inverse van Tan.
4. Af te lezen uit de gespiegelde beeldlijn van Tan, wegens $\tan 0 = 0$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\lim_{x\to(\pi/2)-}\tan x = +\infty$, $\lim_{x\to(-\pi/2)+}\tan x = -\infty$ en $\tan x > x$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$.
5. Omdat arctan de inverse is van Tan, is voor elke $c \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\arctan'(\operatorname{Tan} c) = \frac{1}{\operatorname{Tan}' c} = \cos^2 c = \frac{1}{1 + \operatorname{Tan}^2 c}.$$

Schrijven we $x = \operatorname{Tan} c$, dan volgt $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$. De afgeleide functie $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ is op haar beurt onbepaald afleidbaar over $\mathbb{R}$. □

7.3 Praktische integratietechniek

Dit onderdeel is geen leerstof Theorie. Kunnen toepassen volstaat.

Het zoeken van primitieven noemt men ook *onbepaald integreren*. Dat 'onbepaalde' is weerspiegeld in onze notatie $\int f$, zonder grenzen of integratie-interval. Een integraal $\int_a^b f$ noemt

men dan, in tegenstelling daarmee, een 'bepaalde' integraal. Het open interval waarover men de primitieve zoekt moet uit de context blijken.
De twee belangrijkste rekenregels voor onbepaalde integralen zijn: partiële integratie en substitutie. De betreffende eigenschappen zijn (uiteraard) geen eigenschappen van integratie, maar van afleiding; ze hadden ook in het hoofdstuk over afleiding kunnen staan.

7.3.1 Stelling. *Zijn f en g afleidbaar in het open interval I, dan is*

$$\int fg' = fg - \int f'g \quad \textit{in } I.$$

Bewijs. Deze formule betekent hetzelfde als

$$\left(fg - \int f'g\right)' = fg',$$

en dit volgt uit $(fg)' = f'g + fg'$ en $\left(\int f'g\right)' = f'g$. □

7.3.2 Stelling. *Zij I een open interval waarin θ afleidbaar is. Als*

$$\int f = F \quad \textit{in een open interval dat } \theta(I) \textit{ bevat,}^{8} \tag{7.3}$$

dan is

$$\int (f \circ \theta)\, \theta' = F \circ \theta \quad \textit{in } I. \tag{7.4}$$

Bewijs. De formule (7.3) impliceert dat $F' = f$ over $\theta(I)$, m.a.w.

$$F'\bigl(\theta(x)\bigr) = f\bigl(\theta(x)\bigr), \quad \forall x \in I.$$

Samen met de kettingregel leidt dit tot

$$\bigl(F\bigl(\theta(x)\bigr)\bigr)' = F'\bigl(\theta(x)\bigr)\, \theta'(x) = f\bigl(\theta(x)\bigr)\, \theta'(x), \quad \forall x \in I,$$

d.w.z. (7.4). □

7.3.3 Opmerking. Voor primitieven schrijft men doorgaans

$$\int f(x)\, dx \tag{7.5}$$

in plaats van

$$\left(\int f\right)(x).$$

De notatie (7.5) is verschrikkelijk slecht omdat, anders dan in een bepaalde integraal zoals $\int_a^b f(x)\, dx$, de integratieveranderlijke nu wel degelijk optreedt.[9] In die erg bedenkelijke notatie luidt de vorige stelling dus:

$$\textit{Als} \int f(y)\, dy = F(y) \textit{ in } \theta(I), \textit{ dan} \int f(\theta(x))\, \theta'(x)\, dx = F(\theta(x)) \textit{ in } I.$$

Men kan ze als volgt praktisch samenvatten: *Stelt men $y = \theta(x)$ in de 'onbepaalde integraal' $\int f(y)\, dy$, dan moet men $dy = \theta'(x)\, dx$ stellen.*

[8] $\theta(I)$ is zeker een interval (continu beeld van een interval), maar niet noodzakelijk een *open* interval. De voorwaarde garandeert dat F ook afleidbaar is in $\theta(x_0)$ als $\theta(x_0) = \min(\theta(I))$ of $\theta(x) = \max(\theta(I))$.

[9] Men zou b.v. verleid kunnen worden tot de gruwel $G(0) = \int g(0)\, d0$.

Handmatig integreren is een combinatie van bekende onbepaalde integralen, partiële integratie, substitutie en splitsing in partieelbreuken.

7.3.4 Belangrijkste primitieven

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x > 0 \text{ of } x < 0)$$

$$\int |x| \, dx = \frac{x|x|}{2}, \qquad \int |x|^3 \, dx = \frac{x^3|x|}{4}, \quad \ldots \quad \int |x|^k \, dx = \frac{x^k|x|}{k+1}, \quad \ldots$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argtanh} x \quad (-1 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \quad (-1 < x < 1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x \quad (x > 1)$$

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{argtanh}(\cos x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{argtanh}(\sin x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Naast deze onmiddellijke onbepaalde integralen berust de praktijk van het integreren op onbepaalde integralen van rationale functies. Een daarvan behandelen we afzonderlijk.

7.3.5 Hulpstelling. *De onbepaalde integraal* $I_n := \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ *($n \in \mathbb{N}$) kan, via een recursiebetrekking, uitgedrukt worden d.m.v. een rationale functie en een arctangens.*

Bewijs. Voor $n > 1$ hebben we

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\
&= \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n}\,dt \\
&= \int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,dt \\
&= I_{n-1} - \int \frac{t}{2}\frac{d(1+t^2)}{(1+t^2)^n} \\
&= I_{n-1} - \left(\frac{t}{2}\frac{(1+t^2)^{-n+1}}{-n+1} - \int \frac{(1+t^2)^{-n+1}}{-n+1}\frac{dt}{2}\right) \\
&= I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\,(1+t^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}
\end{aligned}$$

waaruit achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{t}{(2n-2)\,(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \\
I_{n-1} &= \frac{t}{(2n-4)\,(1+t^2)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2n-4}I_{n-2} \\
&\vdots \\
I_2 &= \frac{t}{2\,(1+t^2)} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{t}{2\,(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan t.
\end{aligned}$$

□

7.3.6 Stelling. *Is de rationale functie $R(x)$ gedefinieerd over het interval I, dan kan de onbepaalde integraal $\int R(x)\,dx$ over I uitgedrukt worden d.m.v. rationale functies, logaritmen en arctangenten.*

Bewijs. Bij definitie is $R(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, met $P_1(x)$ en $P_2(x)$ veeltermen, waarbij $P_2(x)$ geen enkel reëel nulpunt in I heeft. Na deling kunnen we schrijven dat

$$P_1(x) = P_2(x)Q(x) + P_3(x),$$

met $\operatorname{gr} P_3 < \operatorname{gr} P_2$, en volgt dat

$$R(x) = Q(x) + \frac{P_3(x)}{P_2(x)},$$

waarbij ditmaal P_3/P_2 een echte rationale functie is, d.w.z. met in de teller een veelterm van lagere graad dan de noemer. Dan is $\int R(x)\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{P_3(x)}{P_2(x)}\,dx$, waarbij $\int Q(x)\,dx$ onmiddellijk een veelterm oplevert. De berekening van $\int \frac{P_3(x)}{P_2(x)}\,dx$ berust op de splitsing van het integrandum in partieelbreuken. Daartoe zoeken we alle reële en alle (steeds in toegevoegde paren voorkomende) complexe nulpunten van $P_2(x)$. Een n-voudig reëel nulpunt a van $P_2(x)$ levert tot de ontbinding in partieelbreuken een bijdrage

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

en een m-voudig complex nulpunt $\alpha \pm i\beta$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) een bijdrage

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{B_2 x + C_2}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^m}.$$

De bijdragen van alle reële en alle complexe nulpunten samen leveren een ontbinding op van de vorm

$$\frac{P_3(x)}{P_2(x)} = \frac{A}{x-a} + \cdots + \frac{B}{(x-b)^n} + \cdots + \frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \cdots + \frac{Ex+F}{\left((x-\gamma)^2+\delta^2\right)^m}.$$

Door de noemers te verdrijven en de ontstane tellers te identificeren ontstaat een stelsel waaruit de reële constanten $A, \ldots, B, \ldots, C, D, \ldots, E, F$ kunnen berekend worden. De onbepaalde integraal $\int \frac{P_3(x)}{P_2(x)}\,dx$ wordt hiermee herleid tot een som van onbepaalde integralen van de elementaire types

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|, \qquad \int \frac{dx}{(x-b)^n} = \frac{(x-b)^{-n+1}}{-n+1} \quad (n > 1)$$

en het type

$$\int \frac{Ex+F}{\left((x-\gamma)^2+\delta^2\right)^m}\,dx \quad (\delta \neq 0).$$

Hierin wordt eerst de noemer gestandaardiseerd door de substitutie $x - \gamma = \delta t$. Men vindt

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ex+F}{\left((x-\gamma)^2+\delta^2\right)^m}\,dx &= \int \frac{E(\gamma+\delta t)+F}{\delta^{2m}\left(1+t^2\right)^m}\delta\,dt \\
&= \frac{E\gamma+F}{\delta^{2m-1}} \int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^m} + \frac{E}{\delta^{2m-2}} \int \frac{t\,dt}{\left(1+t^2\right)^m} \\
&= \frac{E\gamma+F}{\delta^{2m-1}} I_m + \frac{E\left(1+t^2\right)^{-m+1}}{2\delta^{2m-2}(-m+1)} \\
&= \frac{E\gamma+F}{\delta^{2m-1}} I_m + \frac{E}{2\delta^{2m-2}(-m+1)} \left(1 + \left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^2\right)^{-m+1}
\end{aligned}$$

waarbij I_m uit voorgaande hulpstelling bekend is. □

7.3.7 Stelling. *De volgende onbepaalde integralen, waarin $\mathcal{R}$ telkens een rationale functie van de argumenten voorstelt, kunnen herleid worden tot onbepaalde integralen van rationale integranda:*

1. $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, *in het bijzonder* $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{ax+b}\right) dx$
2. $\int \mathcal{R}\left(e^{ax}\right) dx$, *in het bijzonder* $\int \mathcal{R}(\sinh ax, \cosh ax)\, dx$ *($a \neq 0$)*
3. $\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx$
4. $\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ *($a \neq 0$, $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$).*

Bewijs. Merk vooreerst op dat de onbepaalde integralen moeten bepaald worden over een geschikt interval, dat van de definitieverzameling van het integrandum afhangt, en dat we hier verder buiten beschouwing laten. Verderop stellen $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_2$ rationale functies van de argumenten voor.
In 1. substitueren we

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{b-dt^k}{ct^k - a}.$$

Doordat $dx = \mathcal{R}_0(t)\, dt$ verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t\right) \mathcal{R}_0(t)\, dt = \int \mathcal{R}_1(t)\, dt.$$

In 2. substitueren we

$$t = e^{ax}, \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{\ln t}{a}.$$

Hierdoor verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}\left(e^{ax}\right) dx = \int \mathcal{R}(t)\frac{dt}{at} = \int \mathcal{R}_1(t)\, dt.$$

In 3. substitueren we

$$\boxed{t = \tan\frac{x}{2}}$$

waaruit omgekeerd $x = 2\arctan t$. Doordat

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

verkrijgen we

$$\int \mathcal{R}(\sin x, \cos x)\, dx = \int \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2\, dt}{1+t^2} = \int \mathcal{R}_1(t)\, dt.$$

Voor 4. schrijven we vooreerst

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

De aangewezen substitutie is

$$\boxed{t = \sqrt{|a|}\left(x + \frac{b}{2a}\right)}$$

We onderscheiden de volgende gevallen:
(4.1): $\Delta > 0$ en $a > 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx &= \int \mathcal{R}\left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a}}\right) \frac{dt}{\sqrt{a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)\, dt\end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A\cosh u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{t^2 - A^2}\right)\, dt = \int \mathcal{R}_1\left(A\cosh u, A\sinh u\right) A\sinh u\, du = \int \mathcal{R}_2(e^u)\, du.$$

(4.2): $\Delta > 0$ en $a < 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{-a}\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx &= \int \mathcal{R}\left(\frac{t}{\sqrt{-a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{-t^2 - \frac{\Delta}{4a}}\right) \frac{dt}{\sqrt{-a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{A^2 - t^2}\right)\, dt\end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A\sin u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{A^2 - t^2}\right)\, dt = \int \mathcal{R}_1\left(A\sin u, A\cos u\right) A\cos u\, du = \int \mathcal{R}_2(\sin u, \cos u)\, du.$$

(4.3): $\Delta < 0$ en $a > 0$. In dit geval is de substitutie

$$t = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad \text{waaruit omgekeerd } x = \frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}.$$

We verkrijgen

$$\begin{aligned}\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\, dx &= \int \mathcal{R}\left(\frac{t}{\sqrt{a}} - \frac{b}{2a}, \sqrt{t^2 - \frac{\Delta}{4a}}\right) \frac{dt}{\sqrt{a}} \\ &= \int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{t^2 + A^2}\right)\, dt\end{aligned}$$

waarin $A = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}$. Een nieuwe substitutie $t = A \sinh u$ leidt tot

$$\int \mathcal{R}_1\left(t, \sqrt{t^2 + A^2}\right) dt = \int \mathcal{R}_1\left(A \sinh u, A \cosh u\right) A \cosh u \, du = \int \mathcal{R}_2(e^u)\, du.$$

Bemerk hierbij dat het vierde geval $\Delta < 0$ en $a < 0$ zich niet kan voordoen, omdat dan $ax^2 + bx + c < 0$ voor alle reële x. □

7.3.8 Opmerking. De aangegeven werkwijze hoeft niet steeds de efficiëntste te zijn. Met name voor goniometrische integranda kunnen, afhankelijk van het geval, efficiëntere methodes voor de hand liggen.

Vaak nuttig is het volgende: we kunnen voorspellen hoe een primitieve eruitziet van een exponentiële vermenigvuldigd met een veelterm.

7.3.9 Stelling. *Is $0 \neq \mu \in \mathbb{R}$ en $P(x) = c_n x^n + \cdots + c_0$ ($c_n \neq 0$) een n-de graadsveelterm, dan is*

$$\int e^{\mu x} P(x)\, dx = e^{\mu x}\left(\frac{c_n}{\mu} x^n + \textit{termen van lagere graad}\right) \tag{7.6}$$

over $\mathbb{R}$.

Bewijs. Door volledige inductie naar n. Voor $n = 0$ is de formule triviaal, want $P(x)$ is dan constant. Veronderstel de opgave correct voor graad 0 t.e.m. n, en bekijk een veelterm

$$Q(x) = c_{n+1} x^{n+1} + \underbrace{c_n x^n + \cdots + c_0}_{P(x)}$$

van graad $n + 1$. Door partiële integratie volgt

$$\begin{aligned}
\int e^{\mu x} Q(x)\, dx &= \int e^{\mu x}\left(c_{n+1} x^{n+1} + P(x)\right) dx \\
&= c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} x^{n+1} - \int c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} (n+1) x^n \, dx + \int e^{\mu x} P(x)\, dx \\
&= c_{n+1} \frac{e^{\mu x}}{\mu} x^{n+1} + \int e^{\mu x} \left(\left(c_n - \frac{c_{n+1}(n+1)}{\mu}\right) x^n + \cdots + c_0\right) dx.
\end{aligned}$$

Door de inductiehypothese is de laatste primitieve gelijk aan $e^{\mu x}$ maal een veelterm van graad hoogstens n. Samenvoegend vinden we

$$\int e^{\mu x} Q(x)\, dx = e^{\mu x}\left(\frac{c_{n+1} x^{n+1}}{\mu} + \text{termen van lagere graad}\right).$$

□

Een mooie toepassing van primitieven is het oplossen van een bepaald soort differentiaalvergelijking.

7.3.10 Definitie. Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking waarin een onbekende functie voorkomt als afgeleide van de eerste of van hogere orde.[10] Een **oplossing** van een bepaalde differentiaalvergelijking over een bepaald open interval is een functie die van de vergelijking een gelijkheid maakt over het beschouwde interval. Dat houdt ook in dat die functie in dat interval zoveel keer afleidbaar is als de vergelijking het vereist.

[10] In deze context gebruikt men ook kortweg 'vergelijking' i.p.v. 'differentiaalvergelijking'.

7.3.11 Opmerking. De methodes die in het vervolg ontwikkeld worden leiden tot *reëelwaardige* oplossingen van onze reële differentiaalvergelijkingen. In principe komen ook *complexwaardige* functies van een reële veranderlijke in aanmerking als oplossingen van een reële differentiaalvergelijking.

7.3.12 Definitie. Een **beginwaardenvraagstuk** bestaat uit een differentiaalvergelijking en het opgeven van de waarde die de oplossing in een bepaald punt moet hebben, of van de waarden die de oplossing en sommige van haar afgeleiden in een bepaald punt moeten hebben.

7.3.13 Definitie. Een **differentiaalvergelijking van de eerste orde met gescheiden veranderlijken** heeft de gedaante

$$g(y)y' = f(x) \tag{7.7}$$

met I een open interval, $f : I \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekende functies en y de onbekende functie.

7.3.14 Stelling. *Zij F een primitieve van f over I en G een primitieve van g over $\mathbb{R}$. De oplossingen van de differentiaalvergelijking* (7.7) *over I zijn de afleidbare oplossingen van de (algebraïsche) vergelijkingen*

$$G(y) = F(x) + C \qquad (x \in I) \tag{7.8}$$

met C constant.

Bewijs. Zij φ afleidbaar op I. Dan is φ een oplossing van (7.7) over I juist als

$$g(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x) \qquad (x \in I), \tag{7.9}$$

hetgeen equivalent is met het bestaan van een constante C waarvoor

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,dx + C, \tag{7.10}$$

of nog, door (7.4),

$$G(\varphi(x)) = \int f(x)\,dx + C \qquad (x \in I).$$

□

7.3.15 Opmerkingen.

1. De eigenlijke oplossing φ van de differentiaalvergelijking moet nog bepaald worden uit de vergelijking (7.8). De constante C kan gebruikt worden om φ aan een beginvoorwaarde te laten voldoen. Een oplossing waarvoor $\varphi(x_0) = y_0$ geldt moet zeker gezocht worden onder de oplossingen van (7.8) waarvoor $G(y_0) = F(x_0) + C$, dus onder de oplossingen van $G(\varphi(x)) = F(x)+G(y_0)-F(x_0)$. *Niets garandeert echter dat elke oplossing van deze welbepaalde algebraïsche vergelijking ook aan de beginvoorwaarde $\varphi(x_0) = y_0$ voldoet,* zie het voorbeeld hieronder.

2. In de praktijk voert men de onbepaalde integratie snel formeel door via de symbolische substitutie-regel $dy = y'dx$ (zie opm. 6.5.3):

$$\int g(y)\,dy = \int g(y)y'\,dx = \int f(x)\,dx + C.$$

7.3.16 Voorbeeld. *Los het beginwaardenvraagstuk*

$$2(y-1)y' = 3x^2 + 4x + 2, \qquad y(0) = -1$$

op over een geschikt open interval.

Formeel is

$$\int 2(y-1)\,dy = \int 2(y-1)y'\,dx = \int (3x^2 + 4x + 2)\,dx + C$$

d.w.z.

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

met $C = 3$ als we willen dat $y(0) = -1$. Vandaar

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

De oplossingen van deze vierkantsvergelijking zijn

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

maar slechts één hiervan, nl.

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

voldoet aan de beginvoorwaarde $y(0) = -1$. (De oplossing $y = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$ levert $y(0) = 3$.) Omdat $x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ maar één reëel nulpunt heeft, nl. $x = -2$, is het beginwaardenvraagstuk daarmee opgelost over $]-2, +\infty[$.

7.4 Oefeningen

1. Bereken de volgende primitieven; a en b zijn constant. [Aanwijzing: substitutie.]
   (1) $\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$ (2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ (3) $\int \sin(a-x)\,dx$ (4) $\int e^{ax}\,dx$ $(a \neq 0)$
   (5) $\int \frac{x^3}{x-1}\,dx$ (6) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ (7) $\int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\,dx$ (8) $\int (x-a)^{b-1}\,dx$ $(b \neq 0)$
   (9) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ (10) $\int \frac{\cos x}{a+b\sin x}\,dx$ (11) $\int \frac{e^{-2/x^2}}{x^3}\,dx$ (12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (13) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
   (14) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ (15) $\int \sin^3 x\,dx$ (16) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$ (17) $\int \frac{x}{(a^2+x^2)\ln(a^2+x^2)}\,dx$

2. Bereken de volgende primitieven; a is constant. [Aanwijzing: partiële integratie.]
   (1) $\int x\sin x\,dx$ (2) $\int \arctan x\,dx$ (3) $\int \arcsin x\,dx$ (4) $\int x^a \ln x\,dx$ (5) $\int x^3 e^{2x}\,dx$
   (6) $\int \sin 2x\, e^{\sin x}\,dx$ (7) $\int \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (8) $\int e^x \sin x\,dx$.

3. Stel een recursiebetrekking op voor:
   (1) $I_n = \int \sin^n x\,dx$ (2) $J_n = \int \cos^n x\,dx$ (3) $L_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
   (4) $K_{m,n} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx$.

4. Bereken de volgende primitieven; a en b zijn constant. [Aanwijzing: rationaal integrandum.]

(1) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$ (2) $\int \frac{dx}{x^4+4}$ (3) $\int \frac{dx}{x^4-a^4}$ (4) $\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$ (5) $\int \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\,dx$
(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$ (7) $\int \frac{dx}{\cosh x}$ (8) $\int \frac{dx}{2+e^{2x}}$ (9) $\int \frac{dx}{\tan x+\sin x}$
(10) $\int \frac{dx}{1+a\cos x}$ $(-1 < a < 1)$ (11) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$ (12) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ (13) $\int \frac{dx}{\sin x\cos^5 x}$
(14) $\int \tan^2 x\,dx$ (15) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ (16) $\int \frac{\sin x}{(a-b\cos x)^2}\,dx$ (17) $\int \frac{x}{4-x^2+\sqrt{4-x^2}}\,dx$
(18) $\int \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{2+x+\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$.

5. Bereken de volgende primitieven; a, b, c, d zijn constant.

(1) $\int x^2\sin x\,dx$ (2) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$ (3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (4) $\int e^{-2x}\left(2\ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$
(5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$ (6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{a+b\tan x}}$ (7) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-1}}$ $(x \geqslant 1)$
(8) $\int x\ln(x+3)\,dx$ (9) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ (10) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$ $(0 < x \leqslant 1)$ (11) $\int \frac{\tan x}{\ln\cos x}\,dx$
(12) $\int \cos 7x\sinh 3x\,dx$ (13) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(b^2 > 4ac$ en $b^2 < 4ac)$
(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(b^2 > 4ac, a > 0;\ b^2 > 4ac, a < 0;\ b^2 < 4ac, a > 0)$
(15) $\int_a^b x^2 f(x)\,dx$, waarbij $f(x) = \int_c^d \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy$ $(0 < a < b; 0 < c < d)$.

6. Bereken de volgende primitieven; a, b, c zijn constant.

(1) $\int \frac{dx}{\ln(x^x)}$ (2) $\int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^2}\,dx$ (3) $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$ (4) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^6 x}$ (5) $\int \frac{\sin 2x}{\cos 3x}\,dx$
(6) $\int \frac{dx}{x^3(x^4-a^4)}$ $(x > a > 0)$ (7) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ $(ab \neq 0)$ (8) $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$
$(a \neq 0)$ (9) $\int \sin^2(\sqrt{x})\,dx$ (10) $\int x\tan^2 x\,dx$ (11) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$ (12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
(13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})}$ (14) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$ (15) $\int \sqrt{1-\sin x}\,dx$
(16) $\int \frac{5^x}{5^x+2^x}\,dx$ (17) $\int \frac{\sin x-x\cos x}{(x+\sin x)^2}\,dx$ (18) $\int \frac{dx}{b+c\tanh ax}$ $(b \neq c)$ (19) $\int \frac{\sin x\,dx}{(\cos 2x)^{3/2}}$
(20) $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$ (21) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^n}}$ $(a > 0)$ (22) $\int \sqrt{2-\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx$ $(0 < x < \pi/4)$
(23) $\int \sin x\ln(\sin x)\,dx$ $(0 < x < \pi)$.

7. Zij $\mathcal{R}(x)$ een rationale functie. Toon aan dat de volgende primitieven $(a, b, c, d$ constant$)$ herleid kunnen worden tot primitieven van rationale integranda:

(1) $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx$ (2) $\int \cos x\,\mathcal{R}(\sqrt{\cos 2x}, \cos^2 x)\,dx$
(3) $\int \sqrt{1+\cos x}\,\mathcal{R}(\cos x, \sqrt{a\cos x+b})\,dx$ (4) $\int \sqrt{1-\cos x}\,\mathcal{R}(\cos x, \sqrt{a\cos x+b})\,dx$.

8. Is $b \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$, en $f(x+a) = bf(x)$, bewijs dan dat $\int_0^{na} f = \frac{1-b^n}{1-b}\int_0^a f$.

9. * Is f integreerbaar over $[a, b]$, bewijs dan dat $\left(\int_a^b f\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2$.
(Aanwijzing: voor elke $c \in \mathbb{R}$ is $\int_a^b (f(x)-c)^2\,dx \geqslant 0$.)

10. Los op:

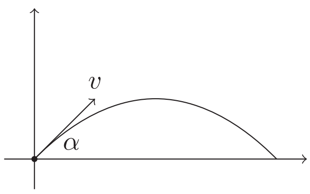
(1) $y' = x^2y^3$ met $y(1) = 3$ (2) $y' = 2y/x$ met $y(1) = 3$ (3) $y' = e^{2x+5y}$ met $y(0) = -1$ (4) $y' = (y\sin x)/2$ met $y(0) = e$ (5) $y' = (7y\ln x)/3$ met $y(1) = e$ (6) $y' = e^{x-2y}$ met $y(1) = 1/2$ (7) $y' = 4y^2-1$ met $y(0) = -3/2$.

11. Vraagstukken

(a) Noteer met $x(t)$ de afstand die een vallend voorwerp vanuit rust aflegt na t seconden.

i. Bepaal $x(t)$ op basis van het gegeven dat de versnelling $x''(t)$ een constante a is. (Aanwijzing: 'vanuit rust' betekent dat $x(0) = x'(0) = 0$.)
ii. Toon aan dat de evenredigheidswet $x(t) = \lambda x'(t)$ (zekere $\lambda > 0$) dan niet kan gelden.[11]
iii. Als de afstand in meter uitgedrukt wordt, is (benaderend) $a = 9,8$. Hoeveel seconden tijd heb je om uit de weg te gaan als een luster van een 10 meter hoge zoldering naar beneden valt?
iv. Met welke snelheid (m/s) raakt de luster de grond?
v. Waar is de luster op het moment dat haar snelheid de helft hiervan is?

(b) Een projectiel wordt afgeschoten vanop de grond met een snelheid v vanuit een hoek α met de horizontale as (zie figuur).



i. Onder invloed van de zwaartekracht is de horizontale versnelling $x''(t) = 0$ en de verticale versnelling $y''(t) = -9,8$ voor alle t (totdat het projectiel opnieuw de grond raakt). Bepaal $x(t)$ en $y(t)$.
ii. Toon aan dat het projectiel een deel van een parabool beschrijft.
iii. Bepaal $\alpha \in]0, \pi[$ zo dat het projectiel de grootste horizontale afstand aflegt alvorens het opnieuw de grond raakt. (Je mag aannemen dat het terrein vlak is.)

(Aanwijzing: $x'(0) = v \cos \alpha$ en $y'(0) = v \sin \alpha$.)

(c) De groei van bacteriën wordt dikwijls gemodelleerd door de vergelijking

$$N'(t) = \kappa N(t)$$

waarbij $N(t)$ (benaderd) het aantal bacteriën geeft op tijdstip t, en $\kappa > 0$ constant is. Deze vergelijking geeft enkel een realistisch model als de bacteriën onbeperkte plaats, voedingsstoffen, ... krijgen. Los ze op en bepaal $\lim_{t\to+\infty} N(t)$ als $N(0) > 0$.

(d) Als er maar plaats is voor $N_{\max} > 0$ bacteriën, dan wordt een meer realistisch model gegeven door

$$N'(t) = \kappa\Big(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\Big)N(t).$$

Los ze op en bepaal $\lim_{t\to+\infty} N(t)$ als $0 < N(0) < N_{\max}$.

(e) De tractrix is de kromme die ontstaat als baan (in het vlak) van het ene uiteinde van een staaf, wanneer het andere uiteinde een rechte baan volgt. Veronderstel dat de rechte de Y-as is en de lengte van de staaf 1. Stel $f(x) :=$ het gedeelte van de baan boven de X-as ($0 < x \leqslant 1$). Leid dan uit de fysische veronderstelling dat op elk moment de staaf raakt aan de tractrix een (differentiaal)vergelijking af voor f. Los ze op. Controleer nadien dat de oplossing in parametergedaante kan geschreven worden als

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cosh t} \\ y(t) = t - \tanh t. \end{cases}$$

[11] Galilei geloofde een tijd lang in deze 'wet' van vallende lichamen, maar zag nadien zijn vergissing in.

12. (**Formule van Stirling, 1e versie**) In deze oefening vragen we ons af hoe $n!$ groeit als functie van n. Er geldt duidelijk dat $n! \leqslant n^n$, maar n^n is absoluut geen goede benadering van $n!$. Vermits de logaritme producten omzet in sommen, ontstaat het idee om $\ln(n!)$ te bekijken.

    (a) Toon aan dat $\ln(k-1) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \leqslant \ln k$. (Aanwijzing: ln is stijgend.)

    (b) Leid daaruit af dat $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln x\, dx \leqslant \ln(n!) \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln x\, dx$.

    (c) Leid daaruit af dat $\displaystyle\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$.

    (d) De integraal van $\ln x$ kan beter benaderd worden door de zgn. *trapeziumregel*. Toon aan dat $\int_{k-1}^{k} \ln x\, dx \geqslant \frac{\ln(k-1)+\ln k}{2}$. (Aanwijzing: het rechterlid is de oppervlakte van een trapezium. Duid de oppervlaktes aan op een grafiek.)

    (e) Verbeter hiermee de bovengrens tot $n! \leqslant e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

    Op een grafiek is goed zichtbaar dat de gemaakte fout tussen de integraal en haar benadering d.m.v. de trapeziumregel beduidend kleiner is dan die van de benadering van de integraal d.m.v. de oppervlakte van rechthoeken. We kunnen daarom vermoeden dat de laatste afschatting de beste is van deze oefening. We zullen later zien dat ook $n! \geqslant c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ voor zekere $c > 0$.