UNIVERSITEIT GENT

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

VAKGROEP INFORMATIETECHNOLOGIE
IDLAB

REDENEREN, ABSTRAHEREN EN FORMULEREN

Eric Laermans (eric.laermans@ugent.be)

UNIVERSITEIT GENT

RELATIES

UNIVERSITEIT
GENT

WAAROVER?

- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. Bewerkingen op relaties
  4. Eigenschappen van relaties
  5. Orderelaties
  6. Extreme elementen

WAAROVER?

- **Relaties**
  1. **Waarom?**
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. Bewerkingen op relaties
  4. Eigenschappen van relaties
  5. Orderelaties
  6. Extreme elementen

WAAROM?

- **Doel**
  - Verbanden (m.a.w. relaties) leggen tussen entiteiten
    - In gewoon taalgebruik
      - Tussen gelijkaardige entiteiten
        - "is de moeder van"
        - "is ouder dan"
      - Tussen verschillende types entiteiten
        - "is de hoofdstad van"
        - "bezit"

WAAROM?

- **Doel**
  - Verbanden (m.a.w. relaties) leggen tussen entiteiten
    - In meer wiskundige context
      - Tussen gelijkaardige entiteiten
        - “is groter dan” ($>$)
        - “is deelverzameling van” ($\subseteq$)
      - Tussen verschillende types entiteiten
        - “is element van” ($\in$)
        - “is de beeldwaarde van” (voor een functie)

WAAROM?

- **Typische toepassingen**
  - (Relationele) databank
    - Tabellen komen overeen met relaties
      - Ingangen te zien als tupels
        - Nauw verwant met ons concept van relaties (zie later)

  - Zoekmachines voor het Web
    - O.a. (back)links tussen webpagina’s
      - Relaties tussen webpagina’s

WAAROVER?

- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. **Formulering en relaties als functies/predicaten**
  3. Bewerkingen op relaties
  4. Eigenschappen van relaties
  5. Orderelaties
  6. Extreme elementen

FORMULERING

- **Soorten relaties**
  - Binaire relatie
    - Tussen 2 entiteiten
      - Tot nu toe gegeven voorbeelden
      - Belangrijkste en meest gebruikte
  - *n*-aire relatie
    - Tussen *n* entiteiten ($n > 1$)

FORMULERING

- **Binaire relatie (1)**
  - Cf. hoofdstuk over predicaten
  - Bv. Gent telt meer inwoners dan Leuven
    - Algemenere formulering:
      - "*Stad1* telt meer inwoners dan *Stad2*"
      - 2 (gelijkaardige) entiteiten: *Stad1* en *Stad2*
      - Eigenschap: … telt meer inwoners dan …
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Stad1* en *Stad2*
        - ➢ Waar voor resp. Gent en Leuven, vals voor resp. Leuven en Gent

FORMULERING

- **Binaire relatie (2)**
  - Cf. hoofdstuk over predicaten
  - Bv. Gent telt meer dan 250 000 inwoners
    - Algemenere formulering:
      - "*Stad* telt meer dan *aantal* inwoners"
      - 2 (verschillende soorten entiteiten): *Stad* en *aantal*
        - ➢ Aantal hier niet langer als een parameter beschouwd
      - Eigenschap: … telt meer dan … inwoners
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven *Stad* en *aantal*
        - ➢ Waar voor Gent, vals voor Leuven als aantal 250 000 is

FORMULERING

- **Binaire relatie (3)**
  - Bv. *x* behoort tot het domein van functie *f*
    - Wiskundigere formulering:
      - $x \in \mathcal{D} f$
      - 2 (verschillende soorten) entiteiten: *x* en *f*
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven koppel (*x*,*f*)
        - ➢ Bv. waar voor (0,succ)
        - ➢ Bv. vals voor (0,ln)

FORMULERING

- **Ternaire relatie (*n* = 3) (1)**
  - Bv. het station van Brugge ligt op het traject tussen de stations van Gent-Sint-Pieters en Oostende
    - Algemenere formulering:
      - "*Station1* ligt op het traject tussen *Station2* en *Station3*"
      - 3 (gelijkaardige) entiteiten: *Station1*, *Station2* en *Station3*
      - Eigenschap: … ligt op het traject tussen … en …
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven 3-tupel (*Station1*,*Station2*,*Station3*)
        - ➢ Bv. vals voor (Brugge,Antwerpen,Kortrijk)

FORMULERING

- **Ternaire relatie (n = 3) (2)**
  - Bv. y is de beeldwaarde van x onder functie f
    - Wiskundigere formulering:
      - $y = f\,(x)$
      - 3 (verschillende soorten) entiteiten: y, x en f
      - Kan waar of vals zijn voor gegeven 3-tupel (y,x,f)
        - Bv. waar voor (1,0,cos)
        - Bv. vals voor (0,1,succ)

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Formeler (Funmath)**
  - Een relatie is een predicaat dat een n-tupel (meertupel, i.e. n > 1) als argument neemt
  - Wiskundiger:
    - R is een n-aire relatie a.s.a.
      - $t \in \mathcal{D}R \;\Rightarrow\; \mathcal{D}\,t = \square n \;\wedge\; R(t) \in \mathbb{B}$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Formeler (Funmath)**
  - Een functie R is een (binaire) relatie tussen verzamelingen X en Y a.s.a.
    - $R \in X \times Y \to \mathbb{B}$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Formeler (Funmath)**
  - Een functie R is een (binaire) relatie over een verzameling X *a.s.a.*
    - $R \in X^2 \to \mathbb{B}$
      - Meest gebruikelijk type van relaties voor wiskundig gebruik
      - Notatie: rel_X voor $X^2 \to \mathbb{B}$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Notatie (binaire relaties)**
  - Vaak infix-notatie i.p.v. prefix-notatie
    - $x \; R \; y$ i.p.v. $R(x,y)$
  - Vaak gebruikt symbool voor algemene relatie (naast R): $\prec$
    - $x \prec y$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Notatie (Funmath): filter (1)**
  - Verzameling X gefilterd door predicaat P:
    - $X_P = \{x : X \mid x \in \mathcal{D}\, P \wedge P(x)\}$
    - Vereenvoudigd als $X \subseteq \mathcal{D}\, P$
      - $X_P = \{x : X \mid P(x)\}$
        - ➢ De selectie van elementen uit verzameling X, waarvoor de eigenschap P geldig is
    - Speciaal geval: relaties zijn predicaten over een verzameling van meertupels

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Notatie (Funmath): filter (2)**
  - Verzameling van (meer)tupels T gefilterd door relatie R:
    - $T_R = \{t : T \mid t \in \mathcal{D}\, R \wedge R(t)\}$
    - Vereenvoudigd als $T \subseteq \mathcal{D}\, R$
      - $T_R = \{t : T \mid R(t)\}$
        - ➢ De selectie van (meer)tupels uit verzameling T, waarvoor de relatie R geldig is
        - ➢ Bevat voldoende informatie om relatie R volledig te beschrijven

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Notatie (Funmath): filter (3)**
  - Bv. relatie $\leq$ over X met $X = \{0,1,2\}$
    - $X^2_{\leq} = \{(m,n) : X^2 \mid m \leq n\}$
    - M.a.w.
      - $X^2_{\leq} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

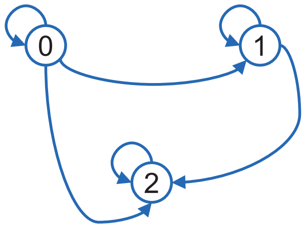
- **Notatie (Funmath): filter (4)**
  - Bv. relatie *iHv* "… is hoofdstad van …" tussen H en L
    - Met H: de verzameling van hoofdsteden van de Benelux
      - H = {Amsterdam,Brussel,Luxemburg}
    - Met L: de verzameling van landen van de Benelux
      - L = {be,nl,lu}   (afgekort met Internet-landencode)
    - $(H \times L)_{iHv} = \{(h,l) : (H \times L) \mid h\ iHv\ l\}$
    - M.a.w.
      - $(H \times L)_{iHv}$ = {(Amsterdam,nl), (Brussel,be), (Luxemburg,lu)}

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Grafische representatie met pijlen (1)**
  - Voor binaire relatie R over (kleine) eindige verzameling X
    - Directionele pijl van element x naar y geeft aan dat de relatie R geldig is tussen x en y (m.a.w. $x\ R\ y$)
      - De pijl moet directioneel zijn
        - ➢ Verschil tussen $x\ R\ y$ en $y\ R\ x$

RELATIES ALS FUNCTIES/PREDICATEN

- **Grafische representatie met pijlen (2)**
  - Bv. relatie $\leq$ over {0,1,2}



WAAROVER?

- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. **Bewerkingen op relaties**
  4. Eigenschappen van relaties
  5. Orderelaties
  6. Extreme elementen

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Verschillende mogelijkheden**
  - Gebaseerd op bewerkingen op verzamelingen
  - Specifieke bewerkingen voor relaties
    - Inverse
    - Compositie/samenstelling van twee relaties
  - Toegepast in bewerkingen op relationele databanken
    - Onderdeel van SQL

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Bewerkingen afgeleid van verzamelingen (1)**
  - Voor relaties R tussen X en Y
    - Bewerkingen op verzameling $(X \times Y)_R$
      - Klassieke operaties
        - Unie, doorsnede, complement, verschil, symmetrisch verschil

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Bewerkingen afgeleid van verzamelingen (2)**
  - Bv. voor relaties $R1$ en $R2$ tussen X en Y
    - $(X \times Y)_{R1} \cup (X \times Y)_{R2} = (X \times Y)_{R3}$
      - Met $R3 = (x,y) : (X \times Y) \,.\, (x\ R1\ y) \vee (x\ R2\ y)$

UNIVERSITEIT GENT

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Bewerkingen afgeleid van verzamelingen (3)**
  - Bv. voor relaties $<$ en $=$ op X met $X = \{0,1,2\}$
    - $X^2_< \cup X^2_= = X^2_\leq$
      - $X^2_< = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$
      - $X^2_= = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$
      - $X^2_\leq = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)\}$
        - ➢ $x \leq y \;\equiv\; (x < y) \vee (x = y)$
    - Natuurlijk te veralgemenen voor verzameling $\mathbb{N}$ of $\mathbb{R}$

UNIVERSITEIT GENT

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Bewerkingen afgeleid van verzamelingen (4)**
  - Bv. voor relatie > op $\mathbb{N}$
    - co $(X^2_>) = X^2_\leq$
      - Met $\leq$ = $(m,n) : \mathbb{N}^2 \,.\, \neg(m > n)$
        - $m \leq n \;\equiv \neg(m > n)$
    - Op {0,1,2}
      - $X^2_>$ = {(1,0), (2,0), (2,1)}
      - $X^2_\leq$ = {(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,2)}

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Inverse van een relatie (1)**
  - Voor binaire relaties
  - Notatie (Funmath): $R^\smile$
    - Als de oorspronkelijke relatie (R) x in relatie brengt met y
    - Brengt de inverse relatie ($R^\smile$) y in relatie met x

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Inverse van een relatie (2)**
  - De inverse van een relatie kan altijd gedefinieerd worden
  - Niet te verwarren met de inverse van een functie
    - Notatie f^{-1}: $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$
    - Alleen gedefinieerd als er slechts 1 x is waarvoor $y = f(x)$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Inverse van een relatie (3)**
  - Voor R een (binaire) relatie is van X naar Y
    - De inverse relatie $R^{\smile}$ is dan een relatie van Y naar X, zodat
      - $\forall(y,x) : Y \times X \,.\, y\, R^{\smile}\, x \equiv x\, R\, y$
        - M.a.w. $R^{\smile} = (y,x) : Y \times X \,.\, x\, R\, y$
      - Of met verzamelingen:
        - $(X \times Y)_R = \{(x,y) : X \times Y \mid x\, R\, y\}$
        - $(Y \times X)_{R^{\smile}} = \{(y,x) : Y \times X \mid x\, R\, y\}$
        - Omgekeerde koppels voor de inverse relatie

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Inverse van een relatie (4)**
  - Bv. voor $<$ over $\mathbb{N}$
    - De inverse relatie is duidelijk $>$ over $\mathbb{N}$
    - Dus $<^{\smile} = >$
      - Inderdaad
        - $\forall(m,n) : \mathbb{N}^2 \,.\, m > n \equiv n < m$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Inverse van een relatie (5)**
  - Eigenschap voor een relatie R:
    - $(R^{\smile})^{\smile} = R$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (1)**
  - Voor 2 binaire relaties
    - R een relatie van X naar Y
    - S een relatie van Y naar Z
  - Notatie (Funmath): $S \circ R$
    - Samengestelde relatie (S na R)
    - Relatie van X naar Z

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (2)**
  - De samenstelling van twee relaties is niet altijd mogelijk
    - Vereiste compatibiliteit van de verzamelingen voor $S \circ R$
      - R van X naar Y
      - S van Y naar Z
  - Niet te verwarren met de samenstelling van functies
    - Notatie $g \circ f$: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
      - Op voorwaarde dat $f(x) \in \mathcal{D}\, g$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (3)**
  - Voor R een (binaire) relatie is van X naar Y en S een (binaire relatie) van Y naar Z
    - De samengestelde relatie $S \circ R$ (S na R) is dan een relatie van X naar Z, zodat
      - $\forall (x,z) : X \times Z \,.\, (x\ (S \circ R)\ z) \equiv \exists\, y : Y \,.\, (x\ R\ y) \wedge (y\ S\ z)$
        - M.a.w. $S \circ R = (x,z) : X \times Z \,.\, \exists\, y : Y \,.\, (x\ R\ y) \wedge (y\ S\ z)$
      - Of met verzamelingen:
        - $(X \times Z)_{S \circ R} = \{(x,z) : X \times Z \mid \exists\, y : Y \,.\, (x\ R\ y) \wedge (y\ S\ z)\}$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (4)**
  - Bv. link tussen patiënten, symptomen en ziektes (1)
    - *Pa* : verzameling van patiënten
    - *Sy* : verzameling van symptomen
    - *Zi* : verzameling van ziektes
    - Relatie *PhS* van *Pa* naar *Sy*: … heeft symptoom …
    - Relatie *SaZ* van *Sy* naar *Zi*: … geassocieerd met …
    - Samengestelde relatie: $PaZ = SaZ \circ PhS$
      - Associeert patiënt met mogelijke ziekte

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (5)**
  - Bv. link tussen patiënten, symptomen en ziektes (2)
    - Zou in een databank kunnen opgenomen zijn
      - Relatie tussen patiënten en symptomen
      - Relatie tussen symptomen en ziektes
      - Samengestelde relatie tussen patiënten en ziektes

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (6)**
  - Bv. link tussen studenten, cursussen en lesgevers
    - *St*: verzameling studenten
    - *Cu*: verzameling cursussen
    - *Lg*: verzameling lesgevers
    - Relatie *SvC* van *St* naar *Cu*: … volgt …
    - Relatie *CgL* van *Cu* naar *Lg*: … wordt gegeven door …
    - Samengestelde relatie $SvL = CgL \circ SvC$:
      - … volgt een cursus van …

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (7)**
  - Bv. voor relatie R tussen X en Y en relatie $<$ op Y
    - Met $X = \{A,B\}$ en $Y = \{0,1,2\}$
    - Met $(X \times Y)_R = \{(A,1),(B,2)\}$
    - Met $Y^2_< = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$
      - $(X \times Y)_{< \square R} = \iota\,(A,2)$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (8)**
  - Bv. voor relatie $<$ op X en relatie $>$ op X
    - Met $X = \{0,1,2\}$
      - $X^2_< = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$
      - $X^2_> = \{(1,0), (2,0), (2,1)\}$

      - $(X^2)_{< \square >} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (9)**
  - Bv. voor relatie < op X
    - Met $X = \{0,1,2\}$
      - $X^2_< = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$

      - $(X^2)_{< \circ <} = \iota(0,2)$
        - $< \circ <$ geeft relatie aan “is minstens twee kleiner dan”

BEWERKINGEN OP RELATIES

- **Compositie/samenstelling van 2 relaties (10)**
  - Eigenschap:
    - Voor 2 binaire relaties
      - R een relatie van X naar Y
      - S een relatie van Y naar Z
    - $(S \circ R)^{\smile} = R^{\smile} \circ S^{\smile}$
      - Met $(S \circ R)^{\smile}$ een relatie van Z naar X

WAAROVER?

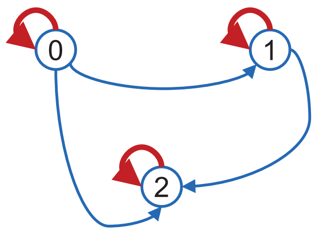
- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. Bewerkingen op relaties
  4. **Eigenschappen van relaties**
  5. Orderelaties
  6. Extreme elementen

EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Typische mogelijke eigenschappen**
  - Verdere slides gaan over relaties R over X
    - M.a.w. $R \in \mathrm{rel}_X$
    - Met X een niet-ledige verzameling
  - Eigenschappen van relaties kunnen gezien worden als predicaten over rel_X
    - Eigenschappen zijn dus zelf van het type $\mathrm{rel}_X \rightarrow \mathbb{B}$

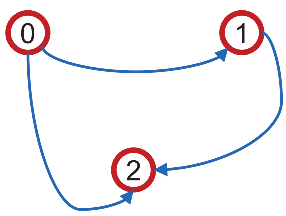
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Reflexief**
  - Refl $R \equiv \forall x : X .\ x\,R\,x$
    - Elk element in relatie met zichzelf
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



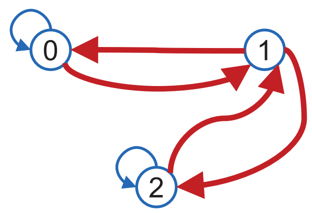
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Irreflexief/antireflexief**
  - Irfl $R \equiv \forall x : X .\ \neg(x\,R\,x)$
    - Iets anders dan niet-reflexief (!)
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



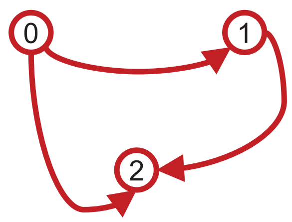
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Symmetrisch**
  - Symm $R \equiv \forall(x,y) : X^2 .\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
    - Relatie werkt in beide richtingen (*x* naar *y* en *y* naar *x*)
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



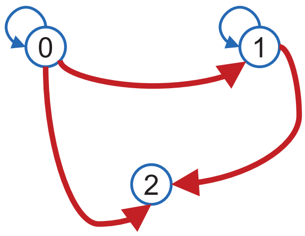
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Asymmetrisch**
  - Asym $R \equiv \forall(x,y) : X^2 .\ x\ R\ y \Rightarrow \neg(y\ R\ x)$
    - Relatie kan slechts in 1 richting werken
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}
    - Merk irreflexiviteit op (!)



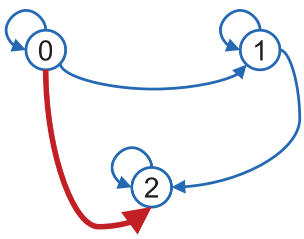
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Antisymmetrisch**
  - Ants $R \equiv \forall(x,y) : X^2 \,.\, x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x \Rightarrow x{=}y$
    - Niet te verwarren met asymmetrisch
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



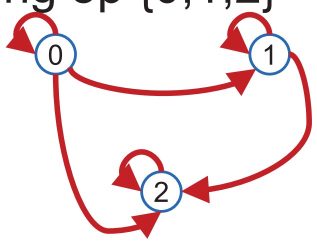
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Transitief**
  - Trns $R \equiv \forall(x,y,z) : X^3 \,.\, x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z$
    - Belangrijke eigenschap indien aanwezig
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



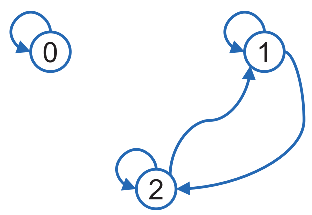
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Totaal**
  - Totl $R \equiv \forall(x,y) : X^2 .\ x\ R\ y \lor y\ R\ x$
    - Er is altijd een relatie tussen 2 willekeurige elementen
      - In de ene of in de andere richting
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



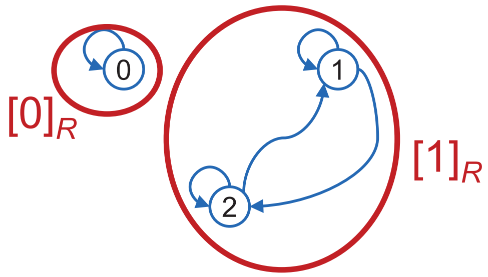
EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Equivalentierelatie (1)**
  - EQ $R \equiv$ Refl $R \land$ Symm $R \land$ Trns R
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Equivalentierelatie (2)**
  - Merk op dat verzameling in “stukken” opgedeeld wordt
    - Equivalentieklassen: $[x]_R = \{y : X \mid y \mathrel{R} x\}$
      - Hier 2 klassen: $[0]_R$ en $[1]_R$ (= $[2]_R$)



EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Equivalentierelatie (3)**
  - De gecreëerde equivalentieklassen zijn niet-ledig
  - De gecreëerde equivalentieklassen zijn disjunct
  - De unie van alle equivalentieklassen is X
    - Opdeling van X in equivalentieklassen vormt partitie van X

EIGENSCHAPPEN VAN RELATIES

- **Equivalentierelatie (4)**
  - Bv. Congruentie modulo m over $\mathbb{Z}$ (met $m \in \mathbb{N}_{>0}$): C_m
    - Andere notatie: $x \equiv y \pmod{m}$
    - Betekenis: $(x \equiv y \pmod{m}) \;\equiv\; \exists\, k : \mathbb{Z} \,.\, x - y = k \cdot m$
      - Zelfde restwaarde voor x en y bij deling door m
    - Is een equivalentierelatie (makkelijk aan te tonen)
      - Deelt $\mathbb{Z}$ op in m klassen
        - ➢ Klassen meestal voorgesteld door getallen van 0 tot en met $m - 1$
        - ➢ Belangrijk in rekenkunde (zie discrete wiskunde)

WAAROVER?

- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. Bewerkingen op relaties
  4. Eigenschappen van relaties
  5. **Orderelaties**
  6. Extreme elementen

ORDERELATIES

- **Belang van orde in dagelijks leven**
  - Rangschikken van entiteiten
    - Winkels volgens duurte
    - Auto's volgens "milieuvriendelijkheid"
    - …
  - Opzoeken eenvoudiger in gesorteerde collectie
    - Bibliotheek: geordend volgens classificatiesysteem
    - Woordenboek: alfabetisch geordend
    - Uw bureau (?)
    - …

ORDERELATIES

- **Belang in informatica**
  - Rangschikken
    - Meest relevante webpagina's in zoekmachine
    - Classificatie van gelijkaardige objecten
    - Detecteren van anomalieën
    - …

ORDERELATIES

- **Belang in informatica**
  - Opzoeken in datastructuren
    - Veel grotere efficiëntie als data gesorteerd is
      - Zeer belangrijk voor grote databanken
    - Verschillende ordeningen mogelijk
      - op naam, op soort, op grootte, op datum,…

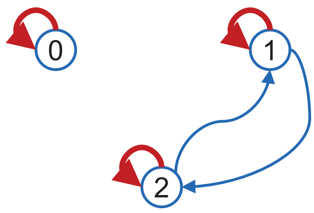
ORDERELATIES

- **Enkele mogelijke orderelaties**
  - Pre-orde
  - Partiële orde
  - Totale orde
  - Strikte (partiële) orde (of quasi-orde)

    - Gemeenschappelijke eigenschap:
      - Transitiviteit

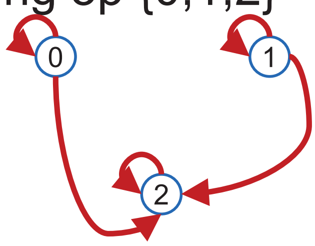
ORDERELATIES

- **Pre-orde**
  - PR R $\equiv$ Refl $R \wedge$ Trns R
    - Niet alle elementen noodzakelijk vergelijkbaar
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



ORDERELATIES

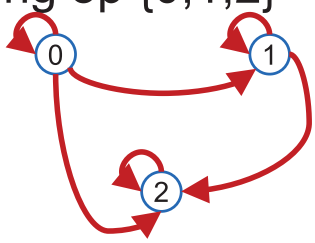
- **Partiële orde**
  - PO R $\equiv$ PR $R \wedge$ Ants R
    - Dus reflexief, antisymmetrisch en transitief
    - Nog steeds niet alle elementen noodzakelijk vergelijkbaar
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



  - (X,R) is een poset

ORDERELATIES

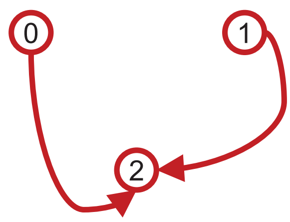
- **Totale orde**
  - TO *R* ≡ PO *R* ∧ Totl *R*
    - Dus reflexief, antisymmetrisch, totaal en transitief
    - Alle elementen noodzakelijk vergelijkbaar
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



  - (X,R) is een totaal/lineair geordende verzameling of ketting

ORDERELATIES

- **Strikte (partiële) orde (of quasi-orde)**
  - SO *R* ≡ Irfl *R* ∧ Trns *R*
    - Niet noodzakelijk alle verschillende elementen vergelijkbaar
  - Grafische voorstelling op {0,1,2}



ORDERELATIES

- **Poset (1)**
  - Engelse afkorting van partially ordered set
  - Koppel $(X,\preceq)$
    - Met X een niet-ledige verzameling
    - Met $\preceq$ een partiële orderelatie op X
  - Als $(X,\preceq)$ een poset is en $A \subseteq X$, dan is ook $(A,\preceq)$ een poset

ORDERELATIES

- **Poset (2)**
  - Sommige x en y in X kunnen onvergelijkbaar zijn
    - – $\preceq$ is immers een *partiële* orderelatie op X
    - Notatie: $x \parallel y$
    - Betekenis: $x \parallel y \equiv \neg(x \preceq y) \wedge \neg(y \preceq x)$

ORDERELATIES

▪ **Poset (3)**

- Bv. voor verzameling A
  - $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ is een poset, maar geen ketting
    - Met $\mathcal{P}A$ de verzameling van alle deelverzamelingen van A (zie oefeningen)
  - Bv. voor $A = \{0,1,2\}$
    - $\mathcal{P}A = \{\emptyset, \iota 0, \iota 1, \iota 2, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
    - Onvergelijkbare elementen, bv. $\{0,2\} \parallel \{1,2\}$

ORDERELATIES

▪ **Hasse-diagram (1)**

- Visualisatie van eindige posets $(X,\preceq)$
  - “Kleinste” element onderaan
  - “Grootste” element bovenaan
  - Verbindingen van onder naar boven tussen elementen geven aan welk element “kleiner” (het onderste) is dan een ander (het bovenste)
    - Transitiviteit van partiële orde doet de rest
  - Handiger dan visualisatie met pijlen voor iets grotere verzamelingen

ORDERELATIES

▪ **Hasse-diagram (2)**

- Gebaseerd op bedekkingsrelatie: $\ll$
  - $x \ll y \equiv x \prec y \wedge \neg(\exists z : X \,.\, x \prec z \wedge z \prec y)$
    - Met $x \prec y \equiv x \preceq y \wedge x \neq y$
      - ➢ Als $\preceq$ een partiële orde is, dan is $\prec$ een strikte orde
    - Sluit uit dat er tussen *x* en *y* nog een element van *X* zou kunnen zitten

UNIVERSITEIT GENT

ORDERELATIES

▪ **Hasse-diagram (3)**

- Praktisch
  1. Teken een stip/cirkel voor elke *x* uit *X*
     - Als $x \ll y$ dan moet *y* hoger liggen dan *x*
  2. Voor elk koppel (*x*,*y*) waarvoor $x \ll y$, verbind hun respectievelijke stippen/cirkels, zonder een andere stip/cirkel te verbinden

UNIVERSITEIT GENT

ORDERELATIES

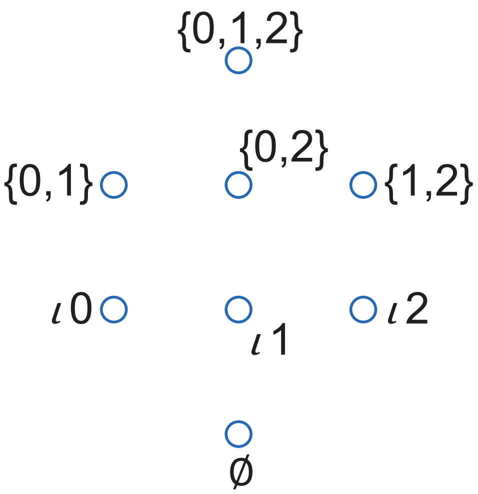
▪ Hasse-diagram (4)

- Bv. voor poset $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ met $A = \{0,1,2\}$
  - $\mathcal{P}A = \{\emptyset, \iota 0, \iota 1, \iota 2, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$
  - Er geldt:
    - $\emptyset \ll \iota 0$ $\quad \emptyset \ll \iota 1$ $\quad \emptyset \ll \iota 2$
    - $\iota 0 \ll \{0,1\}$ $\quad \iota 0 \ll \{0,2\}$
$\iota 1 \ll \{0,1\}$ $\quad \iota 1 \ll \{1,2\}$
$\iota 2 \ll \{0,2\}$ $\quad \iota 2 \ll \{1,2\}$
    - $\{0,1\} \ll \{0,1,2\}$ $\quad \{0,2\} \ll \{0,1,2\}$ $\quad \{1,2\} \ll \{0,1,2\}$

ORDERELATIES

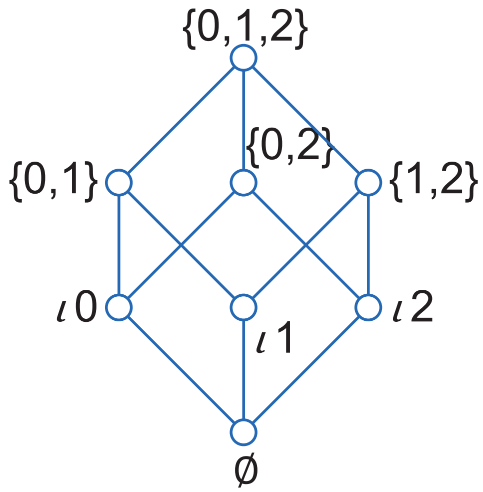
▪ Hasse-diagram (5)

- Bv. voor poset $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ met $A = \{0,1,2\}$
  - Stap 1:



ORDERELATIES

- **Hasse-diagram (6)**
  - Bv. voor poset $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ met $A = \{0,1,2\}$
    - Stap 2:



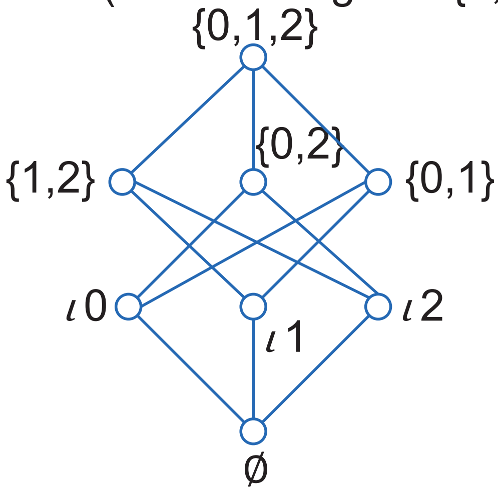
ORDERELATIES

- **Hasse-diagram (7)**
  - Vaak meerdere vormen mogelijk
    - Afhankelijk van plaatsing van elementen
    - Kan soms een andere eigenschap van de ordening aan het licht brengen

ORDERELATIES

▪ Hasse-diagram (8)

- Bv. voor poset $(\mathcal{P}A, \subseteq)$ met $A = \{0,1,2\}$
  - Alternatieve vorm: (omwisseling van {0,1} en {1,2}



ORDERELATIES

▪ Monotoniciteit

- Eigenschap van predicaat P t.o.v. (orde)relatie $\prec$

- Notatie:
  - $\text{Mono}_{\prec}\, P$
- Betekenis:
  - $\text{Mono}_{\prec}\, P \equiv \forall(x,y) : X^2 \,.\, x \prec y \Rightarrow (P\,(x) \Rightarrow P\,(y))$
    - Als eigenschap geldt voor x, dan geldt het ook voor “grotere” waarden

ORDERELATIES

- **Antimonotoniciteit**
  - Eigenschap van predicaat P t.o.v. (orde)relatie $\prec$
  - Notatie:
    - Amon$_{\prec}$ P
  - Betekenis:
    - Amon$_{\prec}$ $P \equiv \forall(x,y) : X^2 .\ x \prec y \Rightarrow (P(y) \Rightarrow P(x))$
      - Als eigenschap geldt voor y, dan geldt het ook voor "kleinere" waarden

WAAROVER?

- **Relaties**
  1. Waarom?
  2. Formulering en relaties als functies/predicaten
  3. Bewerkingen op relaties
  4. Eigenschappen van relaties
  5. Orderelaties
  6. **Extreme elementen**

EXTREME ELEMENTEN

- **Meestal gelinkt aan orderelaties**
  - Begrippen als “grootste”, “kleinste”, “minimum”, “maximum”, “bovengrens”, “ondergrens”,…
    - Lijken allemaal gelijkaardig
    - Nood aan meer formele definitie

EXTREME ELEMENTEN

- **Betekenis van extreme elementen**
  - Vooral zinvol voor poset
    - Maar niet noodzakelijk hiertoe beperkt
  - Afspraak voor volgende slides
    - $\preceq \in \mathrm{rel}_X$ (een relatie op een niet-ledige verzameling X dus)
    - $b \in X$
    - $A \subseteq X$

EXTREME ELEMENTEN

- **Bovengrens voor *A***
  - (Engels: upper bound)

  ○ Notatie: $b \text{ isub}_{\preceq} A$

  ○ Betekenis: $b \text{ isub}_{\preceq} A \equiv \forall a : A \,.\, a \preceq b$
  - Merk op dat *b* niet noodzakelijk tot *A* zal behoren
    – Meestal niet zelfs

EXTREME ELEMENTEN

- **Ondergrens voor *A***
  - (Engels: lower bound)

  ○ Notatie: $b \text{ islb}_{\preceq} A$

  ○ Betekenis: $b \text{ islb}_{\preceq} A \equiv \forall a : A \,.\, b \preceq a$
  - Merk op dat *b* niet noodzakelijk tot *A* zal behoren
    – Meestal niet zelfs

EXTREME ELEMENTEN

- **Grootste element van A**
  - (Engels: greatest element)
  - Notatie: $b \text{ isgst}_{\preceq} A$
  - Betekenis: $b \text{ isgst}_{\preceq} A \equiv b \text{ isub}_{\preceq} A \land b \in A$
    - b is dus een element van A dat een bovengrens voor A is
    - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
    - Uniciteit ook niet als $\preceq$ niet antisymmetrisch is
      - Wel voor poset $(X,\preceq)$ dus, als het grootste element van A bestaat tenminste

EXTREME ELEMENTEN

- **Kleinste element van A**
  - (Engels: least element)
  - Notatie: $b \text{ islst}_{\preceq} A$
  - Betekenis: $b \text{ islst}_{\preceq} A \equiv b \text{ islb}_{\preceq} A \land b \in A$
    - b is dus een element van A dat een ondergrens voor A is
    - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
    - Uniciteit ook niet als $\preceq$ niet antisymmetrisch is
      - Wel voor poset $(X,\preceq)$ dus, als het kleinste element van A bestaat tenminste

EXTREME ELEMENTEN

- **Supremum (kleinste bovengrens) voor A**
  - (Engels: supremum/least upper bound)
  - Notatie: $b \text{ islub}_{\preceq} A$
  - Betekenis:

$$b \text{ islub}_{\preceq} A \equiv b \text{ isub}_{\preceq} A \wedge (\forall x : X \,.\, x \text{ isub}_{\preceq} A \Rightarrow b \preceq x)$$

  - Alternatief: $b \text{ islub}_{\preceq} A \equiv b \text{ islst}_{\preceq} \{x : X \mid x \text{ isub}_{\preceq} A\}$
    - Bewijs als oefening
  - b niet noodzakelijk een element van A
  - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
    - Uniciteit ook niet als $\preceq$ niet antisymmetrisch is

UNIVERSITEIT GENT

EXTREME ELEMENTEN

- **Infimum (grootste ondergrens) voor A**
  - (Engels: infimum/greatest lower bound)
  - Notatie: $b \text{ isglb}_{\preceq} A$
  - Betekenis:

$$b \text{ isglb}_{\preceq} A \equiv b \text{ islb}_{\preceq} A \wedge (\forall x : X \,.\, x \text{ islb}_{\preceq} A \Rightarrow x \preceq b)$$

  - Alternatief: $b \text{ isglb}_{\preceq} A \equiv b \text{ isgst}_{\preceq} \{x : X \mid x \text{ islb}_{\preceq} A\}$
    - Bewijs als oefening
  - b niet noodzakelijk een element van A
  - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
    - Uniciteit ook niet als $\preceq$ niet antisymmetrisch is

UNIVERSITEIT GENT

EXTREME ELEMENTEN

- **Maximaal element van** ***A***
  - Notatie: $b \text{ ismax}_{\preceq} A$
  - Betekenis:

    $$b \text{ ismax}_{\preceq} A \;\equiv\; b \in A \wedge (\forall\, a : A \,.\, b \preceq a \Rightarrow\; a = b)$$

    - Alternatief: $b \text{ ismax}_{\preceq} A \;\equiv\; b \in A \wedge (\forall\, a : A_{\neq b} \,.\, \neg(b \preceq a))$
      - Bewijs als oefening
    - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
      - Uniciteit ook niet, zelfs niet voor een poset
    - Als $(A,\preceq)$ een eindige, niet-ledige, totaal geordende verzameling is, dan bestaat er een uniek maximaal element voor A

EXTREME ELEMENTEN

- **Minimaal element van** ***A***
  - Notatie: $b \text{ ismin}_{\preceq} A$
  - Betekenis:

    $$b \text{ ismin}_{\preceq} A \;\equiv\; b \in A \wedge (\forall\, a : A \,.\, a \preceq b \Rightarrow\; a = b)$$

    - Alternatief: $b \text{ ismin}_{\preceq} A \;\equiv\; b \in A \wedge (\forall\, a : A_{\neq b} \,.\, \neg(a \preceq b))$
      - Bewijs als oefening
    - Bestaan ervan is niet gegarandeerd voor elke $(A,\preceq)$
      - Uniciteit ook niet, zelfs niet voor een poset
    - Als $(A,\preceq)$ een eindige, niet-ledige, totaal geordende verzameling is, dan bestaat er een uniek minimaal element voor A

EXTREME ELEMENTEN

- **Sorteren en orderelaties (1)**
  - Voor effectief sorteren vaak totale ordening nodig
    - Nodig voor eenduidige sortering
      - Alle elementen moeten met elkaar vergeleken kunnen worden

EXTREME ELEMENTEN

- **Sorteren en orderelaties (2)**
  - Wat als er slechts partiële ordening beschikbaar is?
    - Bv. afhankelijkheden (Engels: dependencies) van deelprocessen in volledig proces
    - Verschillende sorteringen mogelijk, wegens onvergelijkbare elementen
      - Elke sortering komt overeen met een verschillende totale ordening
    - Topologisch sorteren

EXTREME ELEMENTEN

- **Topologisch sorteren van *X* (een mogelijkheid)**
  - Start met lege lijst
    - Neem een minimaal element weg uit X en voeg het toe als eerste element van uw lijst
  - Zolang er nog te sorteren elementen in X overblijven:
    - Neem een minimaal element uit X weg en voeg het toe aan uw lijst
  - Na afloop: *een* sortering van X, die voldoet aan de partiële ordening

EXTREME ELEMENTEN

- **Extreme elementen voor predicaten (1)**
  - Alternatieve, maar gelijkwaardige formulering
    - af te leiden uit uitdrukkingen met verzameling:
      - $A = \{x : X \mid P(x)\}$
        - M.a.w.: $P = x : X \,.\, x \in A$
        - Of dus: $P(x) \equiv x \in A$

EXTREME ELEMENTEN

- **Extreme elementen voor predicaten (2)**
  - Alternatieve, maar gelijkwaardige formulering
    - Bv. voor bovengrens
      - $\mathrm{ub}_{\preceq}\ P\ b \;\equiv\; b \ \mathrm{isub}_{\preceq}\ \{x : X \mid P(x)\}$
        $\mathrm{ub}_{\preceq}\ P\ b \;\equiv\; \forall\, x : X \,.\, P(x) \Rightarrow b \preceq x$
  - Gelijkaardige definities voor
    - lb, lst, gst, lub, glb, min, max

EXTREME ELEMENTEN

- **Welgefundeerde relatie over *X***
    - (Engels: well-founded relation)
  - Definitie:
    - $\mathrm{WF}\ (\prec) \;\equiv\; \forall\, S : \mathcal{P}X \,.\, S \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, m : S \,.\, \forall\, x : S \,.\, \neg(x \prec m)$
  - Betekenis:
    - Elke niet-ledige deelverzameling *S* van *X* bezit een element dat niet “groter” is dan om het even welk element van *S*
      - $\prec$ is normaal een strikte orderelatie
  - Belang hiervan:
    - Zie volgend hoofdstuk over inductie