Hoofdstuk 4

Functies

4.1 Eenwaardige functies van één veranderlijke

Een *functie* is een veranderlijke y waarvan de waarde afhangt van de waarde die toegekend wordt aan de *onafhankelijke veranderlijke* of het *argument* x. Men schrijft

$$y = f(x). \tag{4.1}$$

De relatie (4.1) wordt de *vergelijking* van de functie genoemd. Wij zullen hier in deze cursus een functie steeds vereenzelvigen met haar vergelijking.

Soms gebeurt het dat de functie slechts bepaald is voor bepaalde waarden van het argument. Die verzameling van waarden noemt men het *definitiegebied van* f en men noteert dit als $\mathrm{def}(f)$. De verzameling van de waarden die y aanneemt, noemt men het *beeld van* f, voorgesteld als $\mathrm{im}(f)$.

Bepaalt $f(x)$ een functie, dan wordt f vaak voorgesteld in de vorm

$$f : \mathrm{def}(f) \to \mathrm{im}(f), \quad x \mapsto f(x)$$

of ook nog

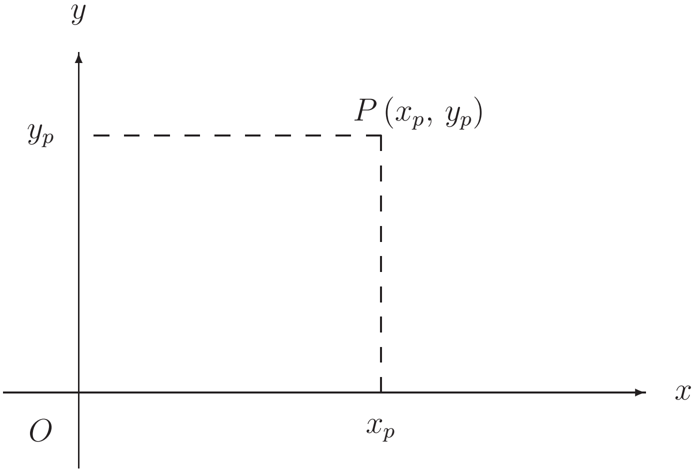
$$y = f(x) \qquad (x \in \mathrm{def}(f)).$$

Voorbeeld 4.1.1

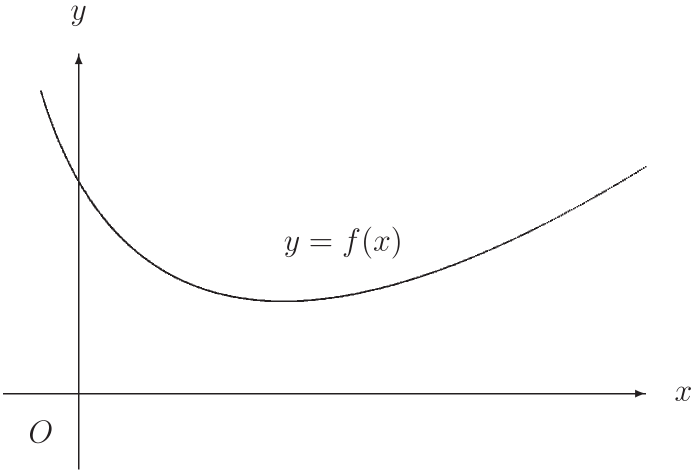
$y = \sqrt{x} \qquad (x \geq 0)$.
We hebben in dit geval $\mathrm{def}(f) = \mathrm{im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$. □

4.2 Grafische voorstelling van een functie

We beschouwen loodrechte assen: een abscis-as x en een ordinaat-as y. De orthogonale projecties van een punt P op de beide assen, x_p en y_p zijn resp. de abscis en ordinaat van het punt P.
Met elk punt P correspondeert één stel coördinaten (abscis en ordinaat) en omgekeerd correspondeert met elk stel coördinaten een punt.



Bij het beschouwen van een functie $y = f(x)$ kan men het argument x opvatten als abscis en de corresponderende functiewaarde $y = f(x)$ opvatten als ordinaat van een punt P in het vlak. Met iedere waarde van het argument correspondeert dan één punt van het vlak. Het geheel van al deze punten, voor alle waarden van het argument geeft de *beeldkromme* van de functie of het beeld van de *grafiek* van de functie (die men soms $\mathrm{gr}(f)$ noemt).



Een punt $P(x_p, y_p)$ ligt op deze kromme a.s.a.

$$y_p = f(x_p).$$

4.3 Inverse functie

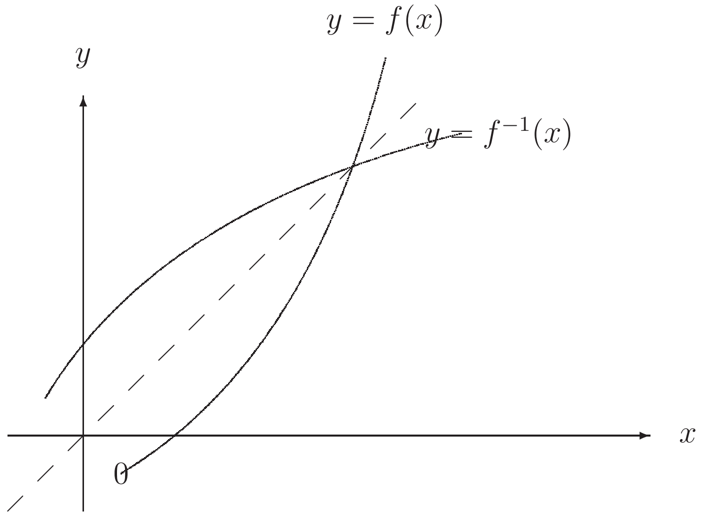
Stel dat y een functie is van het argument x, m.a.w. $y = f(x)$. Indien bij verschillende waarden van het argument ook verschillende functiewaarden corresponderen, dan kan men de rol die x en y vervullen omwisselen: men vat y op als onafhankelijke veranderlijke en x als functie:

$$x = f^{-1}(y). \tag{4.2}$$

De functie f^{-1} noemt men de *inverse functie* van f.

Noteer dat hierbij deze $^{-1}$ een symbolische notatie is en geen exponent.

De grafiek van f^{-1} vindt men door de grafiek van f te spiegelen t.o.v. de rechte $y = x$.



4.4 Terminologie

4.4.1 Stijgen en dalen

Zij $y = f(x)$ gedefinieerd in een interval I. Als voor elke twee elementen x_1, x_2 in dit interval geldt

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

dan zegt men dat de functie *stijgend* is in het interval I. Analoog, de functie is *dalend* in het interval I a.s.a.

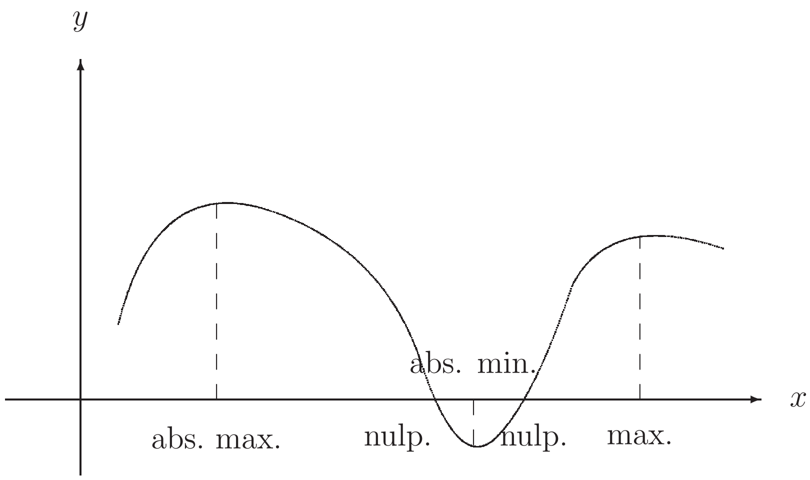
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Indien het definitiegebied def(f) een interval is en $y = f(x)$ stijgend of dalend is in dit interval, dan zegt men dat de functie *monotoon* stijgend of dalend is.

Indien in de vorige definities $\leq$ en $\geq$ resp. vervangen worden door $<$ en $>$, dan wordt gesproken van een *strikt stijgende* of een *strikt dalende* functie.

4.4.2 Minima en maxima

Indien $f(x_0) \geq f(x)$ voor alle x-waarden die behoren tot $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathrm{def}(f)$, dan zegt men dat $y = f(x)$ een *maximum* bereikt in x_0.
Indien $f(x_0) \leq f(x)$ voor alle x-waarden die behoren tot $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \mathrm{def}(f)$, dan zegt men dat $y = f(x)$ een *miminum* bereikt in x_0. Het grootste maximum wordt het *absolute maximum* genoemd, het kleinste minimum het *absolute minimum.* De andere minima en maxima zijn *lokale* minima en maxima. De minima en de maxima van een functie worden ook *extrema* genoemd.

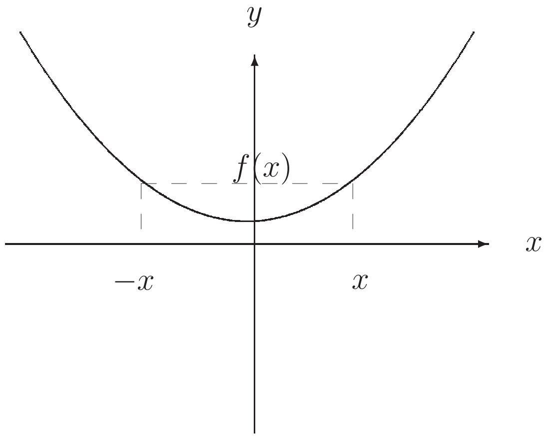


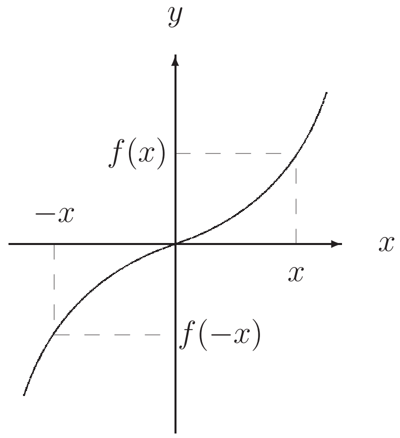
4.4.3 Nulpunten

Als x_0 een punt is waarvoor $y = f(x)$ nul wordt, dan wordt x_0 een *nulpunt* van de functie f genoemd. De nulpunten van een functie corresponderen met de snijpunten van de grafische voorstelling met de x-as.

4.4.4 Even en oneven functies

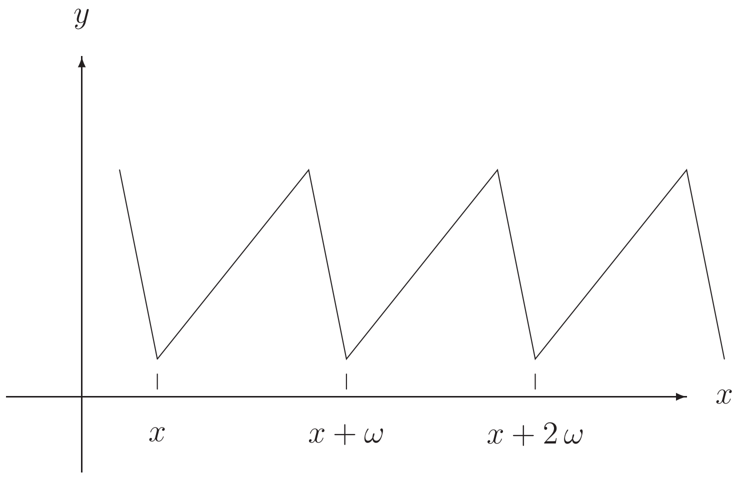
Indien men kan stellen dat, voor elke x van het definitiegebied, $f(-x) = f(x)$, dan wordt $y = f(x)$ *even* genoemd. De grafiek van een even functie is symmetrisch t.o.v. de y-as.
Indien men kan stellen dat, voor elke x van het definitiegebied, $f(-x) = -f(x)$, dan wordt $y = f(x)$ *oneven* genoemd. De grafiek van een oneven functie is symmetrisch t.o.v. de oorsprong.





4.4.5 Periodieke functies

Bestaat er een vast getal $\omega \in \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle x in het definitiegebied geldt dat $f(x) = f(x+\omega)$, dan heet de functie f *periodiek* met *periode* ω. Merk op dat, als voor elke x geldt $f(x+\omega) = f(x)$, dan ook $f(x+2\,\omega) = f((x+\omega)+\omega) = f(x+\omega) = f(x)$. Zo geldt dus $f(x) = f(x+\omega) = f(x+2\,\omega) = \ldots = f(x+k\,\omega)$ voor elk $k \in \mathbb{Z}$. Als ω een periode is waarvoor er geen natuurlijk getal $k > 1$ bestaat zodat ω/k ook nog een periode is van deze functie, dan is ω een *primitieve* periode van deze functie.



Men verkrijgt de grafiek van een periodieke functie met periode ω door de functie te tekenen in het interval $[x_0, x_0+\omega]$ en de grafiek te verschuiven langs de x-as (waarbij $x_0 \in \mathrm{def}(f)$ vrij kan gekozen worden).

4.5 Veeltermfuncties

Een veeltermfunctie van de graad n ($n \in \mathbb{N}$) wordt gedefinieerd als

$$\begin{aligned} y &= a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{met } a_n \neq 0 \text{ tenzij } n = 0. \end{aligned}$$

Het definitiegebied van een veeltermfunctie is $\mathbb{R}$.

4.5.1 Veeltermfunctie van de 0-de graad: de constante functie

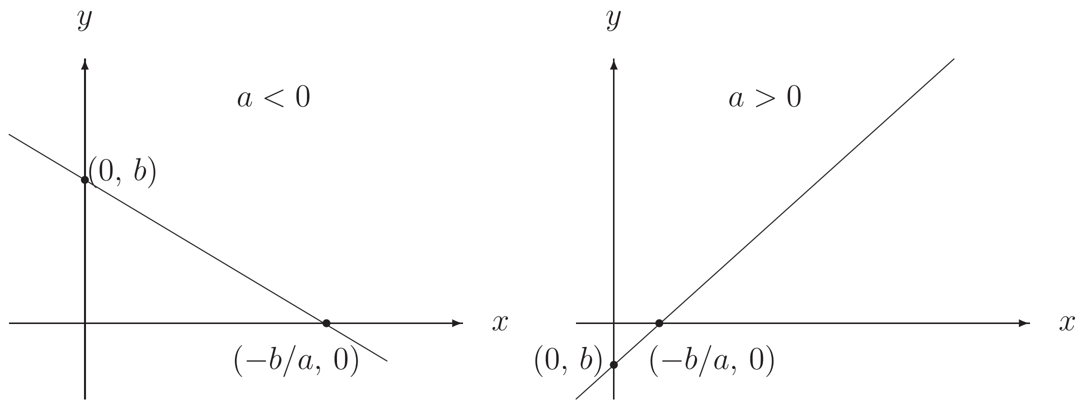
Een veeltermfunctie van de 0-de graad is een functie van de gedaante $y = a$ met $a \in \mathbb{R}$. De grafiek is een rechte evenwijdig met de x-as door het punt $(0,\, a)$.

4.5.2 Veeltermfunctie van de eerste graad: de lineaire functie

Een veeltermfunctie van de eerste graad wordt een *lineaire* functie genoemd en is van de gedaante

$$y = a\,x + b, \quad a \neq 0. \tag{4.3}$$

De grafiek van deze lineaire functie is een rechte die stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$. Het nulpunt van deze functie is $x = -b/a$.



Om de rechte te tekenen volstaat het twee punten van de rechte te bepalen, bvb. de snijpunten met de assen $(-b/a,\, 0)$ en $(0,\, b)$.

Vermits $a \neq 0$ bestaat de inverse functie

$$x = \frac{y - b}{a}, \tag{4.4}$$

die ook lineair is.

4.5.3 Veeltermfunctie van de tweede graad: de kwadratische functie

Een veeltermfunctie van de tweede graad wordt een *kwadratische* functie genoemd en is van de gedaante

$$y = a\,x^2 + b\,x + c. \tag{4.5}$$

Hierbij zijn a, b en c reële constanten waarbij $a \neq 0$. We kunnen de functie (4.5) ook omvormen als

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4\,a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

waarbij

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c\,. \tag{4.7}$$

Is $a > 0$, dan bereikt de functie een minimum, nl. $y_{\text{min}} = \dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$, in $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}$.
Is $a < 0$, dan bereikt de functie een maximum, nl. $y_{\text{max}} = \dfrac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$, in $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}$.
De nulpunten van de kwadratische functie worden bepaald uit

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\,a^2}\,. \tag{4.8}$$

- Is $\Delta > 0$, dan bezit (4.5) twee verschillende reële nulpunten:
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}\,.$$
- Is $\Delta = 0$, dan bezit (4.5) twee samenvallende reële nulpunten: $x = -\dfrac{b}{2\,a}$.
- Is $\Delta < 0$, dan bezit (4.5) geen reële nulpunten, maar twee complex toegevoegde nulpunten:
$$x_1 = \frac{-b + i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - i\,\sqrt{-\Delta}}{2\,a}\,.$$

De inverse functie is niet eenduidig gedefinieerd omdat dezelfde functiewaarde y kan verkregen worden met verschillende argumenten x.

4.6 Rationale functie

Een rationale functie wordt gedefinieerd door

$$y = \frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + \ldots + b_0} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i\,x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j\,x^j}\,,$$

waarbij a_i en b_j reële getallen zijn. Deze functie is gedefinieerd voor alle x-waarden waarvoor de noemer niet 0 wordt.

4.7 De exponentiële functie met grondtal a ($a > 0$, $a \neq 1$)

4.7.1 Machten

Als $n \in \mathbb{N}$, dan wordt de *n-de macht* a^n van een reëel getal a gedefinieerd als het product van n factoren a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ maal}} \tag{4.9}$$

Het getal a is het *grondtal* en n is de *exponent*. Enkele eigenschappen zijn onmiddellijk duidelijk:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{4.10}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \tag{4.11}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{4.12}$$

waarbij (4.11) slechts geldig zou zijn als $n > m$. De definitie kan nu ook uitgebreid worden voor machten die nul of negatief zijn door te stellen

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^{-m} &= \frac{1}{a^m}, \end{aligned}$$

waarbij de betrekkingen (4.10), (4.11) en (4.12) geldig zijn voor willekeurige gehele exponenten n en m.

4.7.2 Wortels

Als $n \in \mathbb{N}$, dan is b de *n-de wortel* van het positief reëel getal a indien a de n-de macht is van b, m.a.w.

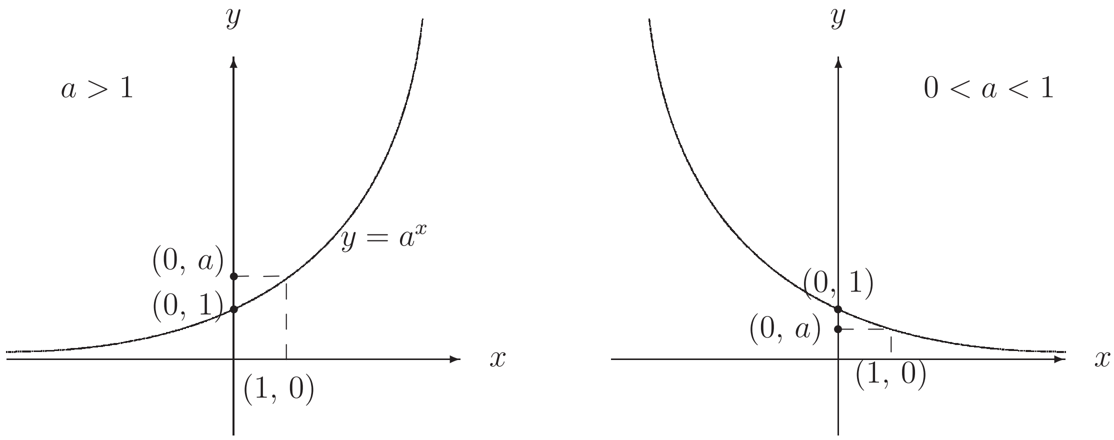
$$b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{indien } a = b^n \,.$$

Het begrip macht wordt ook nog verder veralgemeend door definitie voor gebroken machten:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \,.$$

Door controle kan men nagaan dat de betrekkingen (4.10), (4.11) en (4.12) geldig blijven voor willekeurige rationale exponenten n en m.

Zo verder gaand kunnen we ook de irrationale macht van een positief reëel getal definiëren. Op deze manier kunnen we dan stellen dat met elke $x \in \mathbb{R}$ een getal a^x kan geassocieerd worden. De functie die dit bewerkstelligt is de *exponentiële functie* $y = a^x$ met *grondtal* a. Het verloop van deze functie wordt geschetst in de onderstaande figuur. Voor $a > 1$ krijgen we een monotoon stijgend verloop, voor $0 < a < 1$ een monotoon dalend verloop. Merk op dat steeds $y > 0$.



Een voor de wiskunde zeer belangrijke exponentiële functie is deze met grondtal $a = e = 2.718\,281\,828\,459\ldots$. Men schrijft deze functie $y = e^x$ ook als $y = \exp(x)$.

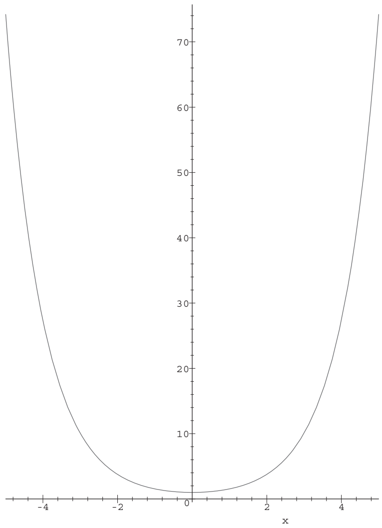
Uit de exponentiële functie $\exp(x)$ volgen ook de definities van de *hyperbolische* functies:

(i) De cosinushyperbolicus $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

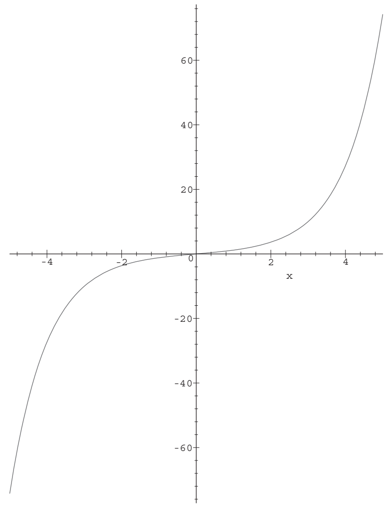
(ii) De sinushyperbolicus $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(iii) De tangenshyperbolicus $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

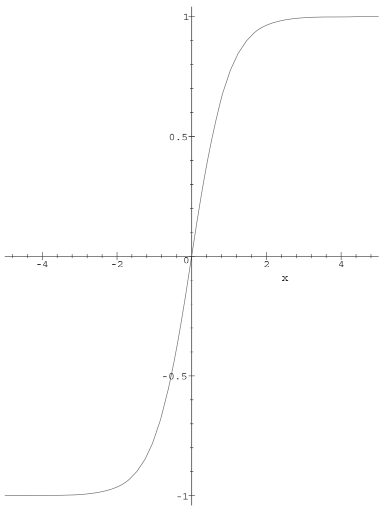
$\operatorname{ch} x$



$\operatorname{sh} x$

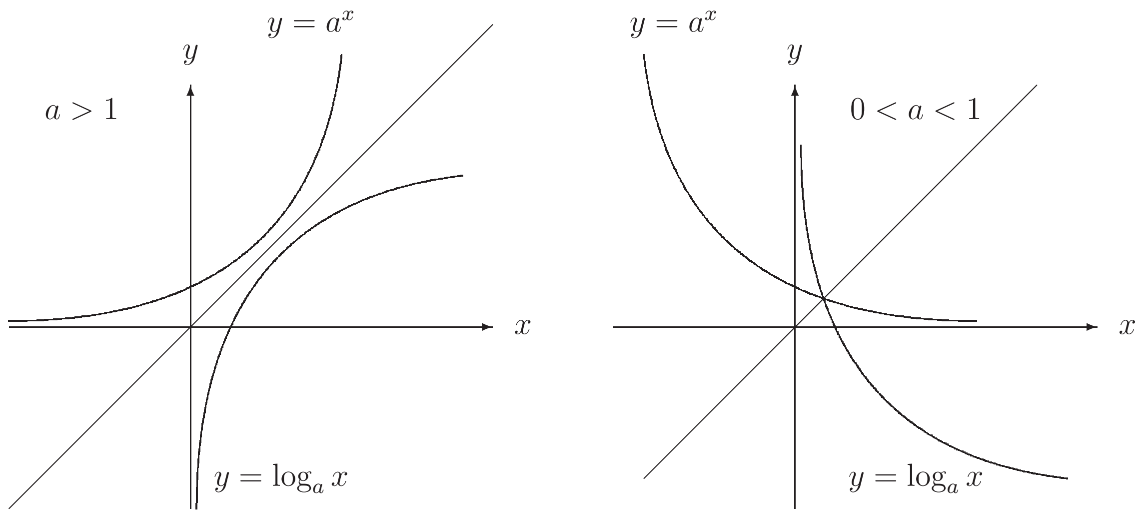


$\operatorname{th} x$



4.8 De logaritmische functie met grondtal a ($a > 0$, $a \neq 1$)

De exponentiële functie is niet alleen een monotoon stijgende of monotoon dalende functie, het is zelfs een bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $]0, +\infty[$. Dit betekent dat de inverse functie $(a^x)^{-1}$ kan bekeken worden. Deze functie wordt de *logaritmische functie met grondtal* a genoemd en genoteerd als $\log_a x$. De grafiek van deze functie krijgt men door spiegeling van de grafiek van $y = a^x$ ten opzichte van de eerste bissectrice van het assenkruis.



4.8.1 Logaritmen

De *logaritme* $\log_a b$ van een positief reëel getal b in een stelsel met grondtal $a > 0$ is x a.s.a. $a^x = b$.

$$a^{\log_a b} = b\,. \tag{4.13}$$

Met elk positief geheel getal a correspondeert een logaritmestelsel. We gebruiken in het bijzonder de volgende twee stelsels:

- de Briggse logaritmen: $\log_{10} b \equiv \log b$,
- de Neperiaanse logaritmen: $\log_e b \equiv \ln b$.

4.8.2 Bewerkingen met logaritmen

Het product $x \cdot y$ kan volgens (4.13) geschreven worden als

$$\begin{aligned} x \cdot y &= a^{\log_a (x \cdot y)} \\ \text{en} \quad x \cdot y &= a^{\log_a x}\, a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}, \end{aligned}$$

zodat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \tag{4.14}$$

Passen we (4.13) toe op x^y, dan vinden we

$$\begin{aligned} x^y &= a^{\log_a(x^y)} \\ \text{en } x^y &= \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x}, \end{aligned}$$

zodat

$$\log_a x^y = y \log_a x. \tag{4.15}$$

I.h.b. geldt dan

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x. \tag{4.16}$$

en in plaats van $-\log_a x$ schrijft men ook $\operatorname{colog}_a x$. Vermits een quotiënt $\frac{x}{y}$ ook geschreven kan worden als $x \cdot y^{-1}$ vinden we dan ook nog

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y. \tag{4.17}$$

4.8.3 De exponentiële functie met grondtal $a > 0$ hergedefinieerd

Vermits $y \equiv \exp(\ln y)$ vinden we voor $y = a^x$ dat

$$y = \exp(\ln a^x) = \exp(x \ln a). \tag{4.18}$$

De betrekking (4.18) zal vaak gebruikt worden bij de berekening van limieten, afgeleiden, enz.

4.8.4 Overgang tussen logaritmestelsels met verschillende basissen

Uit de identiteit

$$x = a^{\log_a x}$$

volgt na het nemen van de logaritme van beide leden in een stelsel met grondtal b dat

$$\log_b x = \log_b \left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x \log_b a. \tag{4.19}$$

In het bijzonder volgt voor $x = b$ dat, gezien $\log_b b = 1$,

$$1 = \log_a b \log_b a.$$

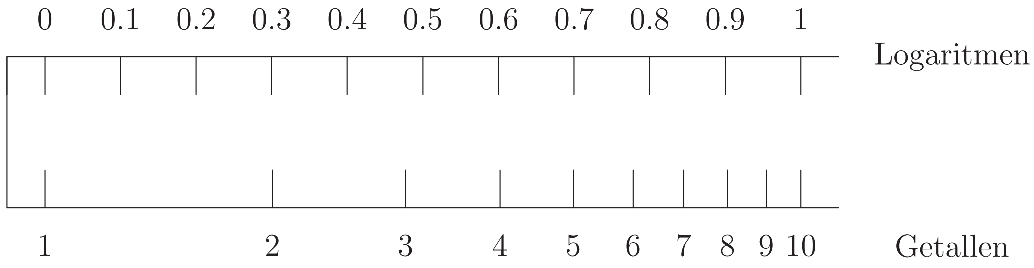
Tenslotte geldt ook nog de regel

$$\frac{\log_b x}{\log_a x} = \log_b a.$$

4.8.5 Logaritmische schaal

Tot nu toe werd steeds gewerkt met *lineaire* schalen: de verdelingen en de getallen worden op gelijke afstanden van elkaar geplaatst. De afstand tussen twee verdelingen is gelijk aan de eenheid.

Bij een *logaritmische* schaal worden de verdelingen en getallen geplaatst overeenkomstig de waarden van hun logaritmen.



4.8.6 Bijzonder grafiek-papier

4.8.6.1 Enkelvoudig logaritmisch papier

Vertoont twee loodrechte assen, waarbij de ene as een logaritmische schaal bezit, terwijl de andere as lineair verdeeld is. In een dergelijke diagram worden de functies $\log_a y = m\,x + c$ en $y = m\,\log_a x + c$ door rechten voorgesteld, bij passende keuze van abscis en ordinaat.

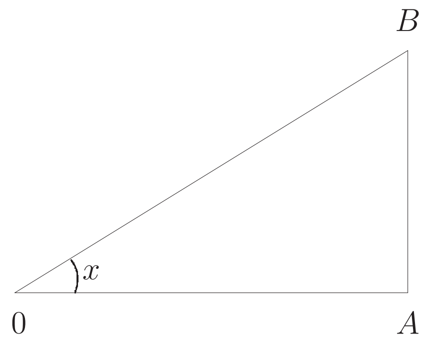
4.8.6.2 Dubbel logaritmisch papier

Vertoont loodrechte assen met op beiden een logaritmische schaal. In dergelijk diagram is de grafiek van $\log_a y = m\,\log_b x + c$ een rechte.

4.9 De goniometrische functies

4.9.1 Definities

In de rechthoekige driehoek AOB zijn de goniometrische functies van de scherpe hoek $x = \widehat{AOB}$:



$$\sin x = \frac{AB}{OB} \tag{4.20}$$

$$\cos x = \frac{OA}{OB} \tag{4.21}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{4.22}$$

terwijl verder nog gedefinieerd worden

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \tag{4.23}$$

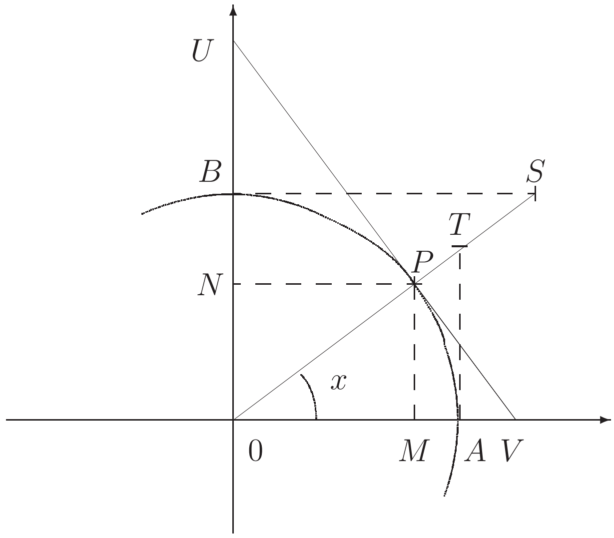
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \tag{4.24}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x} \tag{4.25}$$

De uitbreiding tot stompe hoeken vereist de invoering van enkele nieuwe begrippen:

Een *georiënteerde cirkelomtrek* is een cirkelomtrek waarop een positieve zin gekozen is. Een *goniometrische cirkelomtrek* is een georiënteerde cirkelomtrek met straal 1. Met elke boog correspondeert een hoek, nl. deze ingesloten door de twee stralen. Door deze correspondentie kan men goniometrische functies definiëren op hoeken.

We beschouwen een goniometrische cirkelomtrek met middelpunt O en we noemen A het beginpunt der bogen. We trekken de loodrechte assen OA en OB. De boog AP stellen we voor door x. De goniometrische functies van x zijn dan:



$\sin x = ON$	projectie van OP op OB
$\cos x = OM$	projectie van OP op OA
$\operatorname{tg} x = AT$	T snijpunt van OP met $AT \parallel OB$
$\operatorname{cosec} x = OU$	U snijpunt van OB met de raaklijn in P aan de cirkel
$\sec x = OV$	V snijpunt van OA met de raaklijn in P aan de cirkel
$\operatorname{cotg} x = BS$	S snijpunt van OP met $BS \parallel OA$

In de verschillende driehoeken op deze figuur gelden de betrekkingen

$$ON \cdot OU = (OP)^2 = 1 \tag{4.26}$$

$$OM \cdot OV = (OP)^2 = 1 \tag{4.27}$$

$$\frac{AT}{OA} = \frac{OB}{BS} \quad \text{zodat} \quad AT \cdot BS = OA \cdot OB = 1 \tag{4.28}$$

$$(ON)^2 + (OM)^2 = (OP)^2 = 1 \tag{4.29}$$

Voor de goniometrische functies van gelijke bogen geldt dus:

$$\sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1 \tag{4.30}$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1 \tag{4.31}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \tag{4.32}$$

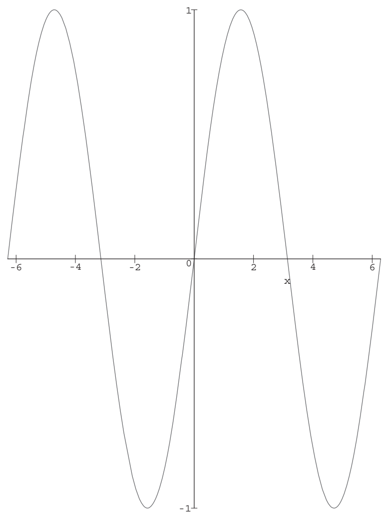
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{4.33}$$

De tekens der goniometrische functies voor bogen waarvan de eindpunten gelegen zijn in de verschillende kwadranten kunnen gemakkelijk op de figuur afgelezen worden.

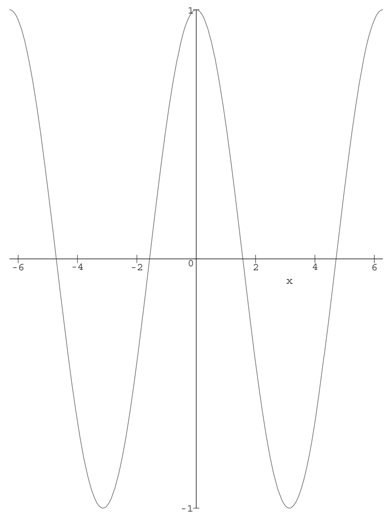
4.9.2 Verloop van de goniometrische functies

$y = \sin x$ en $y = \cos x$ zijn periodiek met periode 2π.

$\sin x$

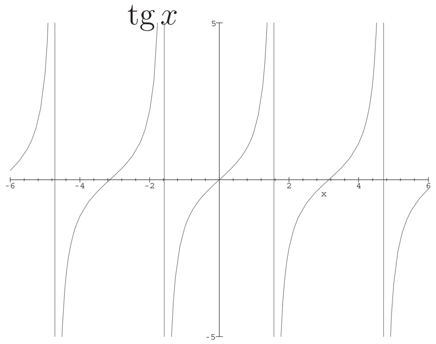


$\cos x$

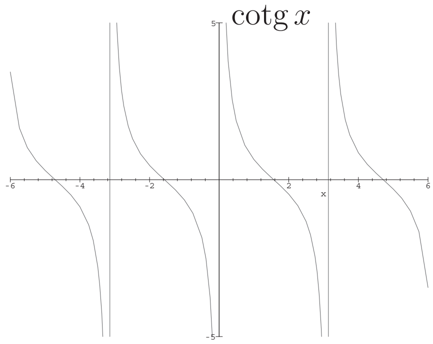


$y = \operatorname{tg} x$ en $y = \operatorname{cotg} x$ zijn periodiek met periode π.

$\operatorname{tg} x$



$\operatorname{cotg} x$



4.9.3 Boogeenheden

De *radiaal*: het is een boog waarvan de lengte gelijk is aan de straal van de cirkel. Een volledige cirkelomtrek is dus 2π radialen. De radiaal wordt decimaal onderverdeeld. B.v.: $2^r.7185$

Het kwadrant: het is een kwart van een cirkelomtrek. Het kwadrant wordt (eventueel) decimaal onderverdeeld.

De zestigdelige graad: het is een 360ste deel van een cirkelomtrek. De onderverdeling gebeurt verder 2 maal zestigdelig en dan decimaal.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= 60' \quad \text{(minuten)} \\ 1' &= 60'' \quad \text{(seconden)} \end{aligned}$$

B.v. $29°18'37''.52$

Voor enkele veelgebruikte hoeken gelden de volgende functiewaarden:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$0° = 0$	0	1	0
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	∞

4.9.4 Formules

4.9.4.1 Goniometrische functies van tegengestelde bogen

Uit de figuur volgt dat de sinusfunctie een oneven functie is:

$$\sin(-x) = -\sin x \tag{4.34}$$

en dat de cosinusfunctie een even functie is:

$$\cos(-x) = \cos x \tag{4.35}$$

Voor de tangensfunctie geldt dan:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \tag{4.36}$$

Analoge betrekkingen gelden voor de cosecans-, de secans- en de cotangensfuncties.

4.9.4.2 Goniometrische functies van complementaire bogen

Uit de symmetrie in de figuur volgt dat

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \tag{4.37}$$

en

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \tag{4.38}$$

zodat

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotg} x \tag{4.39}$$

Deze betrekkingen blijven geldig zelfs als de boog niet tot het eerste kwadrant behoort.

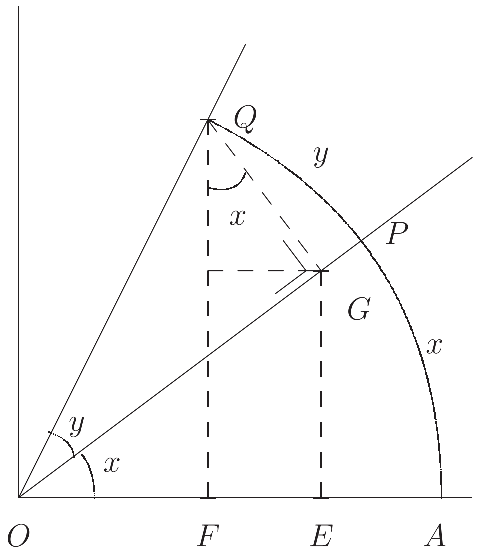
4.9.4.3 Goniometrische functies van supplementaire bogen

Eveneens uit de figuur volgt dat

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \operatorname{tg}(\pi - x) &= -\operatorname{tg} x\end{aligned}$$

4.9.4.4 Goniometrische functies van samengestelde bogen

Zet men op de goniometrische cirkel na elkaar de bogen $AP = x$ en $PQ = y$ uit, dan toont de figuur dat



$$OF = \cos(x + y) \tag{4.40}$$

$$OG = \cos y \tag{4.41}$$

$$GQ = \sin y \tag{4.42}$$

$$OE = OG \cos x \tag{4.43}$$

$$FE = GQ \sin x \tag{4.44}$$

Uit

$$OF = OE - FE \tag{4.45}$$

volgt

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \tag{4.46}$$

Door in (4.46) y te vervangen door $-y$ en gelet op (4.34) en (4.35) verkrijgen we

$$\cos(x-y) = \cos x \, \cos y + \sin x \, \sin y. \tag{4.47}$$

Verder maken we gebruik van formule (4.38) om te schrijven

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right). \end{aligned}$$

Na uitwerking van het tweede lid volgens (4.47) geldt

$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y, \tag{4.48}$$

en analoog als hoger

$$\sin(x-y) = \sin x \, \cos y - \cos x \, \sin y. \tag{4.49}$$

Deling van (4.48) door (4.46) en van (4.49) door (4.47) levert dan

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \, \operatorname{tg} y}, \tag{4.50}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \, \operatorname{tg} y}. \tag{4.51}$$

In het bijzonder, zo we $y = x$ stellen, krijgen we uit (4.46), (4.48), (4.50), de formules

$$\cos 2\,x = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{4.52}$$

$$\sin 2\,x = 2 \, \sin x \, \cos x, \tag{4.53}$$

$$\operatorname{tg} 2\,x = \frac{2 \, \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \tag{4.54}$$

Uit vorige betrekkingen kunnen formules afgeleid worden om een som of een verschil van sinussen of cosinussen om te zetten tot producten van sinussen en cosinussen en omgekeerd. Tellen we (4.46) met (4.47) op dan verkrijgen we

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \, \cos x \, \cos y. \tag{4.55}$$

Door nu verder $x + y = a$ en $x - y = b$ te stellen wordt dit

$$\cos a + \cos b = 2 \, \cos \frac{a+b}{2} \, \cos \frac{a-b}{2}. \tag{4.56}$$

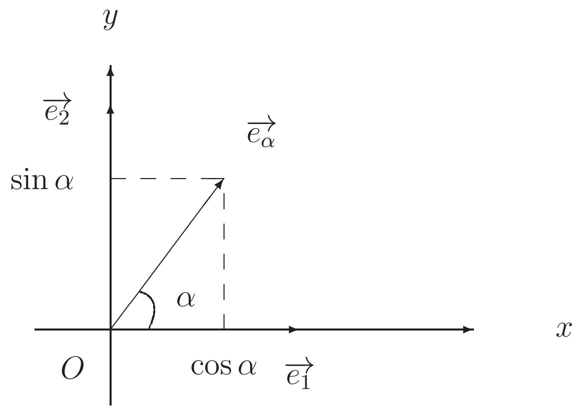
Analoog vindt men

$$\cos a - \cos b = -2 \, \sin \frac{a-b}{2} \, \sin \frac{a+b}{2} \tag{4.57}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \, \sin \frac{a+b}{2} \, \cos \frac{a-b}{2} \tag{4.58}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \, \sin \frac{a-b}{2} \, \cos \frac{a+b}{2} \tag{4.59}$$

4.9.5 Het inproduct van vectoren



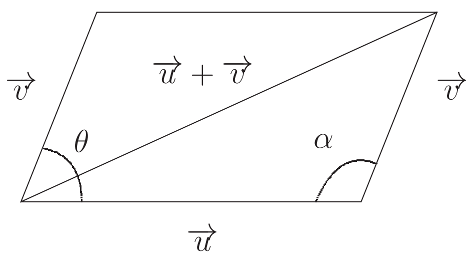
Zij $\overrightarrow{e_1}$ een eenheidsvector langs de x-as, $\overrightarrow{e_2}$ een eenheidsvector langs de y-as en $\overrightarrow{e_\alpha} = \cos\alpha\,\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_2}$ een eenheidsvector die een georiënteerde hoek α insluit met $\overrightarrow{e_1}$. Dan volgt dat $\cos\alpha = \overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_\alpha}$. Dit heeft tot gevolg dat we algemeen kunnen schrijven:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\theta$$

waarbij θ de ingesloten hoek is tussen $\overrightarrow{u}$ en $\overrightarrow{v}$. Tevens kunnen we schrijven, met $\alpha = \pi - \theta$

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Dit is de *cosinusregel*.



In het bijzonder geldt voor $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ in een rechthoekige driehoek de *stelling van Pythagoras*:

$$|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|^2 = |\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2.$$

4.9.6 De cyclometrische functies

We beschouwen de functies

$$y = \sin x, \qquad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \tag{4.60}$$

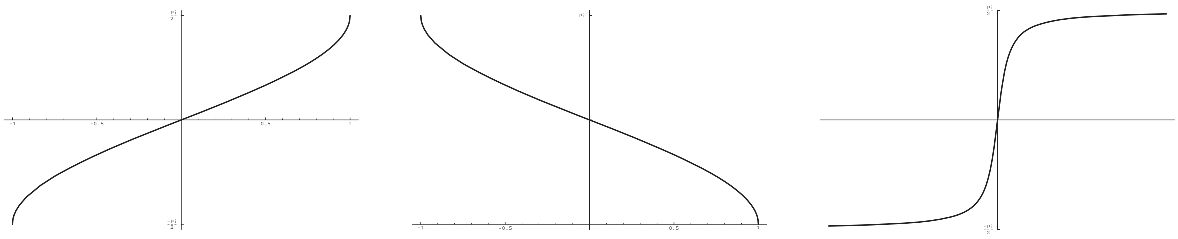
$$y = \cos x, \qquad 0 \le x \le \pi, \tag{4.61}$$

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \tag{4.62}$$

die in de beschouwde intervallen elk eenduidig bepaald zijn en die ook een welbepaalde inverse bezitten. We kunnen dus x als (inverse) functie van het argument y opvatten. Bij de inverse goniometrische functies, die ook *cyclometrische* functies worden genoemd, wordt de notatie f^{-1} niet gebruikt, maar stelt men

$$y = \arcsin x, \qquad -1 \leq x \leq 1, \tag{4.63}$$
$$y = \arccos x, \qquad -1 \leq x \leq 1, \tag{4.64}$$
$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{4.65}$$

$\arcsin x$ $\qquad$ $\arccos x$ $\qquad$ $\operatorname{arctg} x$



In woorden betekent $\arcsin y$ de boog waarvan de sinus gelijk is aan y. Gelet op de eenduidige bepaling van de oorspronkelijke functies $y(x)$ zullen de functiewaarden van de inverse functies $x(y)$ gelegen zijn in de intervallen aangegeven in (4.60), (4.61) en (4.62).

4.9.7 Poolcoördinaten

De coördinaten (x_p, y_p) van een punt P van het vlak zijn in feite de *cartesische* coördinaten. Door in het vlak een rechthoekig assenkruis aan te brengen kan op die manier aan elk punt een unieke koppel (x, y) toegekend worden.

Er zijn echter alternatieven mogelijk. Zo kan men bvb. werken met *poolcoördinaten*.

Het punt P kan ook op unieke wijze gekarakteriseerd worden door zijn afstand r tot de oorsprong (of pool) O en de georiënteerde hoek θ tussen een vooraf vastgelegde rechte door O (bvb. de x-as) en de rechte OP. Het koppel (r, θ) vormt de poolcoördinaten van het punt P.

Het verband tussen de cartesische coördinaten en de poolcoördinaten is vrij duidelijk:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases} \qquad \text{waaruit} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

De pool is het enige punt waarvoor θ niet gedefinieerd is, maar toch is er een unieke identificatie mogelijk omdat het ook het enige punt is waarvoor $r = 0$.

Voorbeeld 4.9.1

De cartesische en poolcoördinaten van enkele punten:

(x, y)	(r, θ)
$(2, 0)$	$(2, 0)$
$(-2, 0)$	$(2, \pi)$
$(0, 3)$	$(3, \pi/2)$
$(0, -3)$	$(3, 3\,\pi/2)$
$(-1, 1)$	$(\sqrt{2}, 3\,\pi/4)$

□

De voorstelling in poolcoördinaten biedt soms voordelen omdat bepaalde problemen eenvoudiger kunnen uitgedrukt worden.

Voorbeeld 4.9.2

De vergelijking van een circel met straal R en middelpunt O is $x^2 + y^2 = R^2$. In poolcoördinaten wordt dit $r = R$. □