Hoofdstuk 5

Complexe getallen

5.1 De voorstelling van complexe getallen

We hebben reeds gezien dat een complex getal $x + iy$ in het complexe getallenvlak voorgesteld kan worden als het unieke punt met abscis x en ordinaat y, m.a.w. de *cartesische* coördinaten van het punt zijn (x, y).

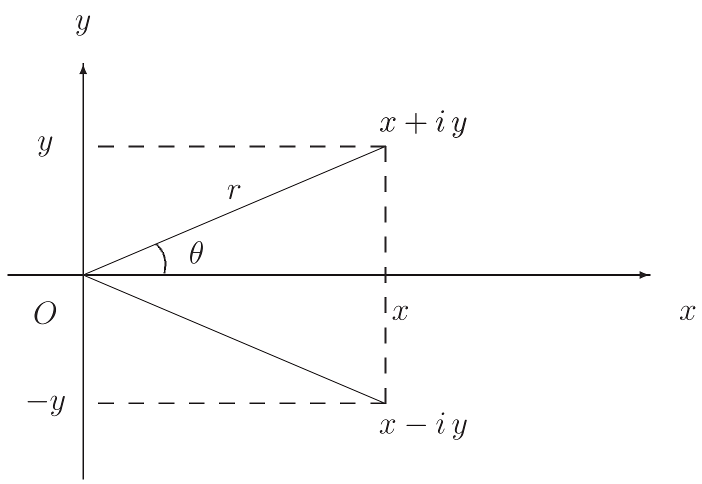
Ook hier kunnen we een stel coördinaten (r, θ) toekennen: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wordt de *modulus* van het complexe getal genoemd, θ het *argument*.

Op deze manier geldt

$$z = x + iy = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta).$$

Voor het complexe toegevoegde wordt y vervangen door $-y$ of θ door $-\theta$, waardoor

$$x - iy = r\,(\cos\theta - i\,\sin\theta).$$



Voorbeeld 5.1.1

Enkele complexe punten met hun modulus en argument:

$x+iy$	(r,θ)
2	$(2,0)$
-2	$(2,\pi)$
$3\,i$	$(3,\pi/2)$
$-\,3\,i$	$(3,3\,\pi/2)$
$-1+\ \ i$	$(\sqrt{2},3\,\pi/4)$

□

Het voordeel van deze voorstelling komt tot uiting bij het berekenen van producten en machten.

5.1.1 De inverse van een complex getal

Als $z = x + iy$, dan is

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{r\,(\cos\theta - i\,\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}\,(\cos\theta - i\,\sin\theta).$$

De modulus van het inverse is bijgevolg het inverse van de modulus en het argument van het inverse wordt bekomen door het tegengestelde van het argument te nemen.

5.1.2 Het product van twee complexe getallen

Als $z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2)$ is

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1\,r_2\,(\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1)\,(\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2) \\ &= r_1\,r_2\,\left[(\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2) + i\,(\sin\theta_1\,\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\sin\theta_2)\right] \\ &= r_1\,r_2\,\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2)\right). \end{aligned}$$

De modulus van het product is bijgevolg het product van de moduli en het argument is de som van de argumenten.

5.1.3 Machten van complexe getallen

Als $z = x + i\,y = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, dan is $z^n = r^n\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n$.

Anderzijds is $z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\ \text{maal}}$, zodat ook geldt $z^n = r^n\,(\cos n\,\theta + i\,\sin n\,\theta)$.

De modulus van de n-de macht is bijgevolg de n-de macht van de modulus en het argument van de n-de macht is het argument vermenigvuldigd met n.

Dit leidt tot de formule van *de Moivre*:

$$\cos n\,\theta + i\,\sin n\,\theta = (\cos\theta + i\,\sin\theta)^n.$$

Voorbeeld 5.1.2

De formules voor $\cos(2x)$ en $\sin(2x)$ kunnen via de formule van de Moivre teruggevonden worden:

$$\cos(2x) + i\,\sin(2x) = (\cos x + i\,\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\,i\,\cos x\,\sin x,$$

waaruit

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \text{en} \qquad \sin(2x) = 2\,\sin x\,\cos x$$

volgen. □

5.1.4 Wortels van complexe getallen

Het getal $w = r_w\,(\cos\theta_w + i\,\sin\theta_w)$ is een n-de wortel van een complex getal $z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ als $w^n = z$. Gelet op het vorige moet dus $r_w^n = r$ en $n\,\theta_w = \theta$. Voor de modulus r_w betekent dit alvast $r_w = \sqrt[n]{r}$. Voor het argument θ_w moet rekening gehouden worden met het feit dat hoeken slechts bepaald zijn op een veelvoud van $2\,\pi$ na.

Dit betekent dat we in feite moeten stellen $n\,\theta_w = \theta + 2\,k\,\pi$, zodat

$$\theta_w = \frac{\theta}{n} + \frac{2\,k\,\pi}{n} \qquad k = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1.$$

Elk complex getal heeft dus n complexe n-de wortels!

Voorbeeld 5.1.3

De 3-de machtswortels van $1 = 1\,(\cos 0 + i\,\sin 0)$ zijn:

$$1\,,\quad \cos\frac{2\,\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\,\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad \cos\frac{4\,\pi}{3} + i\,\sin\frac{4\,\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

5.2 Complexe eigenwaarden

In hoofdstuk 2 hadden we reëele matrices besproken, en in voorbeeld 3.11.2 hadden we gezien, dat zelfs reëele matrices complexe eigenwaarden kunnen hebben – we zijn dus gedwongen, met complexe getallen te werken!

We beschouwen eerst weer de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

uit voorbeeld 3.11.2. We hadden al berekend dat de eigenwaarden van A de complexe getallen $\lambda_1 = 1 + 2i$ en $\lambda_2 = 1 - 2i$ zijn, en dat $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ geldt, m.a.w. λ_2 is het complex toegevoegde getal van λ_1. We merken op:

Opmerking 5.2.1

Zij A een reële $n \times n$ matrix. Voor elke complexe eigenwaarde z van A is ook het getal $\overline{z}$ – dus het complex toegevoegde getal van z – een eigenwaarde van A. Voor complexe matrices hoeft dat niet zo te zijn: bvb. heeft de matrix

$$iI_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

het getal i als eigenwaarde, maar niet $\overline{i} = -i$. □

Als we dus bvb. een reële 5×5 matrix hebben waarvan $2, i, -2i+1$ eigenwaarden zijn, dan weten we automatisch dat de andere twee eigenwaarden $-i$ en $2i+1$ moeten zijn.

In de volgende secties beschouwen we complexe vectoren en complexe matrices, dus vectoren en matrices die complexe getallen kunnen bevatten.

5.3 Complexe matrices

5.3.1 Hermitisch toegevoegde

Zij A een complexe matrix. Als we nu elk element z van A vervangen door zijn complex toegevoegde $\overline{z}$, krijgen we de complex toegevoegde matrix $\overline{A}$. Er geldt $\left(\overline{A}\right)^T = \overline{(A^T)}$.

Het is duidelijk dat als R een reële matrix is, $R = \overline{R}$ geldt (zoals bij reële getallen). Maar voor complexe matrices in het algemeen geldt dat natuurlijk niet, bvb. hebben we voor

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ -2-i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{dat} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ -2+i & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Een complexe $n \times n$ matrix A heet *hermitisch* als haar getransponeerde matrix gelijk is aan haar complex toegevoegde matrix, of kortweg $A^T = \overline{A}$ of equivalent $A = \left(\overline{A}\right)^T$. Daarom wordt vaak ook $A^H = \left(\overline{A}\right)^T$ gezet en A^H de *hermitisch toegevoegde* matrix van A genoemd (in de kwantummechanica is ook de notatie $A^\dagger$ gebruikelijk). Met deze notatie is een matrix hermitisch als $A = A^H$. Een andere manier dat te zeggen is dat voor elk element a_{jk} van de matrix A, voor alle indices j en k geldt dat $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$. We merken op dat $A = \left(A^H\right)^H$ geldt.

Voorbeeld 5.3.1

De matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -4 \end{pmatrix}$ is hermitisch, omdat

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -4 \end{pmatrix} = \overline{A}.$$

□

Opmerking 5.3.1

- De hoofddiagonaalelementen van een hermitische matrix zijn reëel.
- De eigenwaarden van een hermitische matrix zijn reëel.
- Uit voorgaande eigenschappen volgt dat het spoor en de determinant van een hermitische matrix reëel zijn.
- Een reële hermitische matrix is een symmetrische matrix.
- De som van twee hermitische $n \times n$ matrices is weer een hermitische matrix.
- Het product van twee hermitische $n \times n$ matrices A en B is weer een hermitische matrix als en slechts als $AB = BA$.

$\square$

De eerste bewering van de opmerking hierboven volgt direct uit de definitie van een hermitische matrix (voor de hoofddiagonaalelementen geldt $a_{jj} = \overline{a}_{jj}$). De tweede bewering zullen we iets later in dit hoofdstuk bewijzen.

Algemeen heeft een hermitische 2×2 de vorm $\begin{pmatrix} a & z \\ \overline{z} & b \end{pmatrix}$ met $a, b \in \mathbb{R}$ en $z \in \mathbb{C}$.

Er zijn enkele befaamde hermitische matrices, bvb. de *Pauli matrices*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die een belangrijke rol in de kwantummechanica spelen.

5.3.2 Norm van complexe vectoren

Nu bespreken we complexe vectoren en hun norm. De eerste vraag is: hoe breiden we de definitie van lengte van een vector van het reëel geval naar het complex geval uit?

We zien dat een directe toepassing van onze oude definitie van de lengte van een vector niet meer werkt: zij $v = (v_1, ..., v_n)^T$ een (kolom)vector met $v_j \in \mathbb{C}$. De oude definitie van de lengte van v (zie hoofdstuk 3.4) was $|v| = \sqrt{v.v}$, waarbij $v.v$ het scalair product is. Maar dit getal kan 0 zijn voor vectoren, die niet de nulvector zijn, bvb. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Nu is

$$|v| = \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0.$$

Maar natuurlijk mag alleen de nulvector lengte 0 hebben! We moeten dus een andere aanpak vinden. Let op: een goede uitbreiding van de oude definitie zou ook voor reële vectoren moeten gelden. We zullen hiervoor het concept hermitisch toegevoegde gebruiken.

Zij $z = (z_1, ..., z_n)^T$ een complexe vector, dus $z_j \in \mathbb{C}$ voor alle j. Dan is $\overline{z}$ de vector $(\overline{z}_1, ..., \overline{z}_n)^T$, dus we nemen het complex toegevoegde van elke component z_j om de complex toegevoegde vector $\overline{z}$ van z te krijgen.

Voor het scalair product van twee reële vectoren u en v geldt de volgende vergelijking: $u.v = u^T \cdot v$ (let op: het eerste punt, ".", staat voor het scalair product, terwijl het tweede punt, "·", hoger dan het eerste, voor matrixvermenigvuldiging staat), wat we vaak ook als $u^T v$ zullen schrijven. We hebben dus $|v| = \sqrt{v^T v}$.

Voor complexe vectoren w en $z = (z_1, ..., z_n)^T$ definiëren we het scalair product van w en z en de norm van z als volgt:

$$z.w = z^H w$$

en

$$\|z\| = \sqrt{z.z} = \sqrt{z^H z} = \sqrt{\underbrace{(\overline{z}_1 \ \ \overline{z}_2 \ \ \cdots \ \ \overline{z}_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{\text{rijvector maal kolomvector}}} = \sqrt{\overline{z}_1 z_1 + ... + \overline{z}_n z_n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j z_j},$$

waarbij op te merken is dat $\overline{z}_j z_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is voor alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ (dat hadden we al op het einde van hoofdstuk 1 gezien) en daarom ook $\|z\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt. Voor een reële vector v is dus $|v| = \|v\|$.

Nu kunnen we de norm (dus de complexe uitbreiding van het begrip "lengte" voor reële vectoren) van de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ berekenen: we hebben

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{\overline{(1 \ \ i)} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{(\overline{1} \ \ \overline{i}) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} = \sqrt{(1 \ \ -i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{1 \cdot 1 + (-i) \cdot i} = \sqrt{1 - i^2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Merk op dat deze definitie ook perfect voor reële vectoren werkt, omdat voor een reële vector v steeds $\overline{v} = v$ geldt.

In toepassingen, bvb. in de sterrenkunde, is het vaak belangrijk, (door vermenigvuldigen met een geschikte factor) een vector op norm 1 te brengen, waarbij zijn richting en zin zouden behouden worden – m.a.w.: te *normeren*. Een vector z die niet de nulvector is, kan genormeerd worden door hem door zijn norm te delen:

$$\frac{z}{\|z\|}.$$

Dan geldt voor $z = (z_1, ..., z_n)^T$ met $z_j \in \mathbb{C}$ voor alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\left\|\frac{z}{\|z\|}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} \frac{z_1}{\|z\|} \\ \vdots \\ \frac{z_n}{\|z\|} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\overline{\left(\frac{z_1}{\|z\|}\right)} \cdot \frac{z_1}{\|z\|} + \ldots + \overline{\left(\frac{z_n}{\|z\|}\right)} \cdot \frac{z_n}{\|z\|}} = \sqrt{\frac{\overline{z}_1 \cdot z_1}{\|z\|^2} + \ldots + \frac{\overline{z}_n \cdot z_n}{\|z\|^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\overline{z}_1 \cdot z_1 + \ldots + \overline{z}_n \cdot z_n}{\|z\|^2}} = \frac{\sqrt{\overline{z}_1 \cdot z_1 + \ldots + \overline{z}_n \cdot z_n}}{\sqrt{\|z\|^2}} = \frac{\|z\|}{\|z\|} = 1$$

waarbij we het feit gebruiken dat de norm altijd een reëel getal is.

Let op dat er voor een gegeven reële vector v twee vectoren zijn met norm 1 en dezelfde richting zoals v (maar niet dezelfde zin!), namelijk

$$\pm\frac{v}{\|v\|}.$$

Nu geven we het bewijs van het feit dat de eigenwaarden van een hermitische matrix reëel zijn.

We hebben twee opmerkingen nodig die we hier niet zullen bewijzen:

(1) Voor het **complexe** scalair product van twee complexe vectoren y en z in $\mathbb{C}^n$ geldt $y.z = y^H \cdot z = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} z_j$. Hieruit volgt voor $\alpha \in \mathbb{C}$: $y.(\alpha z) = \alpha(y.z)$ en $(\alpha y).z = \overline{\alpha}(y.z)$.

(2) Voor een hermitische matrix A geldt $y.Az = Ay.z$ voor alle $y, z \in \mathbb{C}^n$.

Zij λ een eigenwaarde van een hermitische matrix A en z een eigenvector van A behorend bij de eigenwaarde λ. We kiezen z zodat $\|z\| = 1$ (dat is altijd mogelijk). Dan geldt

$$\lambda \stackrel{\|z\|=1}{=} \lambda\|z\|^2 = \lambda(z.z) \stackrel{(1)}{=} z.(\lambda z) \stackrel{z\text{ EV}}{=} z.Az$$

$$\stackrel{(2)}{=} Az.z \stackrel{z\text{ EV}}{=} (\lambda z).z \stackrel{(1)}{=} \overline{\lambda}(z.z) = \overline{\lambda}\|z\|^2 \stackrel{\|z\|=1}{=} \overline{\lambda},$$

dus $\lambda \in \mathbb{R}$, wat te bewijzen was.

5.3.3 Unitaire matrices

Een complexe $n \times n$ matrix U heet *unitair* indien geldt dat $U^H U = UU^H = I_n$, waarin I_n de eenheidsmatrix van de orde n is en U^H de hermitisch toegevoegde matrix van U. Deze voorwaarde houdt in dat een matrix U unitair is als en slechts als $U^{-1} = U^H$.

Een unitaire matrix waarvan alle elementen reëel zijn is een orthogonale matrix, een soort matrix die we op het einde van hoofdstuk 3 besproken hadden.

De absolute waarde van de determinant van een unitaire matrix U (van de orde n) is gelijk aan 1: we hebben $\det(U^H) = \overline{\det(U)}$ en $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ voor twee $n \times n$ matrices A en B. Hiermee geldt

$$|\det(U)|^2 = \det(U) \cdot \overline{\det(U)} = \det(U) \cdot \det(U^H) = \det(UU^H) = \det(I_n) = 1.$$

Voorbeeld 5.3.2

De Pauli matrices die we hierboven hebben gezien, zijn unitair. Ook de matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$$

zijn unitair. $\square$

Hoofdstuk 6

Limieten en continuïteit

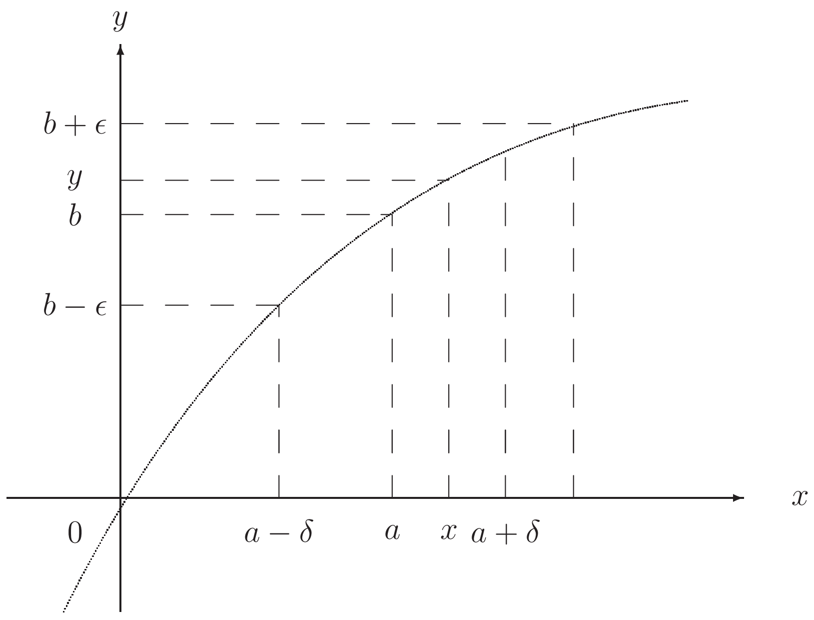
6.1 Definities

6.1.1 De limiet van een functie in een punt

Gegeven de functie $f(x)$ met definitiegebied def(f). Men noemt b de *limiet* van $f(x)$ in a indien $f(x)$ willekeurig dicht bij b ligt zodra x voldoende dicht bij a ligt.

Wiskundig wordt dit uitgedrukt als: voor elk willekeurig klein positief reëel getal ϵ kan er een positief reëel getal δ gevonden worden waarvoor $\{x \mid |x - a| < \delta\} \subset \text{def}(f)$ en

$$|f(x) - b| < \epsilon \qquad \text{zodra} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$



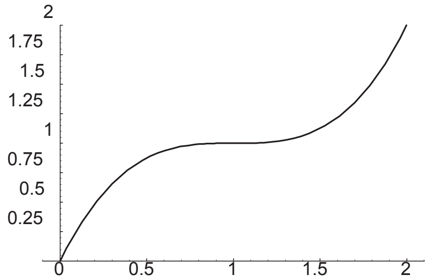
Meetkundig gezien moeten dus ten eerste alle x wiens afstand tot a strikt kleiner is dan δ in def(f) liggen. Ten tweede moet de afstand tussen $f(x)$ en b strikt kleiner zijn dan ϵ zodra de afstand tussen $x \neq a$ en a strikt kleiner dan δ is. M.a.w.: de limiet van f in a is b indien de afstand tussen $f(x)$ en b willekeurig klein wordt zodra x voldoende dicht bij a ligt.

Als b de limiet is van $f(x)$ in a, dan noteert men dit als

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

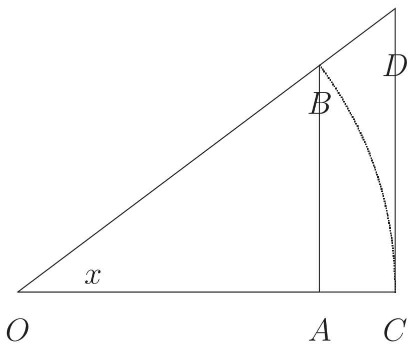
Voorbeeld 6.1.1

1. $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^3 + 1 = 1$ want als $|x-1| < \sqrt[3]{\epsilon} = \delta$ dan is $|f(x) - 1| < \epsilon$.



2. Indien x uitgedrukt is in radialen, dan is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{6.1}$$



In bijgaande figuur ($OC = 1$) geldt de dubbele ongelijkheid:

opp. driehoek $OAB <$ opp. sector $OCB <$ opp. driehoek OCD

of uitgedrukt als functie van de boog x (x in radialen):

$$\frac{\sin x \, \cos x}{2} < \pi \left(\frac{x}{2\,\pi}\right) < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Na deling door $\dfrac{\sin x}{2} (> 0)$ volgt

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

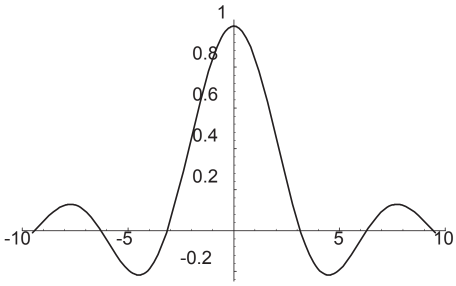
en bij limietovergang voor $x \to 0$ verkrijgt men

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \leq 1,$$

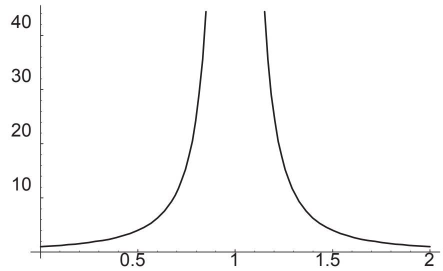
zodat

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

en dus ook (6.1).



3. Voor $f(x) = 1/(x-1)^2$ in $x = 1$ bestaat er geen enkel getal b waarvoor, voor om het even welke ϵ en bijhorende δ, de limiet-definitie geldig is. Als x dicht genoeg gekozen wordt bij 1, dan is $f(x)$ immers groter dan $b + \epsilon$.



□

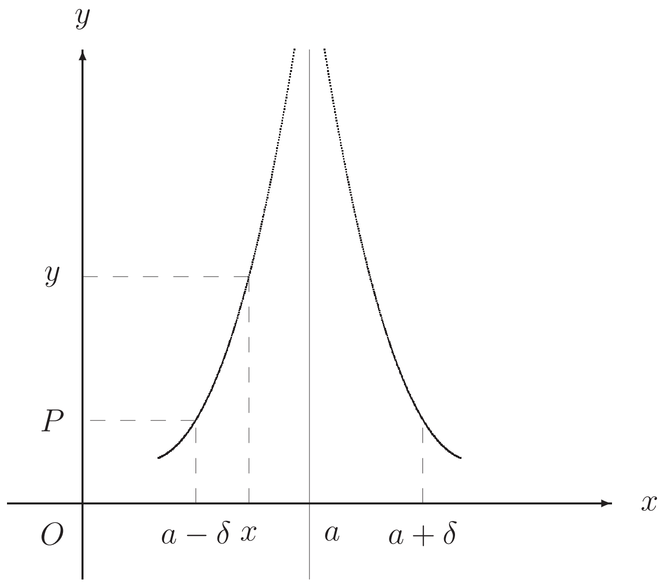
Het laatste voorbeeld geeft aan dat er niet steeds een reëel getal b kan gevonden worden. Inderdaad, in $x = 1$ neemt de functie $f(x) = 1/(x-1)^2$ onbeperkt toe.

Wiskundig wordt dit uitgedrukt als: voor elk willekeurig positief reëel getal P kan er een positief reëel getal δ gevonden worden waarvoor $\{x \mid |x - a| < \delta\} \subset \operatorname{def}(f)$ en

$$f(x) > P \qquad \text{zodra} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Als $f(x)$ onbeperkt toeneemt in a, dan wordt dit genoteerd als

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$



Vanzelfsprekend bestaan er ook functies die onbeperkt afnemen in een punt a. Dit wordt dan genoteerd als

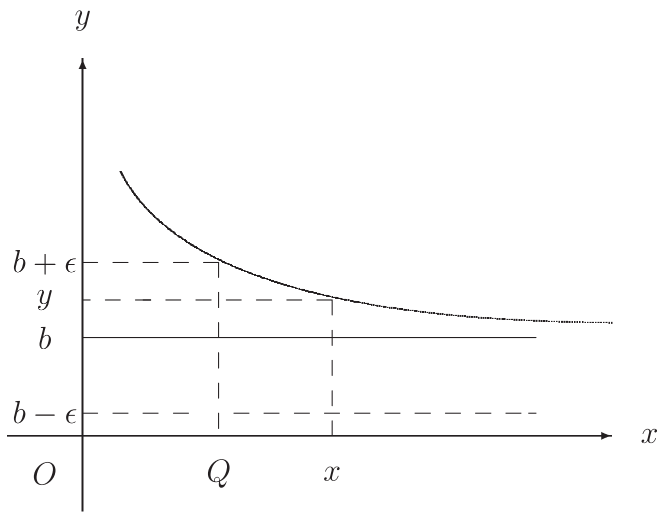
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

6.1.2 De limiet van een functie op $+\infty$ en $-\infty$

Gegeven de functie $f(x)$ met definitiegebied $\mathrm{def}(f)$. Men noemt b de limiet van $f(x)$ als x onbeperkt toeneemt (d.w.z. in $+\infty$) indien $f(x)$ willekeurig dicht bij b ligt zodra x voldoende groot is.

Wiskundig wordt dit uitgedrukt als: voor elk willekeurig klein positief reëel getal ϵ kan er een positief reëel getal Q gevonden worden waarvoor $\{x \mid x > Q\} \subset \mathrm{def}(f)$ en

$$|f(x) - b| < \epsilon \qquad \text{zodra} \qquad x > Q.$$



Als b de limiet is van $f(x)$ in $+\infty$, dan noteert men dit als

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Op analoge wijze wordt de limiet van een functie in $-\infty$ gedefinieerd.

Opnieuw kan het gebeuren dat een functie onbeperkt toe- of afneemt bij toe- of afnemende x. In dit geval komt men tot de notaties

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

In het vervolg zal, wanneer $+\infty$ en/of $-\infty$ wordt bedoeld, dikwijls gebruik gemaakt worden van de notatie $\pm\infty$ (zoals in de vakantiecursus). We zullen ook in plaats van $+\infty$ soms gewoon ∞ schrijven. (Let op: in sommige bronnen wordt, wanneer $+\infty$ en/of $-\infty$ wordt bedoeld, gebruik gemaakt van de notatie ∞.)

6.2 Linker- en rechterlimieten

Vervangt men in de bovenstaande definities overal $0 < |x - a| < \delta$ door $a < x < a + \delta$, dan spreken we niet langer van de limiet van $f(x)$ in a, maar van de *rechterlimiet* van $f(x)$ in a.

Dit leidt tot de notaties

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = -\infty.$$

Vervangt men anderzijds $0 < |x - a| < \delta$ overal door $a - \delta < x < a$, dan bekijken we de *linkerlimiet* van $f(x)$ in a.

Dit leidt tot de notaties

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = b, \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = -\infty.$$

Indien linker- en rechterlimiet beide bestaan, dan hoeven ze uiteraard niet gelijk te zijn. Indien ze gelijk zijn, dan bestaat de limiet.

Voorbeeld 6.2.1

Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Het definitiegebied is $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. We vinden

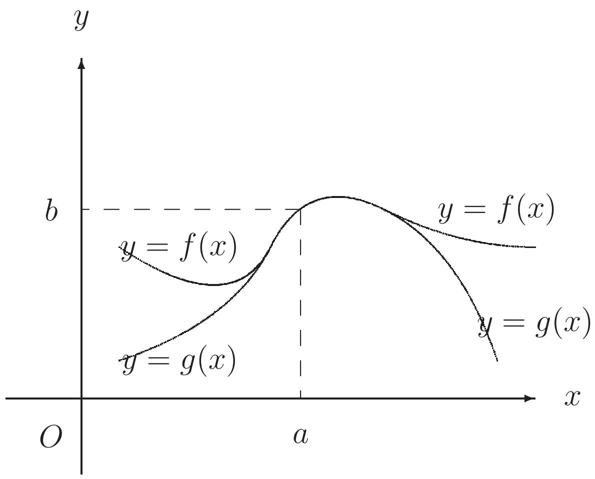
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty\,.$$

Linker- en rechterlimiet zijn verschillend, zodat de limiet van f in $x = 1$ niet bestaat. $\square$

6.3 Eigenschappen van limieten

6.3.1 Algemeen

Stelling 6.3.1 *Onderstel dat $f(x) = g(x)$ voor alle x die behoren tot de verminderde omgeving $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, die een deelverzameling is van de definitiegebieden van f en g. Als $\lim_{x\to a} f(x)$ bestaat, dan bestaat ook $\lim_{x\to a} g(x)$ en bovendien is $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.* □



Voorbeeld 6.3.1

Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. Dan is $\mathrm{def}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Voor $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ is $f(x) = g(x)$ met $g(x) = x+1$. Derhalve is

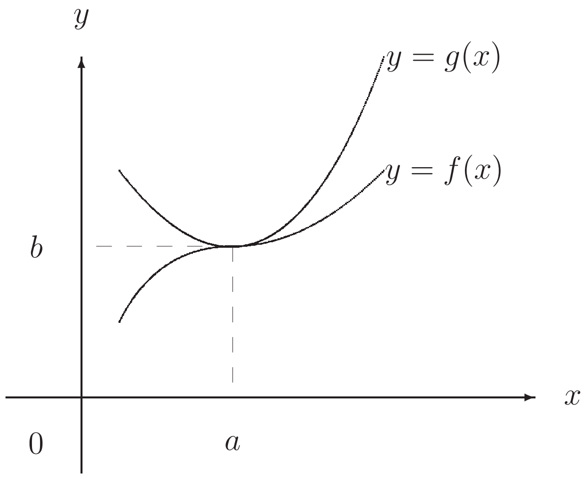
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

□

Stelling 6.3.2 *Onderstel dat $f(x) \le g(x)$ voor alle x die behoren tot de verminderde omgeving $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, die een deelverzameling is van de definitiegebieden van f en g. Als $\lim_{x\to a} f(x)$ en $\lim_{x\to a} g(x)$ beide bestaan en eigenlijk zijn, is*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

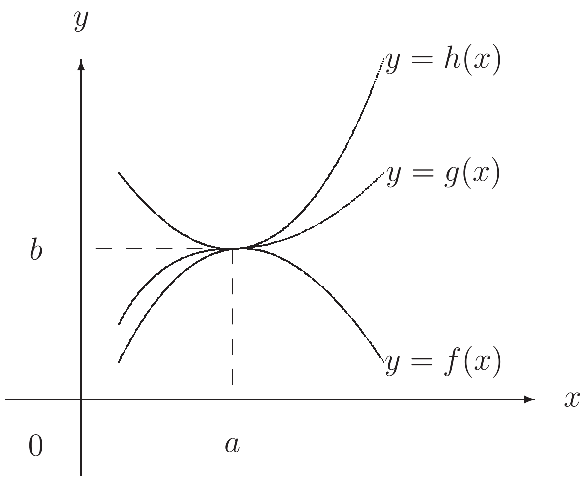
□



Stelling 6.3.3 *Onderstel dat $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle x die behoren tot de verminderde omgeving $]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, die een deelverzameling is van de definitiegebieden van f, g en h. Als $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$, dan is ook*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

□



Stelling 6.3.4 *Zij w een eigenlijke of oneigenlijke waarde van x, en zij $\lim\limits_{x\to w} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to w} g(x)$ eigenlijk, dan gelden volgende eigenschappen:*

1. $\lim\limits_{x\to w}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to w} f(x) \pm \lim\limits_{x\to w} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to w}(f(x)\, g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to w} f(x)\right) \left(\lim\limits_{x\to w} g(x)\right)$
3. $\lim\limits_{x\to w}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to w} f(x)\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$
4. $\lim\limits_{x\to w} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to w} f(x)}$

5. $\displaystyle \lim_{x\to w} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{\lim\limits_{x\to w} f(x)}{\lim\limits_{x\to w} g(x)} & \textit{als } \lim\limits_{x\to w} g(x) \neq 0. \\ \pm\infty & \textit{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) \neq 0,\ \lim\limits_{x\to w} g(x) = 0 \textit{ en } \lim\limits_{x\to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} \textit{ bestaat.} \\ ? & \textit{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) = \lim\limits_{x\to w} g(x) = 0\,. \end{cases}$

6. $\displaystyle \lim_{x\to w} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \textit{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to w} g(x) < 0 \\ & \quad \textit{en } \lim\limits_{x\to w} f(x)^{g(x)} \textit{ bestaat.} \\ ? & \textit{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) = \lim\limits_{x\to w} g(x) = 0\,, \\ \left(\lim\limits_{x\to w} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to w} g(x)\right)} & \textit{in alle andere gevallen.} \end{cases}$

7. $\displaystyle \lim_{x\to w} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x\to w} f(x)} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

8. $\displaystyle \lim_{x\to w} \log_a f(x) = \log_a \left(\lim_{x\to w} f(x)\right)$ *(mits beide leden bestaan)*

□

Belangrijk gevolg

Stel dat $f(x)$ berekend wordt d.m.v. een eindig aantal optellingen, aftrekkingen, vermenigvuldigingen, delingen en worteltrekkingen, dan geldt

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

op voorwaarde dat er een omgeving $]a-\delta,\ a+\delta[$ bestaat waarvoor f gedefinieerd is. Dezelfde opmerking kan geformuleerd worden voor linker- en rechterlimiet.

6.3.2 Stellingen i.v.m. oneigenlijke limieten

Stelling 6.3.5

1. $\displaystyle \lim_{x\to w} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to w}(-f(x)) = -\infty.$
2. *Hebben één of meerdere termen van een som de limiet $+\infty$ en heeft elke andere term een limiet verschillend van $-\infty$, dan heeft de som de limiet $+\infty$. Een analoge stelling geldt voor $-\infty$.*
3. *Hebben één of meerdere factoren van een product de limiet $+\infty$ en heeft elke andere factor een limiet verschillend van 0, dan heeft het product de limiet $+\infty$. Hebben een oneven aantal factoren van een product de limiet $-\infty$ en heeft elke andere factor een limiet verschillend van 0, dan heeft het product de limiet $-\infty$. Hebben een even positief aantal factoren van een product de limiet $-\infty$ en heeft elke andere factor een limiet verschillend van 0, dan heeft het product de limiet $+\infty$.*

4. $\lim\limits_{x\to w} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to w} (f(x))^n = +\infty \; (n \in \mathbb{N}_0)$.

5. $\lim\limits_{x\to w} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to w} (f(x))^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ even} \\ -\infty & n \text{ oneven} \end{cases}$

6. $\lim\limits_{x\to w} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to w} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty \; (n \in \mathbb{N}_0)$.
   $\lim\limits_{x\to w} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to w} \sqrt[n]{f(x)} = -\infty \; (n \text{ oneven})$.

7. $$\lim_{x\to w} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) = \pm\infty,\ \lim\limits_{x\to w} g(x) \neq \pm\infty \\ & \quad \text{en } \lim\limits_{x\to w} \dfrac{f(x)}{g(x)} \text{ bestaat} \\ 0 & \text{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) \in \mathbb{R} \text{ en } \lim\limits_{x\to w} g(x) = \pm\infty \\ ? & \text{als } \lim\limits_{x\to w} f(x) = \lim\limits_{x\to w} g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

8. *Uit* $\lim\limits_{x\to w} a^{f(x)} = \exp\left((\ln a) \lim\limits_{x\to w} f(x)\right)$ *volgt:*
   $$\lim_{x\to w} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to w} a^{f(x)} = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 0 & 0 < a < 1 \end{cases}$$
   $$\lim_{x\to w} f(x) = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to w} a^{f(x)} = \begin{cases} 0 & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

9. *Stel dat de logaritmische functies gedefinieerd zijn, dan volgt uit*
   $$\lim_{x\to w} \log_a f(x) = (\ln a)^{-1} \lim_{x\to w} \ln f(x):$$
   $$\lim_{x\to w} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to w} \log_a f(x) = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ -\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$
   $$\lim_{x\to w} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to w} \log_a f(x) = \begin{cases} -\infty & a > 1 \\ +\infty & 0 < a < 1 \end{cases}$$

10. *Uit* $\lim\limits_{x\to w} f(x)^{g(x)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to w} g(x) \lim\limits_{x\to w} \ln f(x)\right)$ *volgt:*
   $$\lim_{x\to w} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to w} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \pm\infty & \lim\limits_{x\to w} g(x) > 0 \\ 0 & \lim\limits_{x\to w} g(x) < 0 \\ ? & \lim\limits_{x\to w} g(x) = 0 \end{cases}$$
   $$\lim_{x\to w} f(x) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to w} f(x)^{g(x)} = ? \text{ als } \lim_{x\to w} g(x) = \pm\infty$$

$\square$

6.3.3 Onbepaaldheden

Als we de voorgaande stellingen en eigenschappen overlopen, dan stellen we vast dat er nog gevallen zijn waarin het resultaat nog niet vast ligt.

Deze gevallen kunnen we catalogeren als

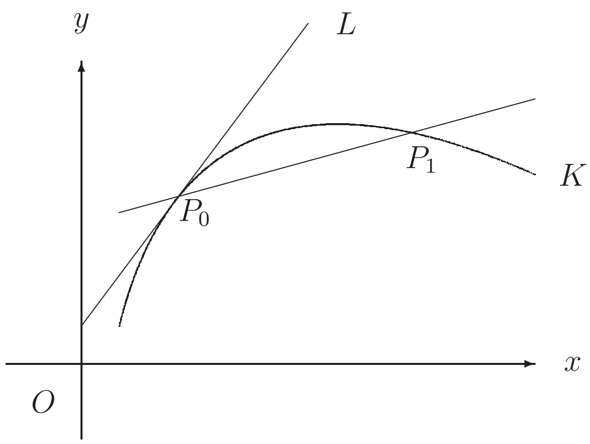
$$\frac{0}{0} \qquad \text{of} \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \text{of} \qquad \pm\infty \cdot 0 \qquad \text{of} \qquad +\infty - \infty$$

Voor deze gevallen kunnen we voorlopig nog geen oplossing vinden.

6.4 Raaklijnen

We beschouwen een rechthoekig assenkruis. Beschouw de rechte P_0P_1 die twee punten $P_0(x_0,\, f(x_0))$ en $P_1(x_1,\, f(x_1))$ van de kromme K, die correspondeert met de functie $y = f(x)$, verbindt. Deze rechte heeft als vergelijking

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0).$$



Indien we veronderstellen dat P_0 vast is en P_1 een punt is dat langs K beweegt naar P_0 toe, dan zal de rechte P_0P_1 meebewegen. De limietstand L van deze rechte als P_1 onbeperkt naar P_0 nadert is de *raaklijn van* K *in* P_0. De vergelijking van deze rechte is

$$y = f(x_0) + \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0).$$

Voorbeeld 6.4.1

De raaklijn in $(0, 0)$ aan de kromme met vergelijking $y = \sin x$ wordt gegeven door $y = x$. Gebruik makend van formule (6.1) volgt dit uit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1.$$

□

In ieder punt van de kromme met vergelijking $y = f(x)$ kan zo de raaklijn bepaald worden. Deze raaklijnen kunnen een hulp zijn voor het schetsen van het verloop van een functie. Dit is zeker het geval voor *asymptoten*. We onderscheiden drie soorten.

6.4.1 Horizontale asymptoot

Een functie $y = f(x)$ bezit een *horizontale asymptoot* $y = b$ met $b \in \mathbb{R}$ indien

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{of} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

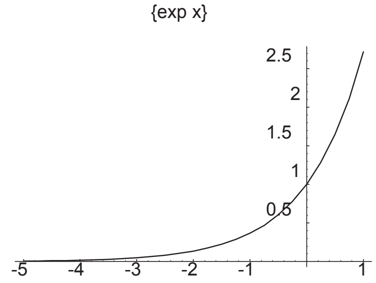
Een horizontale asymptoot is dus een raaklijn aan $y = f(x)$ in $x = -\infty$ of $x = +\infty$.

Voorbeeld 6.4.2

De functie $y = \exp(x)$ bezit een horizontale asymptoot $y = 0$, vermits

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0.$$

Vermits $\exp(x) > 0$ ligt de functie boven de asymptoot.



□

6.4.2 Verticale asymptoot

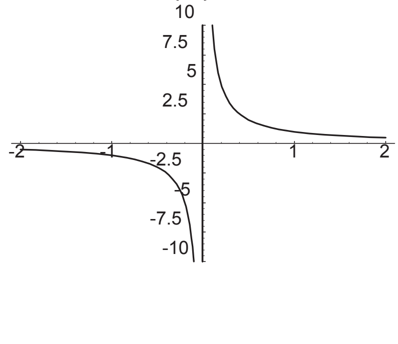
Een functie $y = f(x)$ bezit een *verticale asymptoot* $x = a$ met $a \in \mathbb{R}$ indien

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \pm\infty.$$

Om verticale asymptoten op te sporen moet men dus zoeken in punten waar de functie niet gedefinieerd is.

Voorbeeld 6.4.3

De functie $y = \dfrac{1}{x}$ bezit een verticale asymptoot $x = 0$. De functie $\dfrac{\sin x}{x}$ daarentegen bezit geen verticale asymptoot.



□

6.4.3 Schuine asymptoot

Een functie $y = f(x)$ bezit een *schuine asymptoot* $y = a\,x + b$ met $a,\, b \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ indien

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (a\,x+b) = 0 \quad \text{of} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - (a\,x+b) = 0.$$

Een schuine asymptoot is dus een raaklijn aan $y = f(x)$ in $x = -\infty$ of $x = +\infty$. De coëfficiënten a en b worden als volgt bepaald: als er een schuine asymptoot zou zijn in $x = +\infty$, dan zal

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (a\,x+b) = 0,$$

m.a.w. er bestaat een functie $y = g(x)$ zodat $f(x) = g(x) + (a\,x+b)$ met $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Hieruit volgt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x} + a + \frac{b}{x} \right) = a.$$

Is $a \in \mathbb{R}$, dan bezit de functie een schuine asymtoot in $+\infty$. Nu a gevonden is volgt b uit

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - a\,x\right).$$

Voorbeeld 6.4.4

De functie $y = \sqrt{x^2+1}$ bezit de schuine asymptoten $y = x$ en $y = -x$, gezien

- in $x = +\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$$
en
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - x &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0, \end{aligned}$$

- in $x = -\infty$:
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$$
en
$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0, \end{aligned}$$

In beide gevallen ligt de functie boven de schuine asymptoten. □

6.5 Continuïteit van een functie in een punt

Een functie met vergelijking $y = f(x)$ is *continu* in het punt $x_0 \in \text{def}(f)$ indien

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.2}$$

Indien $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ niet bestaat of indien (6.2) niet geldt wordt $y = f(x)$ *discontinu* genoemd in x_0.

Stellen we $x = x_0 + h$, dan zal $h \to 0$ als $x \to x_0$. Als $y = f(x)$ continu is in het punt x_0, dan zal de *aangroeiing* van y nul zijn als de aangroeiing h van x vanuit x_0 onbeperkt tot nul nadert:

$$\lim_{h \to 0} \left(f(x_0 + h) - f(x_0)\right) = 0.$$

Net zoals er sprake is van een linker- of een rechterlimiet is er ook sprake van links- en rechtscontinu zijn (vervang de limiet in (6.2) door de corresponderende linker- of rechterlimiet).

Voorbeeld 6.5.1

1. Veeltermfuncties zijn continu in elk punt van $\mathbb{R}$.
2. Rationale functies zijn continu in elk punt van $\mathbb{R}$ waarvoor de noemer verschillend is van 0.
3. $y = \sqrt{x}$ is continu in $]0, +\infty[$ en rechtscontinu in $x = 0$.
4. De functies $y = \sin x$ en $y = \cos x$ zijn continu in elk punt van $\mathbb{R}$.
5. De functie $y = \operatorname{tg} x$ is continu in $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
6. Beschouw de functie $y = f(x)$ met

$$f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Vermits $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0 \neq f(0)$ is $y = f(x)$ discontinu in $x = 0$.

□

6.6 Ophefbare discontinuïteiten

Beschouw de functie $y = f_1(x)$ met $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Deze functie is discontinu in $x = 0$, maar $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ bestaat en $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Voor deze functie $y = f_1(x)$ kunnen we een continue extensie $y = f_2(x)$ creëren die de *discontinuïteit opheft*:

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

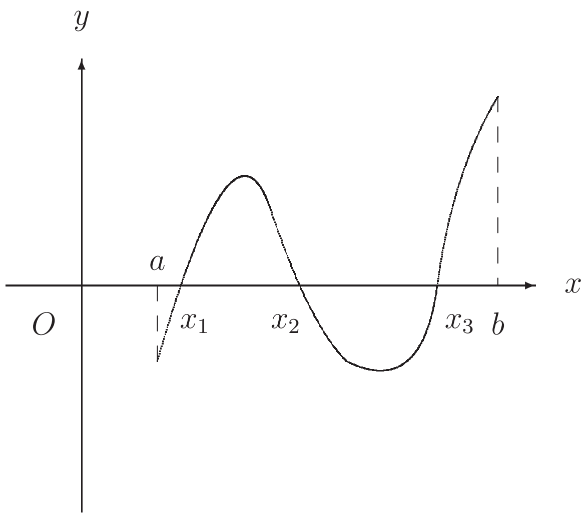
6.7 Continuïteit van een functie in een interval

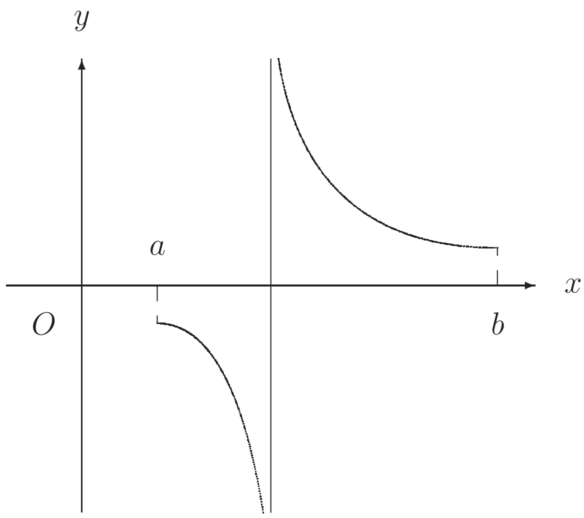
Men zegt dat $y = f(x)$ continu is in het open interval $]a, b[$ als ze continu is in elk punt van het interval. Men zegt dat $y = f(x)$ continu is in het gesloten interval $[a, b]$ als ze continu is in $]a, b[$, als ze rechtscontinu is in a en linkscontinu in b.

6.8 Belangrijke stellingen

Stelling 6.8.1 *(Bolzano) Is de functie $y = f(x)$ continu in het gesloten interval $[a, b]$ en hebben $f(a)$ en $f(b)$ verschillende tekens, dan heeft de functie ten minste één nulpunt in het open interval $]a, b[$.* □

Een voorbeeld en een “tegenvoorbeeld”:



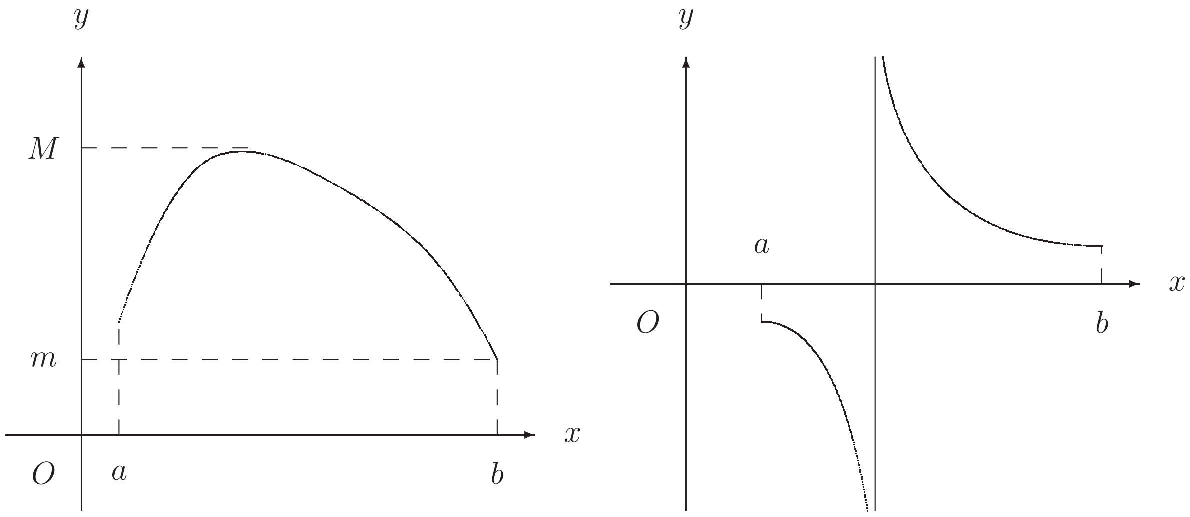


Gevolg 6.8.1

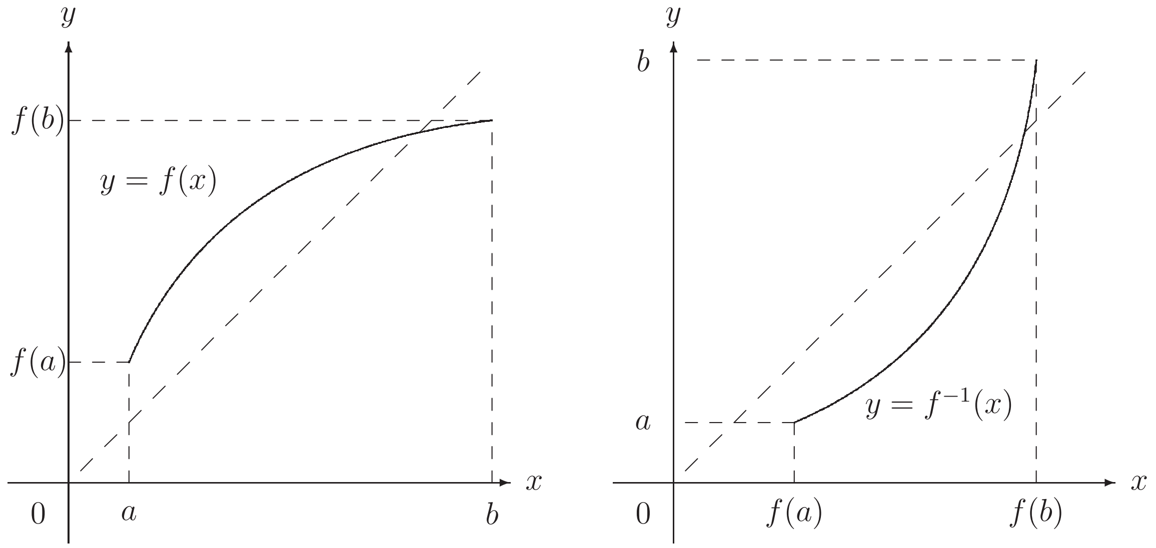
> Is de functie $y = f(x)$ continu in het gesloten interval $[a, b]$ en is $f(a) \neq f(b)$, dan neemt $f(x)$ ten minste éénmaal elke waarde aan die ligt tussen $f(a)$ en $f(b)$. □

Stelling 6.8.2 *(Weierstraß) Is de functie $y = f(x)$ continu in het gesloten interval $[a, b]$, dan bereikt $y = f(x)$ een maximum en een minimum in $[a, b]$.* □

Een voorbeeld en een "tegenvoorbeeld":



Stelling 6.8.3 *Is $y = f(x)$ een continue monotoon stijgende functie die een bijectie is van $[a, b]$ op $[f(a), f(b)]$, dan is $y = f^{-1}(x)$ een continue monotoon stijgende functie die een bijectie is van $[f(a), f(b)]$ op $[a, b]$ (analoog voor monotoon dalende functies).* □



Bij de berekening van limieten kan men vaak gebruik maken van de volgende stelling.

Stelling 6.8.4 *Is $y = g(x)$ continu in b en $\lim\limits_{x \to w} f(x) = b$, dan is*

$$\lim_{x \to w} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to w} f(x)\right).$$

□

Deze stelling drukt uit dat in vele gevallen de volgorde van limiet en functie mag gewijzigd worden.