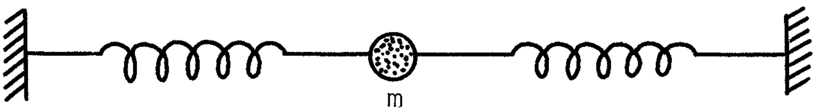
HOOFDSTUK IV : DE DYNAMICA VAN TRILLINGSBEWEGINGEN

IV.1 ONGEDEMPTE EN GEDEMPTE TRILLINGSBEWEGING



Figuur IV. 1

In Hoofdstukken I en III werd het probleem van de ongedempte trilling reeds behandeld. Een dergelijk systeem van een massa m die een terugroepende kracht (Hooke, F = -kx) ondergaat, noemt men ook wel een harmonische oscillator. Deze wordt gekenmerkt door een periode T_0, een pulsatie ω_0 en frequentie $\nu_0 = \omega_0/2\pi$. Deze parameters worden bepaald door de eigenschappen van het systeem en de frequentie (met index 0) wordt dan ook natuurlijke, karakteristieke of eigenfrequentie ν_0 van de oscillator genoemd (zie (1.40) of (3.31)) :

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{T_0} \tag{4.1}$$

Zoals in Hoofdstuk III besproken, gaat het hier om een conservatief systeem waarvoor de wet van behoud van mechanische energie geldt. In de praktijk zijn er naast de terugroepende krachten altijd dempende krachten aanwezig. Deze dempende krachten zijn het gevolg van de wrijving waarbij mechanische energie omgezet wordt in warmte. Als voorbeeld van dempende krachten vermelden we de wrijving met de lucht. Het is een welbekend feit dat een slinger door wrijving met de lucht zal stilvallen. De dempingskrachten zijn afhankelijk van de snelheden van het beschouwde deeltje en zijn, voor wat de zin betreft, tegengesteld aan deze snelheid. In eenvoudige gevallen vindt men met goede benadering dat deze dempingskrachten voor niet te grote snelheden evenredig zijn met de snelheid v, dus $\vec{F} = -\alpha\ \vec{v}$. De arbeid per tijdseenheid door de dempingskracht geleverd is steeds negatief :

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\alpha \frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt} < 0 \tag{4.2}$$

Voor een rechtlijnige trillingsbeweging met demping leert de tweede wet van Newton dat

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha v \qquad \text{met} \qquad v = \frac{dx}{dt} \tag{4.3}$$

Hieruit volgt :

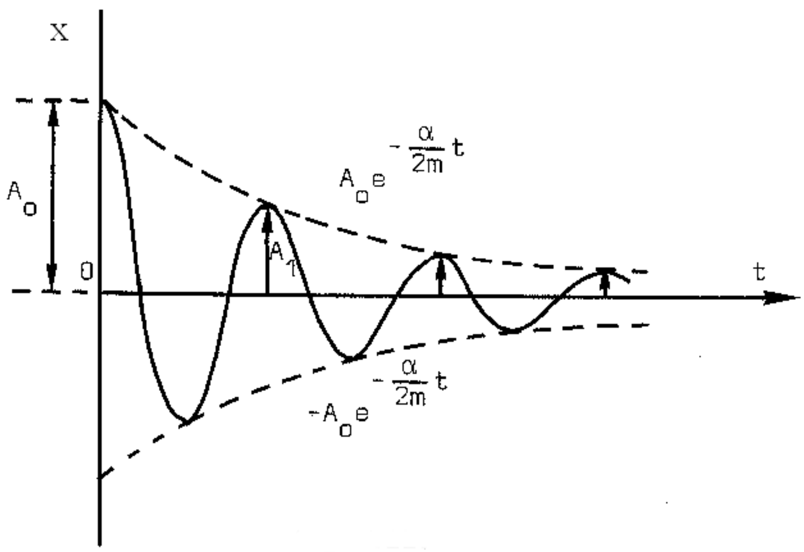
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{4.4}$$

De oplossing van deze vergelijking kan geschreven worden als

$$x = A_0 e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\cos(\omega t + \phi) \tag{4.5}$$

met

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4mk}} \qquad \text{en} \qquad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{4.6}$$



Figuur IV. 2

Deze oplossing onderstelt dat 4mk > α^2. Fysisch betekent dit dat de demping niet te sterk mag zijn. In uitdrukking (4.5) zijn A_0 en ϕ twee arbitraire constanten die nog te bepalen zijn uit de beginvoorwaarden. Van een dergelijke trillingsbeweging kan men zeggen dat het een harmonische trilling is met afnemende amplitude. De periode T van deze harmonische trilling is groter dan T_0, de periode zonder demping. Bij de studie van dergelijke trillingen definieert men het logaritmisch decrement δ als de logaritme van de verhouding van twee opeenvolgende maximale uitwijkingen A_{n-1} en A_n **:**

$$\delta = \ln \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{\alpha T}{2m} \tag{4.7}$$

Bij sterke demping waarvoor $\alpha^2 > 4mk$ heeft de oplossing niet het karakter van een trilling. De massa m gaat dan rechtstreeks naar zijn eindstand zonder deze te overschrijden. Bij $\alpha^2 = 4mk$ wordt deze eindstand het vlugst bereikt en men zegt dat het systeem kritiek gedempt is.

IV.2 GEDWONGEN TRILLINGEN

Wanneer een periodieke kracht inwerkt op een lichaam dat elastisch gebonden is, geeft dit aanleiding tot een gedwongen trilling. Hiervan zijn talrijke voorbeelden bekend. Een draaiende motor, die periodieke krachten veroorzaakt, kan trillingen veroorzaken in zijn omgeving. Het eenvoudigste geval van gedwongen trilling dat zich kan voordoen, is dit ten gevolge van een harmonische kracht $F_0 \cos \omega t$. De bewegingsvergelijking is **:**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{4.8}$$

In de wiskunde leert men dat de algemeenste oplossing van deze vergelijking kan geschreven worden als de som van de algemeenste oplossing van de homogene vergelijking (4.4) en van een particuliere oplossing van deze vergelijking (4.8) zelf. De algemeenste oplossing van (4.4) stelt een gedempte beweging voor en zal bij voldoende lange inwerking van $F_0 \cos\omega t$ volledig verdwenen zijn. We zoeken daarom als oplossing van het vraagstuk een oplossing die zuiver periodiek is met periode $T = 2\pi/\omega$ en die een particuliere oplossing is van (4.8). We stellen dan een oplossing van de volgende vorm voor :

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{4.9}$$

De berekening van A en ϕ gebeurt als volgt : uit (4.8) en (4.9) komt er **:**

$$\begin{aligned} &-m\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) - A\omega\alpha\sin(\omega t+\phi) + kA\cos(\omega t+\phi) = F_0\cos\omega t \\ &\cos(\omega t+\phi) = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi \\ &\sin(\omega t+\phi) = \sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi \end{aligned} \tag{4.10}$$

Hieruit volgt dan :

$$\begin{aligned}&(k - m\omega^2)A(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi) - \\ &A\omega\alpha(\sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi) = F_0\cos\omega t\end{aligned} \tag{4.11}$$

Hieraan moet voldaan zijn op alle tijdstippen, dit betekent dat na verzamelen van alle termen met cosωt en alle termen met sinωt de respectievelijke coëfficiënten identiek moeten gelijk zijn aan nul. Er komt :

$$\begin{aligned}&[(k - m\omega^2)\cos\phi - \omega\alpha\sin\phi]A = F_0 \\ &[-(k - m\omega^2)\sin\phi - \omega\alpha\cos\phi]A = 0\end{aligned} \tag{4.12}$$

Gelet op $\omega_0^2 = k/m$ volgt hieruit

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{-\omega\alpha}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{4.13}$$

Voor de amplitude A volgt er dan :

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\phi - \omega\alpha\sin\phi} = \frac{F_0 / \cos\phi}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega\alpha\,\mathrm{tg}\phi} \tag{4.14}$$

Gelet op :

$$\frac{1}{\cos^2\phi} = 1 + \mathrm{tg}^2\phi \tag{4.15}$$

volgt hieruit :

$$\frac{1}{\cos\phi} = \pm\sqrt{1 + \frac{\omega^2\alpha^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \tag{4.16}$$

Tenslotte komt er

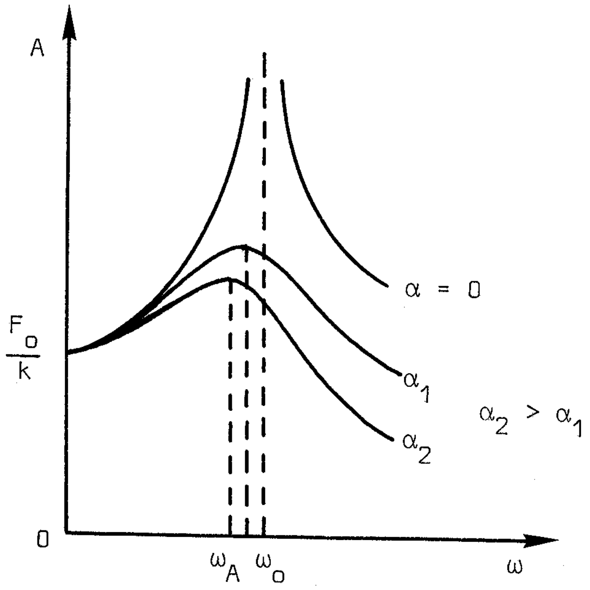
$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \alpha^2\omega^2}} \tag{4.17}$$

De grootheid A wordt schematisch weergegeven als functie van de pulsatie ω in Fig. IV.3.

Voor de amplitude A is er een maximum in de omgeving van $\omega = \omega_0$**.**

De exacte waarde voor de pulsatie bij het maximum bedraagt

$$\omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{2m^2}} \tag{4.18}$$



Figuur IV. 3

Bij $\omega = \omega_A$ is ook de kinetische energie van de oscillator maximaal. Men zegt dat er energie-resonantie is. Bij deze frequentie zijn de snelheid dx/dt en de inwerkende kracht in fase. Dit is de gunstigste voorwaarde voor overdracht van energie aan de oscillator. Het aan de oscillator geleverd vermogen is immers gelijk aan $\vec{F} \cdot \vec{v}$ en in deze situatie is dit altijd positief.

Opmerking

De in de vorige paragrafen ontwikkelde theorie over gedempte en gedwongen trillingen is ook van toepassing op elk fysisch systeem dat door vergelijkingen van de vorm (4.4) of (4.8) kan beschreven worden. Als interessant voorbeeld vermelden we de elektrische ketens met wisselspanning.

Nuttige Applets/Websites

http://www.walter-fendt.de/ph14nl/resonance_nl.htm
http://www.ketchum.org/tacomacollapse.html

Vraagstukken

1. Een lichaam met massa m = 4 kg ondergaat een kracht $F = -\frac{\pi^2}{16}x$ Newton. Op het tijdstip t = 2 s gaat het deeltje door O (x=0). De snelheid op het ogenblik t = 4 s

bedraagt 4 ms^{-1}. Geef de vergelijking van de uitwijking x als functie van de tijd en bereken de amplitude.

($x = 14,4 \sin\left(\frac{\pi}{8} t - \frac{\pi}{4}\right)$).

2. Een lichaam oscilleert volgens $x = 6,0 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ meter. Vind :

a) de verplaatsing, snelheid en versnelling op t = 2s

b) de periode en de frequentie

c) teken x, v en a op t = 2s

(a) 3m, $-9\pi\sqrt{3}\ ms^{-1}$, -27 $\pi^2 ms^{-2}$

b) $\frac{2}{3}$ s, 1,5 s^{-1})

3. Een deeltje met massa 1g trilt harmonisch met een amplitude van 2 mm, de versnelling in een keerpunt is 8,0 $10^3\ ms^{-2}$. Bereken de frequentie en de snelheid bij doorgang door de evenwichtsstand. Druk de kracht op het deeltje uit als functie van de plaats en als functie van de tijd.

($10^3/\pi\ s^{-1}$, 4 ms^{-1}, -4.10^3 x N, -8 sin (2.10^3t + α) N).

4. Bepaal de vergelijking van de baan van de resulterende beweging van twee onderling loodrechte bewegingen gegeven door x = 4 sin ωt en y = 3 sin (ωt + α) voor α = 0, π/2, π. Teken de baan. Construeer ook de baan grafisch.

5. Een stalen kogel (m = 16 g) valt verticaal in een cilinder gevuld met olie, men stelt vast dat de limietsnelheid 0,60 ms^{-1} is. Dezelfde kogel wordt vastgehecht aan een veer met k = 7,5 Nm^{-1}, ondergedompeld in de cilinder en tot oscilleren gebracht. Vind de hoekfrequentie wanneer het stelsel zou trillen in afwezigheid van de olie en de algemene uitdrukking van de uitwijking x(t). Neem aan dat de viskeuze kracht evenredig is met v_L.

(ω = 21,65 rad s^{-1}, ω_{olie} = 20,05 rad/sec, x = A $e^{-8,175t}$ cos (20,05 t)).

6. Een lichaam, massa m = 100 g, is opgehangen aan een lange verticale spiraalveer. Men trekt het lichaam naar beneden en men brengt het 10 cm uit zijn evenwichtsstand; losgelaten gaat het vibreren om zijn evenwichtspositie met een periode van 2 s.

1) Wat is de snelheid als het lichaam passeert door het evenwichtspunt ?

2) Wat is de versnelling als het passeert door een punt 5 cm boven de evenwichtspositie ?

3) Hoeveel tijd is er nodig om, tijdens de opwaartse beweging vanuit 5 cm onder het evenwichtspunt, 5 cm erboven te komen ?
4) Hoeveel zal de veer verkorten als het lichaam verwijderd wordt ?

(1) 0,314 ms^{-1} 2) -0,05 π^2 3) 0,33 s 4) 0,99 m).