UNIVERSITEIT GENT

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

VAKGROEP INFORMATIETECHNOLOGIE
IDLAB

REDENEREN, ABSTRAHEREN EN FORMULEREN

Eric Laermans (eric.laermans@ugent.be)

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. Beperkingen van propositielogica
  2. Formulering en predicaten als functies
  3. Kwantoren
  4. Rekenregels
  5. Toepassing op verzamelingen

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. **Beperkingen van propositielogica**
  2. Formulering en predicaten als functies
  3. Kwantoren
  4. Rekenregels
  5. Toepassing op verzamelingen

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken (herhaling)**
  - Eigenschappen van entiteiten
  - Hoeveelheden: “alle” vs. “sommige”
  - Groepen van entiteiten
  - Relaties tussen entiteiten

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken (herhaling)**
  - Eigenschappen van entiteiten, bv.
    - Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - Leuven telt meer dan 100 000 inwoners
      - Gelijkaardige eigenschap voor beide steden:
        - "*Stad* telt meer dan *aantal* inwoners"
        - Eigenschap voor entiteit *Stad* met *aantal* als extra parameter
    - Predicaten hiervoor nodig

UNIVERSITEIT GENT

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken**
  - Hoeveelheden: "alle" vs. "sommige", bv.
    - Oorspronkelijk syllogisme van Aristoteles:
      - *Alle* mensen zijn sterfelijk
      - Socrates is een mens
        - **Dus**: Socrates is sterfelijk
    - Kwantoren (en dus predicaten) hiervoor nodig

UNIVERSITEIT GENT

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken**
  - Groepen van entiteiten, bv.
    - Gent behoort tot de Europese havensteden en tot de Belgische steden
    - Rotterdam behoort tot de Europese havensteden en tot de Nederlandse steden

    - Verzamelingen hiervoor nodig
      - Ook met predicaten uit te drukken

UNIVERSITEIT GENT

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken**
  - Relaties tussen entiteiten, bv.
    - Gent telt meer inwoners dan Leuven
      - Vergelijking tussen gelijkaardige entiteiten Gent en Leuven
        - "*Stad1* telt meer inwoners dan *Stad2*"

    - Relaties hiervoor nodig
      - Speciaal type predicaten

UNIVERSITEIT GENT

BEPERKINGEN VAN PROPOSITIELOGICA

- **Niet alles in proposities uit te drukken**
  - Propositielogica geschikt voor basisredeneringen
    - Blijft bruikbaar
  - Uitbreiding nodig om complexere concepten te kunnen uitdrukken

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. Beperkingen van propositielogica
  2. **Formulering en predicaten als functies**
  3. Kwantoren
  4. Rekenregels
  5. Toepassing op verzamelingen

FORMULERING

- **Eigenschappen van entiteiten (1)**
  - Bv. Jan is een man
    - Algemenere formulering:
      - "*Persoon* is een man"
      - Entiteit: *Persoon*
      - Eigenschap: … is een man
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Persoon*
        - ➢ Waar voor Jan, vals voor Inge

FORMULERING

- **Eigenschappen van entiteiten (2)**
  - Bv. 5 is even
    - Algemenere formulering:
      - "*Getal* is even"
      - Entiteit: *Getal*
      - Eigenschap: … is even
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Getal*
        - ➢ Waar voor 4, vals voor 5

FORMULERING

- **Eigenschappen van entiteiten (3)**
  - Bv. Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - Algemenere formulering:
      - "*Stad* telt meer dan *aantal* inwoners"
      - Entiteit: *Stad*
      - Eigenschap: … telt meer dan *aantal* inwoners
        - ➢ Eigenschap hier afhankelijk van een parameter (*aantal*)
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Stad* en *aantal*
        - ➢ Waar voor Gent, vals voor Leuven als aantal 250 000 is

FORMULERING

- **Eigenschappen van entiteiten (4)**
  - Bv. Gent telt meer inwoners dan Leuven
    - Algemenere formulering:
      - "*Stad1* telt meer inwoners dan *Stad2*"
      - Entiteiten: *Stad1* en *Stad2*
      - Eigenschap: … telt meer inwoners dan …
        - ➢ Meerdere betrokken entiteiten (relaties)
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Stad1* en *Stad2*
        - ➢ Waar voor resp. Gent en Leuven, vals voor resp. Leuven en Gent

PREDICAAT ALS FUNCTIE

- **Eigenschappen van entiteiten**
  - Te formuleren als functie: predicaat
    - Met entiteiten en eventueel andere parameters als argumenten
      - Funmath: tupel van entiteiten en andere parameters als argument
    - Beeldwaarde is een propositie: waar of vals

PREDICAAT ALS FUNCTIE

- **Formeler (Funmath)**
  - Een functie P is een predicaat a.s.a.
    - $x \in \mathcal{D}P \quad \Rightarrow \quad P(x) \in \mathbb{B}$
    - Waarbij P de eigenschap voorstelt
    - Waarbij x zowel kan zijn:
      - Een enkelvoudig argument (de entiteit waarvoor de eigenschap van toepassing is)
      - Een tupel van argumenten (de entiteit(en) en de andere pararameters)

PREDICAAT ALS FUNCTIE

- **Formeler (Funmath)**
  - Een functie P is een predicaat over een verzameling X a.s.a.
    - $P \in X \rightarrow \mathbb{B}$

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (1)**
  - Bv. Jan is een man
    - $P(x)$: "x is een man"
    - $\mathcal{D}P = M$
      - Met M de verzameling van de mensen
        - Zullen we nog af en toe gebruiken
    - Met abstractie:
      - $P = x : M \,.\, P(x)$
    - $P \in M \rightarrow \mathbb{B}$

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (2)**
  - Bv. 5 is even
    - $P(n)$: "n is even"
    - $\mathcal{D}P = \mathbb{N}$
    - Met abstractie:
      - $P = n : \mathbb{N} \,.\, P(x)$
    - $P \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (3)**
  - Bv. Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - $P(s,n)$: "s telt meer dan n inwoners"
    - $\mathcal{D}P = S \times \mathbb{N}$
      - Met S de verzameling van de steden
    - Met abstractie:
      - $P = (s,n) : S \times \mathbb{N} \,.\, P(s,n)$
    - $P \in S \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (4)**
  - Bv. Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - Alternatieve formulering (1)
      - $I = s : S$. aantal inwoners van s
      - $I \in S \to \mathbb{N}$
        - ➢ I is geen predicaat (!!)
      - $P = (s,n) : S \times \mathbb{N} \,.\, I(s) > n$
      - $P \in S \times \mathbb{N} \to \mathbb{B}$
        - ➢ P is dus wel een predicaat

UNIVERSITEIT GENT

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (5)**
  - Bv. Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - Alternatieve formulering (2)
      - $Q = n : \mathbb{N} \,.\, s : S \,.\, I(s) > n$
      - $Q \in \mathbb{N} \to S \to \mathbb{B}$
        - ➢ $Q(n)$ is een predicaat: $Q(n) \in S \to \mathbb{B}$
        - ➢ Merk op dat $(Q(n))(s) \equiv P(s,n)$

UNIVERSITEIT GENT

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (5)**
  - Bv. Gent telt meer inwoners dan Leuven
    - $R(s1,s2)$: "$s1$ telt meer inwoners dan $s2$"
    - $\mathcal{D}R = S^2$
      - Met S de verzameling van de steden
    - Met abstractie:
      - $R = (s1,s2) : S^2 \,.\, R(s1,s2)$
    - $R \in S^2 \rightarrow \mathbb{B}$

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (6)**
  - Bv. Gent telt meer inwoners dan Leuven
    - Alternatieve formulering
      - $I = s : S$. aantal inwoners van s
      - $I \in S \rightarrow \mathbb{N}$
        - ➢ I is geen predicaat (!!)
      - $R = (s1,s2) : S^2 \,.\, I(s1) > I(s2)$
      - $R \in S^2 \rightarrow \mathbb{B}$
        - ➢ R is dus wel een predicaat over S^2
        - ➢ I.e. een relatie over S

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (7)**
  - Bv. x is een priemgetal, en y of z is deelbaar door x
    - Proposities
      - p: x is een priemgetal
      - q: y is deelbaar door x
      - r: z is deelbaar door x
      - Formulering: $p \wedge (q \vee r)$

UNIVERSITEIT GENT

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (8)**
  - Bv. x is een priemgetal, en y of z is deelbaar door x
    - Predicaten
      - $P(x)$: x is een priemgetal
        - $P \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$
      - $D(y,x)$: y is deelbaar door x
        - $D \in \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{B}$
      - Formulering: $P(x) \wedge (D(y,x) \vee D(z,x))$

UNIVERSITEIT GENT

FORMULERING

- **Formulering van eigenschappen (9)**
  - Bv. formuleren van nodige en voldoende voorwaarde opdat x de grootvader van z zou zijn
    - Predicaten:
      - $Va(x,y)$: x is de vader van y
      - $Moe(x,y)$: x is de moeder van y
      - $Gv(x,y)$: x is de grootvader van y
        - $Va, Moe, Gv \in (M^2 \rightarrow \mathbb{B})^3$
      - Formulering: $Gv(x,z) \equiv Va(x,y) \wedge (Va(y,z) \vee Moe(y,z))$

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. Beperkingen van propositielogica
  2. Formulering en predicaten als functies
  3. **Kwantoren**
  4. Rekenregels
  5. Toepassing op verzamelingen

KWANTOREN

- **Geldigheid van eigenschappen**
  - Voor alle beschouwde entiteiten
    - Universele kwantificatie
  - Voor sommige (d.w.z. minstens 1) beschouwde entiteiten
    - Existentiële kwantificatie
  - Voor geen enkele beschouwde entiteit
    - Ook universele kwantificatie
      - Van de negatie van de eigenschap

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Betekenis:
    - Eigenschap geldt voor alle beschouwde elementen

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (1)
    - $\forall\, x : X \,.\, P(x)$
      - $\forall$: universele kwantor
      - x : gebonden veranderlijke (cf. abstracties)
      - X : type van de veranderlijke
      - $P(x)$: lichaam van de kwantificatie

      - Voor alle x in X geldt $P(x)$

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (2)
    - $\forall\, x : X \,.\, P(x)$
      - Andere formele talen gebruiken vaak licht andere notaties

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (3)
    - $\forall\, x : X \,.\, P(x)$
      - Kan ook gelezen worden als de functie-applicatie van $\forall$ (de universele kwantor) op de abstractie $x : X \,.\, P(x)$
        - Verkorte notatie $\forall\, P$

          Gebaseerd op eigenschap van abstracties:

          $P = \; x : X \,.\, P(x)$

          (zullen we hier niet al te vaak gebruiken)

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (4)
    - $\forall\, x : X \,.\, P(x)$
      - Is een propositie
        - D.w.z. de universele kwantor $\forall$ kan gezien worden als een predicaat dat een ander predicaat als argument neemt, een predicaat over predicaten dus

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (5)
    - $\forall\, x : X \,.\, P(x) \wedge \forall\, y : X \,.\, Q(y)$
      - Te lezen als:
        - $\forall\, x : X \,.\, (P(x) \wedge \forall\, y : X \,.\, Q(y))$
        - Cf. haakjesconventies met abstracties
      - Niet te verwarren met:
        - $(\forall\, x : X \,.\, P(x)) \wedge (\forall\, y : X \,.\, Q(y))$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Bv. oorspronkelijk syllogisme van Aristoteles (1)
    - *Alle* mensen zijn sterfelijk
    - Socrates is een mens
      - **Dus**: Socrates is sterfelijk
    - Formulering
      - $S(x)$: x is sterfelijk
      - *soc*: Socrates
      - $(\forall\, x : M \,.\, S(x)) \wedge soc \in M \;\Rightarrow\; S(soc)$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Bv. oorspronkelijk syllogisme van Aristoteles (2)
    - Alternatieve formulering
      - $S(x)$: x is sterfelijk
      - $Me(x)$: x is een mens
      - soc: Socrates
      - $(\forall\, x : \mathcal{U} \,.\, Me(x) \Rightarrow S(x)) \wedge Me(soc) \Rightarrow S(soc)$
        - ➢ Keuze tussen verzamelingen (domein van predicaat) of predicaat voor formulering
        - ➢ $Me = x : \mathcal{U} \,.\, x \in M$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Bv. Alles in die winkel is duur of van slechte kwaliteit
    - Formulering
      - $Wi(x)$: x ligt in die winkel
      - $D(x)$: x is duur
      - $Sk(x)$: x is van slechte kwaliteit
      - Wa: de verzameling van mogelijke verkochte waar
      - $\forall\, x : Wa \,.\, Wi(x) \Rightarrow D(x) \vee Sk(x)$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Universele kwantificatie**
  - Over eindig type, bv.
    - $\forall\, x : \{c1,c2,c3,c4\} \;.\; P(x)$
    - Expansie mogelijk tot eindig aantal conjuncties
      - $(\forall\, x : \{c1,c2,c3,c4\} \;.\; P(x)) \equiv P(c1) \wedge P(c2) \wedge P(c3) \wedge P(c4)$
      - Formulering met kwantor wel bondiger
      - Expansie natuurlijk niet mogelijk voor oneindig type

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Betekenis:
    - Eigenschap geldt voor sommige beschouwde elementen
      - “Sommige” te verstaan als 1 of meer

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (1)
    - $\exists\, x : X \,.\, P(x)$
      - $\exists$: existentiële kwantor
      - x : gebonden veranderlijke (cf. abstracties)
      - X : type van de veranderlijke
      - $P(x)$: lichaam van de kwantificatie

      - Er zijn x in X waarvoor $P(x)$ geldt

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (2)
    - $\exists\, x : X \,.\, P(x)$
      - Andere formele talen gebruiken vaak licht andere notaties

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (3)
    - $\exists\, x : X\, .\, P(x)$
      - Kan ook gelezen worden als de functie-applicatie van $\exists$ (de existentiële kwantor) op de abstractie $x : X\, .\, P(x)$
        - ➢ Verkorte notatie $\exists\, P$

          Gebaseerd op eigenschap van abstracties:

          $P = \ x : X\, .\, P(x)$

          (zullen we hier niet al te vaak gebruiken)

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Notatie (Funmath) (4)
    - $\exists\, x : X\, .\, P(x)$
      - Is een propositie
        - ➢ D.w.z. de existentiële kwantor $\exists$ kan gezien worden als een predicaat dat een ander predicaat als argument neemt, een predicaat over predicaten dus

KWANTOREN

Existentiële kwantificatie

- Notatie (Funmath) (5)
  - $\exists\, x : X\,.\, P(x) \wedge \forall\, y : X\,.\, Q(y)$
    - Te lezen als:
      - $\exists\, x : X\,.\, (P(x) \wedge \forall\, y : X\,.\, Q(y))$
      - Cf. haakjesconventies met abstracties
    - Niet te verwarren met:
      - $(\exists\, x : X\,.\, P(x)) \wedge (\forall\, y : X\,.\, Q(y))$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

Existentiële kwantificatie

- Bv. Er zijn in die winkel artikels die goedkoop en degelijk zijn
  - Formulering
    - *Wi*(x): x ligt in die winkel
    - *Gk*(x): x is goedkoop
    - *De*(x): x is degelijk
    - *Wa*: de verzameling van mogelijke verkochte waar
    - $\exists\, x : Wa\,.\, Wi(x) \wedge (Gk(x) \wedge De(x))$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Bv. (meer wiskundig) een predicaat (*Even*) dat aangeeft of een natuurlijk getal even is
    - Formulering
      - $Even(n) \equiv \exists\, m : \mathbb{N}\ .\ n = 2 \cdot m$
        - ➢ Of met een abstractie geformuleerd
          $Even = n : \mathbb{N}\ .\ \exists\, m : \mathbb{N}\ .\ n = 2 \cdot m$
    - Vind zelf een formulering voor een predicaat dat aangeeft of een natuurlijk getal oneven is

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Existentiële kwantificatie**
  - Over eindig type, bv.
    - $(\exists\, x : \{c1, c2, c3, c4\}\ .\ P(x)$
    - Expansie mogelijk tot eindig aantal disjuncties
      - $(\exists\, x : \{c1, c2, c3, c4\}\ .\ P(x)) \equiv P(c1) \vee P(c2) \vee P(c3) \vee P(c4)$
      - Formulering met kwantor wel bondiger
      - Expansie natuurlijk niet mogelijk voor oneindig type

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

▪ Geneste kwantoren

- Met universele kwantoren
  - $\forall\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)$

  - Betekenis:
    - $P(x,y)$ geldt voor alle x in X en voor alle y in Y

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

▪ Geneste kwantoren

- Met universele kwantoren
  - $\forall\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)$
  - Formeel:
    - $(y : Y \,.\, P(x,y))$ is een predicaat
      - ➢ Gebonden veranderlijke y, vrije veranderlijke x
      - ➢ $(\forall\, y : Y \,.\, P(x,y))$ is dus een propositie
    - $(x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y))$ is dus ook een predicaat
      - ➢ Zowel x als y gebonden veranderlijken

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met universele kwantoren
    - Alternatieve formuleringen
      - $\forall\, y : Y\, .\, \forall\, x : X\, .\, P(x,y)$
        - Volgorde van universele kwantificaties is onbelangrijk
      - $\forall\, (x,y) : X \times Y\, .\, P(x,y)$
        - Kwantificatie over tupels i.p.v. geneste kwantificatie
        - Cf. abstracties: genest vs. tupels

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met universele kwantoren
    - Bv. commutativiteit van de optelling in $\mathbb{R}$

      $\forall\, x : \mathbb{R}\, .\, \forall\, y : \mathbb{R}\, .\, x + y = y + x$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met existentiële kwantoren
    - $\exists\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)$

    - Betekenis:
      - Er zijn x in X en y in Y waarvoor $P(x,y)$ geldt

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met existentiële kwantoren
    - Alternatieve formuleringen
      - $\exists\, y : Y \,.\, \exists\, x : X \,.\, P(x,y)$
        - ➢ Volgorde van existentiële kwantificaties is onbelangrijk
      - $\exists\, (x,y) : X \times Y \,.\, P(x,y)$
        - ➢ Kwantificatie over tupels i.p.v. geneste kwantificatie
        - ➢ Cf. abstracties: genest vs. tupels

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

▪ Geneste kwantoren

- Met existentiële kwantoren
  - Bv. Er zijn mensen die met elkaar getrouwd zijn
  - Formulering
    - $T(x,y)$: x is getrouwd met y
      - ➢ Dit is een relatie (in alle betekenissen van het woord)
    - M: de verzameling van de mensen
    - $\exists\, x : M \,.\, \exists\, y : M \,.\, T(x,y)$
    - Alternatieve formulering (met koppels):
      - ➢ $\exists\, (x,y) : M^2 \,.\, T(x,y)$

KWANTOREN

▪ Geneste kwantoren

- Met zowel existentiële als universele kwantoren
  - $\forall\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)$
  - Betekenis:
    - Voor elke x in X zijn er y in Y waarvoor $P(x,y)$ geldt
  - $\exists\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)$
  - Betekenis:
    - Er zijn x in X, zodat $P(x,y)$ geldt voor alle y in Y

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met zowel existentiële als universele kwantoren
    - $\forall\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)$
    - $\exists\, y : Y \,.\, \forall\, x : X \,.\, P(x,y)$
    - Dit zijn 2 verschillende uitdrukkingen
      - De volgorde van de kwantoren is hier wel belangrijk
    - Niet mogelijk als kwantificatie over tupels te beschrijven

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met zowel existentiële als universele kwantoren
    - Bv. voor elk natuurlijk getal, is er een natuurlijk getal dat groter is
    - Formulering
      - $\forall\, n : \mathbb{N} \,.\, \exists\, m : \mathbb{N} \,.\, m > n$
    - Het omgekeerde is niet waar: $\exists\, m : \mathbb{N} \,.\, \forall\, n : \mathbb{N} \,.\, m > n$
      - Dit zou betekenen dat er een natuurlijk getal is dat groter is dan alle natuurlijke getallen

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met zowel existentiële als universele kwantoren
    - Bv. voor elk paar verschillende rationale getallen, kan men een rationaal getal vinden dat ertussen ligt
    - Formulering
      - $\forall\ q,r : \mathbb{Q}^2 \,.\, q < r \Rightarrow \exists\ s : \mathbb{Q} \,.\, q < s \wedge s < r$
      - Alternatieve (equivalente) formuleringen (Funmath):
        - $\forall\ q,r : \mathbb{Q}^2 \wedge\ q < r \,.\, \exists\ s : \mathbb{Q} \,.\, q < s \wedge s < r$
        - $\forall\ q : \mathbb{Q} \,.\, \forall\ r : \mathbb{Q} \wedge\ q < r \,.\, \exists\ s : \mathbb{Q} \,.\, q < s \wedge s < r$

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met zowel existentiële als universele kwantoren
    - Bv. er is een getal in de *uitgebreide* natuurlijke getallen, dat groter is dan elk natuurlijk getal
    - Formulering
      - $\exists\ m : \mathbb{N}' \,.\, \forall\ n : \mathbb{N} \,.\, m > n$
    - Het omgekeerde is ook waar: $\forall\ n : \mathbb{N} \,.\, \exists\ m : \mathbb{N}' \,.\, m > n$
      - Dit is slechts een variant van slide 60

UNIVERSITEIT GENT

KWANTOREN

- **Geneste kwantoren**
  - Met zowel existentiële als universele kwantoren
    - Het is mogelijk aan te tonen dat altijd geldt
      - $(\exists\, y : Y \,.\, \forall\, x : X \,.\, P(x,y)) \Rightarrow (\forall\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y))$
        - ➢ De sterkere voorwaarde is dus: $\exists\, y : Y \,.\, \forall\, x : X \,.\, P(x,y)$
        - ➢ Let hierbij wel op dat niet alleen de kwantoren omgewisseld zijn, maar ook de gebonden veranderlijken en hun type

KWANTOREN

- **Van mensentaal naar kwantoren**
  - Om beweringen over elementen van een bepaalde klasse te modelleren
    - Alle, voor alle, elke, alles, iedereen,…
      - Wijst op universele kwantor $\forall$
    - Er is, er zijn, er bestaat, sommige, men vindt, iemand,…
      - Wijst op existentiële kwantor $\exists$
  - Soms nodig de tekst te herschrijven om de logische structuur bloot te leggen

KWANTOREN

- **Van mensentaal naar kwantoren**
  - Bv. Iedereen kijkt wel naar iemand op
  - Formulering
    - M: de verzameling van de mensen
    - $K(x,y)$: x kijkt op naar y

    - $\forall\, x : M \,.\, \exists\, y : M \,.\, K(x,y)$

KWANTOREN

- **Van mensentaal naar kwantoren**
  - Bv. Iedereen heeft minstens 2 hobbies
  - Formulering
    - M: de verzameling van de mensen
    - Hob: de verzameling van de hobbies
    - $H(x,y)$: x heeft y als hobby

    - $\forall\, x : M \,.\, \exists\, (y,z) : Hob^2 \wedge y \neq z \,.\, H(x,y) \wedge H(x,z)$

KWANTOREN

- **Van mensentaal naar kwantoren**
  - Bv. Niemand houdt van een slechte verliezer
  - Formulering
    - M: de verzameling van de mensen
    - $S(x)$: x is een slechte verliezer
    - $H(x,y)$: x houdt van y
    - Herschrijven als: voor ieder geldt dat als hij/zij een slechte verliezer is, er dan niemand is die van hem/haar houdt
    - $\forall\, x : M \,.\, S(x) \Rightarrow \neg\, (\exists\, y : M \,.\, H(y,x))$

UNIVERSITEIT GENT

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. Beperkingen van propositielogica
  2. Formulering en predicaten als functies
  3. Kwantoren
  4. **Rekenregels**
  5. Toepassing op verzamelingen

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Predicaatlogica**
  - Ietwat vergelijkbare aanpak als propositielogica
    - Semantisch
      - Gebaseerd op logische betekenis
    - Formeel / axiomatisch
      - Axioma's en rekenregels
      - Calculationele aanpak

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Predicaatlogica**
  - Onze aanpak: ook hier mix van beide
    - Semantische definitie van operatoren en enkele basisstellingen (tot nu toe)
      - Eenvoudiger
    - Calculationele aanpak nodig voor berekeningen
      - Belangrijker dan bij propositielogica
        - ➢ Geen waarheidstabellen meer mogelijk

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Kwantificaties over constante predicaten (1)**
  - $(\forall\, x : X\, .\, 1) \equiv 1$
    - Dus als $P(x)$ een tautologie is (voor een willekeurige x), dan geldt ook $(\forall\, x : X\, .\, P(x)) \equiv 1$
  - $(\exists\, x : X\, .\, 0) \equiv 0$
    - Dus als $P(x)$ een contradictie is (voor een willekeurige x), dan geldt ook $(\exists\, x : X\, .\, P(x)) \equiv 0$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Kwantificaties over leeg domein (1)**
  - $(\exists\, x : \emptyset\, .\, P(x)) \equiv 0$
    - Speciaal geval $X = \emptyset$ moet daarom vaak apart beschouwd worden in uitdrukkingen als $(\exists\, x : X\, .\, P(x))$
    - Verklaring voor formule eenvoudig
      - Te lezen als: "er is een x in de lege verzameling waarvoor $P(x)$ geldt", maar *er is geen x* in de lege verzameling
        - ➢ Dus kan $(\exists\, x : \emptyset\, .\, P(x))$ alleen maar onwaar zijn

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Kwantificaties over leeg domein (2)**
  - $(\forall\, x : \emptyset \,.\, P(x)) \equiv 1$
    - Speciaal geval $X = \emptyset$ moet daarom vaak apart beschouwd worden in uitdrukkingen als $(\forall\, x : X \,.\, P(x))$
    - Verklaring voor formule iets minder eenvoudig
      - Te lezen als: "voor alle x in de lege verzameling geldt $P(x)$", maar *er is geen x* in de lege verzameling
        - ➢ Dus kan $(\forall\, x : \emptyset \,.\, P(x))$ alleen maar waar zijn
        - ➢ Een beetje vergelijkbaar met implicatie met onwaar antecedent

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Kwantificaties over constante predicaten (2)**
  - Voor een propositie p die niet afhangt van de veranderlijke x
    - $(\forall\, x : X \,.\, p) \equiv p \vee X{=}\emptyset$
    - $(\exists\, x : X \,.\, p) \equiv p \wedge X{\neq}\emptyset$
      - Laat soms vereenvoudigingen toe bij het rekenen met predicaten en kwantoren

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Dualiteit tussen ∀ en ∃**
  - $(\forall\, x : X \,.\, \neg(P(x))) \equiv \neg(\exists\, x : X \,.\, P(x))$
  - Betekenis:
    - Linkerlid: er geldt voor alle *x* in *X* dat ze de eigenschap *P*(*x*) niet hebben
    - Rechterlid: het is niet zo dat er een *x* in *X* is waarvoor de eigenschap *P*(*x*) geldt
      - Duidelijk dat beide hetzelfde uitdrukken

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Dualiteit tussen ∀ en ∃**
  - Bv. "niemand kijkt op naar *y*"
  - Formulering
    - *M*: de verzameling van de mensen
    - $K(x,y)$: *x* kijkt op naar *y*
    - $\neg(\exists\, x : M \,.\, K(x,y))$
    - Ermee equivalent:
      - "voor iedereen geldt dat hij niet opkijkt naar *y*"
      - $\forall\, x : M \,.\, \neg(K(x,y))$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Eigenschappen met propositie-operatoren**
  - Distributiviteit ∀ t.o.v. ∧ (D∀/∧)
    - $(\forall\ x : X\ .\ P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall\ x : X\ .\ P(x)) \wedge (\forall\ x : X\ .\ Q(x))$
    - Variant: samennemen ∀ en ∧ (Engels: collecting; C∀/∧)
      - $(\forall\ x : X\ .\ P(x)) \wedge (\forall\ x : Y\ .\ Q(x)) \Rightarrow (\forall\ x : X \cap Y\ .\ P(x) \wedge Q(x))$
        - ➢ Let op de verschillende types (!)

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Eigenschappen met propositie-operatoren**
  - Distributiviteit ∃ t.o.v. ∨ (D∃/∨)
    - $(\exists\ x : X\ .\ P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists\ x : X\ .\ P(x)) \vee (\exists\ x : X\ .\ Q(x))$
    - Variant: uitsturen ∃ en ∨ (Engels: dispatching; DP∃/∨)
      - $(\exists\ x : X \cap Y\ .\ P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists\ x : X\ .\ P(x)) \vee (\exists\ x : Y\ .\ Q(x))$
        - ➢ Let op de verschillende types (!)
    - Dit zijn de duale stellingen t.o.v. deze van de vorige slide

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Eigenschappen met propositie-operatoren**
  - Samennemen $\forall/\vee$ (Engels: collecting; C$\forall/\vee$)
    - $(\forall\, x : X\, .\, P(x)) \vee (\forall\, x : Y\, .\, Q(x)) \Rightarrow (\forall\, x : X \cap Y\, .\, P(x) \vee Q(x))$
  - Uitsturen van $\exists/\wedge$ (Engels: dispatching; DP$\exists/\wedge$)
    - $(\exists\, x : X \cap Y\, .\, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists\, x : X\, .\, P(x)) \wedge (\exists\, x : Y\, .\, Q(x))$
    - In beide gevallen slechts implicatie, geen equivalentie
    - De ene stelling is de duale van de andere

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Eigenschappen met propositie-operatoren**
  - Gelijke predicaten onder $\forall$ (EP$\forall/\equiv$)
    - $(\forall\, x : X\, .\, P(x) \equiv Q(x)) \Rightarrow ((\forall\, x : X\, .\, P(x)) \equiv (\forall\, x : X\, .\, Q(x)))$
  - Gelijke predicaten onder $\exists$ (EP$\exists/\equiv$)
    - $(\forall\, x : X\, .\, P(x) \equiv Q(x)) \Rightarrow ((\exists\, x : X\, .\, P(x)) \equiv (\exists\, x : X\, .\, Q(x)))$
      - Het moet wel degelijk $\forall$ zijn in het antecedent (!)
    - In beide gevallen slechts implicatie, geen equivalentie

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Eigenschappen met propositie-operatoren**
  - Zwakkere predicaten onder $\forall$ (WP$\forall/\Rightarrow$)
    - $X \subseteq Y \Rightarrow (\forall x{:}X.\ P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x{:}Y.\ P(x)) \Rightarrow (\forall x{:}X.\ Q(x))$
  - Zwakkere predicaten onder $\exists$ (WP$\exists/\Rightarrow$)
    - $X \subseteq Y \Rightarrow (\forall x{:}X.\ P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x{:}X.\ P(x)) \Rightarrow (\exists x{:}Y.\ Q(x))$
      - Het moet wel degelijk $\forall$ zijn in het (tweede) antecedent (!)
      - Let op de omgewisselde rol van X en Y

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Stellingen met proposities (1)**
  - Linksdistributiviteit $\Rightarrow/\forall$ (LD$\Rightarrow/\forall$)
    - $p \Rightarrow (\forall\ x : X\ .\ P(x)) \equiv \forall\ x : X\ .\ p \Rightarrow P(x)$
  - Rechtsdistributiviteit $\Rightarrow/\exists$ (RD$\Rightarrow/\exists$)
    - $(\exists\ x : X\ .\ P(x)) \Rightarrow p \equiv \forall\ x : X\ .\ P(x) \Rightarrow p$
  - Distributiviteit $\vee/\forall$ (D$\vee/\forall$)
    - $p \vee (\forall\ x : X\ .\ P(x)) \equiv \forall\ x : X\ .\ p \vee P(x)$
  - Distributiviteit $\wedge/\exists$ (D$\wedge/\exists$)
    - $p \wedge (\exists\ x : X\ .\ P(x)) \equiv \exists\ x : X\ .\ p \wedge P(x)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Stellingen met proposities (2)**
  - Linkspseudodistributiviteit $\Rightarrow/\exists$ (LPD$\Rightarrow/\exists$)
    - $(p \Rightarrow \exists\, x : X \,.\, P(x)) \wedge X \neq \emptyset \;\equiv\; \exists\, x : X \,.\, p \Rightarrow P(x)$
  - Rechtspseudodistributiviteit $\Rightarrow/\forall$ (RPD$\Rightarrow/\forall$)
    - $((\forall\, x : X \,.\, P(x)) \Rightarrow p) \wedge X \neq \emptyset \;\equiv\; \exists\, x : X \,.\, P(x) \Rightarrow p$
  - Pseudodistributiviteit $\vee/\exists$ (PD$\vee/\exists$)
    - $(p \vee \exists\, x : X \,.\, P(x)) \wedge X \neq \emptyset \;\equiv\; \exists\, x : X \,.\, p \vee P(x)$
  - Pseudodistributiviteit $\wedge/\forall$ (PD$\wedge/\forall$)
    - $(p \wedge \forall\, x : X \,.\, P(x)) \vee X = \emptyset \;\equiv \forall\, x : X \,.\, p \wedge P(x)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Gevalsanalyse**
  - $(\forall x : X \,.\, P(x))[^v_0 \wedge (\forall x : X \,.\, P(x))[^v_1 \equiv \forall x : X \,.\, P(x)$
    - Waarbij $P(x)$ afhangt van een propositieveranderlijke v
  - Variant van gevalsanalyse voor proposities

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Shannon-expansie**
  - $(\forall x : X \,.\, P(x))[^v_q$
    $\equiv (q \wedge (\forall x : X \,.\, P(x))[^v_1) \vee (\neg q \wedge (\forall x : X \,.\, P(x))[^v_0)$
  - $(\forall x : X \,.\, P(x))[^v_q$
    $\equiv (q \Rightarrow (\forall x : X \,.\, P(x))[^v_1) \wedge (\neg q \Rightarrow (\forall x : X \,.\, P(x))[^v_0)$
    - Waarbij $P(x)$ afhangt van een propositieveranderlijke v en q ook een propositie is

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Universele instantiatie**
  - $(q \Rightarrow \forall\, x : X \,.\, P(x)) \;\Rightarrow\; q \Rightarrow e \in X \Rightarrow P(e)$
    - Of vereenvoudigd
      - $(\forall\, x : X \,.\, P(x)) \;\Rightarrow\; e \in X \Rightarrow P(e)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Generalisatie**
  - Als geldt: $q \Rightarrow v \in X \Rightarrow P(v)$
    - Met $X = \mathcal{D}P$
  - Dan geldt ook: $q \Rightarrow \forall\, x : X \,.\, P(x)$
    - met v een nieuwe veranderlijke, m.a.w. v komt niet voor als vrije veranderlijke in q of $P(x)$
    - of vereenvoudigd:
      - Als geldt: $v \in X \Rightarrow P(v)$
      - Dan geldt ook: $\forall\, x : X \,.\, P(x)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Introductie/eliminatie van ∀**
  - Er geldt dat $q \Rightarrow \forall\, x : X \,.\, P(x)$ een stelling is a.s.a. $q \Rightarrow v \in X \Rightarrow P(v)$ eveneens een stelling is
    - Met v een nieuwe veranderlijke, m.a.w. v komt niet als vrije veranderlijke voor in q of $P(x)$
    - Met $X = \mathcal{D}P$
    - M.a.w. we bewijzen dat "$q \Rightarrow P(v)$ geldig is voor een willekeurige v in X"

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Bewijstechnieken met universele kwantoren**
  - Generalisatie van het consequent
    - calculationele afleidingsstijl

      q ⇒ *<berekeningen>* $v \in X \Rightarrow P(v)$

      ⇒ *<generalisatie van het consequent>* $\forall\, x : X \,.\, P(x)$

    – als bewijs voor $q \Rightarrow \forall\, x : X \,.\, P(x)$

REKENEN MET KWANTOREN

- **Bewijstechnieken met universele kwantoren**
  - Equivalenties
    - calculationele afleidingsstijl

      $\forall\, x : X \,.\, Q(x)$ ⇒ *<univ. instantiatie>* $v \in X \Rightarrow Q(v)$

      ≡ *<berekeningen>* $v \in Y \Rightarrow P(v)$

      ⇒ *<gen. van het cons.>* $\forall\, x : Y \,.\, P(x)$

    – als bewijs voor $(\forall\, x : X \,.\, Q(x)) \Rightarrow \forall\, x : Y \,.\, P(x)$

      ➢ Maar bewijs voor $(\forall\, x : Y \,.\, P(x)) \Rightarrow \forall\, x : X \,.\, Q(x)$ is volkomen analoog (en dus overbodig om uit te werken)

      ➢ Besluit: $(\forall\, x : X \,.\, Q(x)) \equiv \forall\, x : Y \,.\, P(x)$

REKENEN MET KWANTOREN

- **Introductie van ∃ / existentiële veralgemening**
  - $e \in X \wedge P(e) \;\Rightarrow\; \exists\, x : X \,.\, P(x)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Getuige (Engels: witness)**
  - bewijzen dat $(\exists\, x : X \,.\, P(x)) \Rightarrow q$, staat gelijk met bewijzen dat $v \in X \wedge P(v) \Rightarrow q$
    - Met v een nieuwe veranderlijke, m.a.w. v komt niet als vrije veranderlijke voor in q of $P(x)$
    - M.a.w. we “nemen” een v in X waarvoor $P(v)$ geldt en leiden hieruit q af, wat bewijst dat $(\exists x : X \,.\, P(x)) \Rightarrow q$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Verzwakking kwantoren**
  - $X \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\forall\, x : X \,.\, P(x)) \Rightarrow (\exists\, x : X \,.\, P(x))$
    - Eenvoudig te bewijzen met $\forall$-eliminatie en $\exists$-introductie

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Omwisseling kwantoren (zie eerder)**
  - Voor $\forall$
    - $(\forall\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)) \equiv \forall\, y : Y \,.\, \forall\, x : X \,.\, P(x,y)$
  - Voor $\exists$
    - $(\exists\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)) \equiv \exists\, y : Y \,.\, \exists\, x : X \,.\, P(x,y)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Heterogene omwisseling kwantoren (zie eerder)**
  - $(\exists\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)) \Rightarrow \forall\, y : Y \,.\, \exists\, x : X \,.\, P(x,y)$

REKENEN MET KWANTOREN

- **Geneste kwantoren (zie eerder)**
  - Voor $\forall$
    - $(\forall\, x : X \,.\, \forall\, y : Y \,.\, P(x,y)) \equiv \forall\, (x,y) : X \times Y \,.\, P(x,y)$
  - Voor $\exists$
    - $(\exists\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)) \equiv \exists\, (x,y) : X \times Y \,.\, P(x,y)$

REKENEN MET KWANTOREN

- **Uitwisseling (Engels: trading)**
  - Onder $\forall$
    - $(\forall\, x : X \wedge Q(x)\ .\ P(x)) \equiv (\forall\, x : X\ .\ Q(x) \Rightarrow P(x))$
  - Onder $\exists$
    - $(\exists\, x : X \wedge Q(x)\ .\ P(x)) \equiv (\exists\, x : X\ .\ Q(x) \wedge P(x))$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Éénpuntsregel**
  - Voor $\forall$
    - $(\forall\, x : X\ .\ x{=}e \Rightarrow P(x)) \equiv\ e \in X \Rightarrow P(e)$
      - $x{=}e$ moet in het antecedent staan, anders slechts
        - $(\forall\, x : X\ .\ P(x) \Rightarrow x{=}e) \Rightarrow (\exists\, x : X\ .\ P(x)) \Rightarrow P(e)$
  - Voor $\exists$
    - $(\exists\, x : X\ .\ x{=}e \wedge P(x)) \equiv\ e \in X \wedge P(e)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Domeinopsplitsing**
  - Voor $\forall$
    - $(\forall\, x : X \cup Y \,.\, P(x)) \equiv (\forall\, x : X \,.\, P(x)) \wedge (\forall\, x : Y \,.\, P(x))$
  - Voor $\exists$
    - $(\exists\, x : X \cup Y \,.\, P(x)) \equiv (\exists\, x : X \,.\, P(x)) \vee (\exists\, x : Y \,.\, P(x))$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Functiegelijkheid**
  - $f = g \equiv \mathcal{D}f = \mathcal{D}g \wedge \forall x : \mathcal{D}\, f \,.\, f\,(x) = g\,(x)$

UNIVERSITEIT GENT

REKENEN MET KWANTOREN

- **Functiebereik**
  - $e \in \mathcal{R}f \;\equiv\; \exists\, x : \mathcal{D}f \,.\, f\,(x) = e$

REKENEN MET KWANTOREN

- **Functiecomprehensie**
  - $(\forall\, x : X \,.\, \exists\, y : Y \,.\, P(x,y)) \;\equiv\; \exists f : X \rightarrow Y \,.\, \forall\, x : X \,.\, P(x,f(x))$
    - Waarbij Y niet afhangt van x
    - Kan gebruikt worden om functies te specificeren

REKENEN MET KWANTOREN

- **Compositieregel**
  - Voor $\forall$
    - $(\forall\, y : Y\,.\,P(y)) \Rightarrow \forall\, x : \mathcal{D}f \wedge f(x) \in Y\,.\,P(f(x))$
    - $\mathcal{R}f = Y \Rightarrow (\forall\, y : Y\,.\,P(y)) \equiv \forall\, x : \mathcal{D}f\,.\,P(f(x))$
  - Voor $\exists$
    - $(\exists\, x : \mathcal{D}f \wedge f(x) \in Y\,.\,P(f(x))) \Rightarrow \exists\, y : Y\,.\,P(y)$
    - $\mathcal{R}f = Y \Rightarrow (\exists\, y : Y\,.\,P(y)) \equiv \exists\, x : \mathcal{D}f\,.\,P(f(x))$
  - Komt neer op verandering van gebonden veranderlijken

WAAROVER?

- **Predicaten**
  1. Beperkingen van propositielogica
  2. Formulering en predicaten als functies
  3. Kwantoren
  4. Rekenregels
  5. **Toepassing op verzamelingen**

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Verzamelingcomprehensie**
  - Cf. eerder bij abstracties
    - $\{ e(x) \mid x : A \}$
      - Staat voor het bereik van $x : A \,.\, e(x)$
      - M.a.w. de verzameling van de uitdrukkingen $e(x)$ met x in A
    - $\{ x : A \mid P(x) \}$
      - Staat voor het bereik van $x : A \wedge P(x) \,.\, x$
      - M.a.w. de verzameling van x in A waarvoor de conditie $P(x)$ geldt

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Verzamelingcomprehensie**
  - $y \in \{ e(x) \mid x : A \} \equiv \exists x : A \,.\, e(x) = y$
  - $y \in \{ x : A \mid P(x) \} \equiv y \in A \wedge P(y)$

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Afspraak voor volgende slides**
  - Beschouw dat we werken binnen gegeven universum X
    - Kan de reële getallen voorstellen
    - Kan de verzameling van de mensen voorstellen
    - Kan het algemene universum ($\mathcal{U}$) voorstellen
    - …
      - Nodig voor bepaalde definities

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Gelijkheid van verzamelingen**
  - $A{=}B \;\equiv\; \forall x : A \cup B \,.\, x \in A \equiv x \in B$
    - Alternatieve definitie met universum X:

      $A{=}B \;\equiv\; \forall x : X \,.\, x \in A \equiv x \in B$
  - Om $A{=}B$ te bewijzen
    - Vaak gebruik van eliminatie van $\forall$
      - I.e. we bewijzen $x \in A \equiv x \in B$
        - ➢ Voor een willekeurige x (in X)

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Lege verzameling**
    - In een universum X
  - ○ $\emptyset$
    - Stellingen:
      - $\forall x : X \,.\, \neg(x \in \emptyset)$
      - $A = \emptyset \;\equiv\; \forall x : X \,.\, \neg(x \in A)$

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Eerder ingevoerde operatoren (1)**
  - ○ Doorsnedeoperator ∩

    $A \cap B \;= \{\, x : X \mid x \in A \wedge x \in B \,\}$
  - ○ Unie-operator ∪

    $A \cup B \;=\; \{\, x : X \mid x \in A \vee x \in B \,\}$
  - ○ Verschiloperator \

    $A \setminus B \;=\; \{\, x : X \mid x \in A \wedge \neg(x \in B) \,\}$
  - ○ Symmetrisch-verschiloperator △

    $A \vartriangle B \;=\; \{\, x : X \mid x \in A \not\equiv x \in B \,\}$

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Complement van een verzameling**
  - In een universum X
  - $\text{co } A = \{ x : X \mid \neg(x \in A) \}$
    - Komt overeen met negatie-operator in propositielogica
    - Merk op:
      $\text{co } A = X \setminus A$

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Eerder ingevoerde operatoren (2)**
  - Deelverzamelingsoperator $\subseteq$
    $A \subseteq B \;\equiv\; \forall x : X \,.\, x \in A \Rightarrow x \in B$
    - Praktischere definitie dan $A \subseteq B \;\equiv\; B = A \cup B$
    - Alternatieve formulering:
      $A \subseteq B \;\equiv\; \forall x : A \,.\, x \in B$
      - Te bekomen na trading onder $\forall$

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overeenkomst verzamelingen en proposities**
  - co A — $\neg(x \in A)$ (in een universum X)
  - $A \cap B$ — $x \in A \wedge x \in B$
  - $A \cup B$ — $x \in A \vee x \in B$
  - $A \vartriangle B$ — $x \in A \not\equiv x \in B$
  - $A = B$ — $x \in A \equiv x \in B$ ($A = B$ is geen verzameling !)
  - $A \subseteq B$ — $x \in A \Rightarrow x \in B$ ($A \subseteq B$ is geen verzameling !)
  - $\emptyset$ — 0
  - X — 1 (in een universum X)

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overeenkomst verzamelingen en proposities**
  - Vele stellingen rond verzamelingen af te leiden uit tautologieën uit propositielogica (1)
  - Bv. $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (D∧/∨)
    - Te vertalen naar:
      $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overeenkomst verzamelingen en proposities**
  - Vele stellingen rond verzamelingen af te leiden uit tautologieën uit propositielogica (2)
  - Bv. $x \wedge y \equiv x \vee y \equiv x \equiv y$ (GR)
    - Te vertalen naar:
      $(A \cap B = A \cup B) \equiv (A = B)$
    - Soms wel opletten met equivalenties en implicaties
      – Moeilijker te vertalen naar verzamelingen

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overeenkomst verzamelingen en proposities**
  - Vele stellingen rond verzamelingen af te leiden uit tautologieën uit propositielogica (3)
  - Bv. $x \Rightarrow y \equiv \neg(x \wedge \neg y)$ (CV1⇒/∧)
    - Eerst omzetten naar $x \Rightarrow y \equiv x \wedge \neg y \equiv 0$
    - Te vertalen naar:
      $A \subseteq B \equiv (A \setminus B = \emptyset)$
    - Soms wel opletten met equivalenties en implicaties
      – Moeilijker te vertalen naar verzamelingen

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overschakelen verzamelingen en predicaten**
  - Van predicaten naar verzamelingen
    - $\text{set}_X\, P = \{\, x : X \mid P\,(x)\}$
  - Van verzamelingen naar predicaten
    - $\text{prd}_X\, S = x : X\, .\, x \in S$

UNIVERSITEIT GENT

PREDICATEN EN VERZAMELINGEN

- **Overschakelen verzamelingen en predicaten**
  - Formulering met verzamelingen of predicaten volledig gelijkwaardig
    - Overgang van predicaten naar verzamelingen
      - Vervang P door $x : X\, .\, x \in S$
    - Overgang van predicaten naar verzamelingen
      - Vervang S door $\{\, x : X \mid P\,(x)\}$
    - Ook voor uitdrukkingen met kwantoren

UNIVERSITEIT GENT