Hoofdstuk 3

Euleriaanse en Hamiltoniaanse Grafen

3.1 Inleiding

Euleriaanse grafen staan aan de wieg van de grafentheorie, zoals we vroeger reeds opgemerkt hebben. Het probleem betrof het stadje Königsberg, een havenstadje aan de kust tussen Polen en Litouwen (thans Kaliningrad genoemd, en geboorteplaats van David Hilbert), waar zeven bruggen de vier verschillende delen van het stadje verbonden. De inwoners zochten een wandeling die elke brug juist één keer aandeed en terugkeerde naar het vertrekpunt. Met andere woorden, indien de stadsdelen “toppen” zijn, en de bruggen op een natuurlijke manier “bogen”, dan werd een euleriaans circuit gezocht in deze multigraaf. Euler loste dit probleem op door te bewijzen dat zo een wandeling niet bestond.

Alleen al om deze historische reden verdienen euleriaanse grafen speciale aandacht. Maar euleriaanse grafen hebben ook tal van praktische toepassingen. Daarbij laten ze een aantal mooie theoretische karakteriseringen toe. Redenen genoeg dus om een hoofdstuk aan hen te wijden.

In één adem nemen we ook de hamiltoniaanse grafen mee, omdat de definitie gelijkaardig is, omdat ook deze tal van belangrijke praktische toepassingen hebben, en omdat ze ook enkele theoretische bespiegelingen toelaten, zij het niet zo karakteriserend als de euleriaanse grafen.

3.2 Euleriaanse grafen

3.2.1 Voorbeelden

We herhalen hier nog eens de relevante definities:

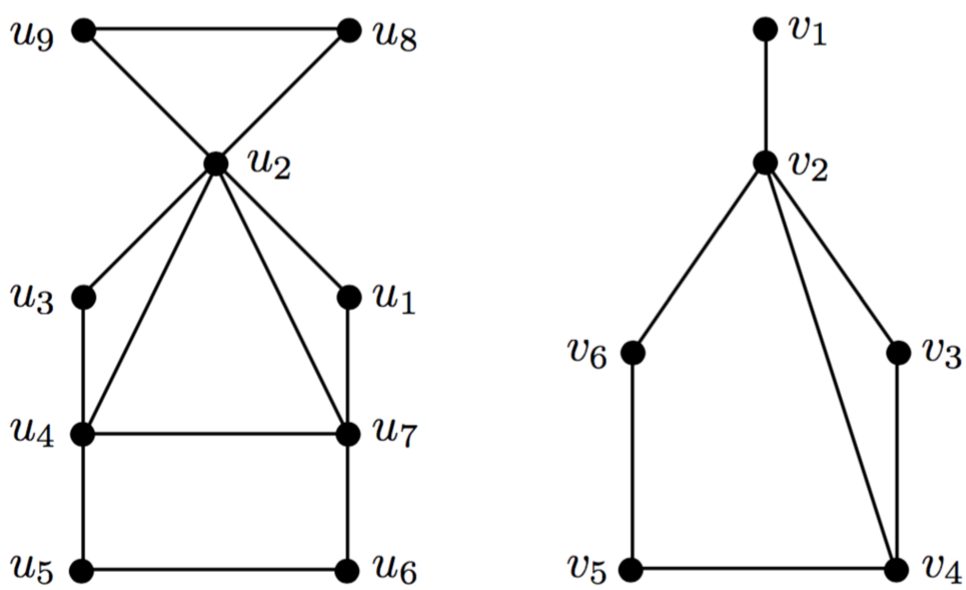
Definitie 3.2.1. Een **euleriaans spoor** in een samenhangende graaf Γ is een spoor dat elke boog van Γ bevat. Een **euleriaans circuit** is een gesloten spoor dat elke boog van Γ bevat. Een **euleriaanse graaf** is een graaf die een euleriaans circuit bevat.

Een graaf die een euleriaans spoor (of circuit) bevat, kan meer dan één dergelijk spoor (of circuit) bevatten.

Twee euleriaanse circuits in een euleriaanse graaf zijn equivalent wanneer de sequentie toppen van het ene circuit een cyclische permutatie is van de sequentie toppen van het andere circuit.

Voorbeeld 3.2.2. De graaf Γ_1 in figuur 3.1 is euleriaans, want hij heeft een euleriaans circuit, namelijk $C : u_1, u_2, u_8, u_9, u_2, u_3, u_4, u_2, u_7, u_4, u_5, u_6, u_7, u_1$. Uit stelling 3.2.4 zal volgen dat Γ_1 geen open euleriaans spoor bevat.

De graaf Γ_2 in figuur 3.1 heeft een euleriaans spoor $T : v_1, v_2, v_4, v_3, v_2, v_6, v_5, v_4$, maar geen euleriaans circuit (dit laatste zal volgen uit stelling 3.2.3). Deze graaf Γ_2 heeft ook een euleriaans spoor $T' : v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, v_6, v_5, v_4$, hetgeen verschilt van het spoor T aangezien de sequentie van toppen in beide sporen niet dezelfde is.



Figuur 3.1: Grafen Γ_1 en Γ_2 met een euleriaans spoor of een euleriaans circuit

Beschouw de volgende drie euleriaanse circuits in Γ_1:

$$C : u_1, u_2, u_8, u_9, u_2, u_3, u_4, u_2, u_7, u_4, u_5, u_6, u_7, u_1;$$
$$C' : u_1, u_2, u_7, u_4, u_2, u_8, u_9, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_1;$$
$$C'' : u_2, u_8, u_9, u_2, u_3, u_4, u_2, u_7, u_4, u_5, u_6, u_7, u_1, u_2.$$

De circuits C en C'' zijn equivalent, maar C' is niet equivalent met C noch met C''.

3.2.2 Karakteriseringen van euleriaanse grafen

Het is niet moeilijk om na te gaan wanneer een samenhangende graaf euleriaans is of een euleriaans spoor bevat. De volgende stelling was door Euler gekend, maar een volledig bewijs werd pas in 1873 door Hierholzer gegeven. Deze stelling levert een eenvoudige manier om te controleren of een samenhangende graaf euleriaans is.

Stelling 3.2.3. *Een samenhangende graaf* Γ *is euleriaans als en slechts als de graad van elke top even is.*

Bewijs. Veronderstel dat Γ een euleriaanse graaf is. Dan bevat Γ een euleriaans circuit C, dat begint en eindigt in een top v. We tonen aan dat elke top van Γ even graad heeft. Beschouw eerst een top $u \neq v$. Aangezien u noch de eerste noch de laatste top van C is, wordt de top u bij ieder voorkomen in C binnengekomen door een bepaalde boog en verlaten door een andere boog. M.a.w. ieder voorkomen van u in C draagt precies 2 bij tot de graad van u, zodat u even graad heeft. Voor de top v draagt elk van de voorkomens aan het begin en het einde van het circuit C precies 1 bij tot de graad van v, zodat dus ook de top v even graad heeft.

Omgekeerd, veronderstel dat elke top van Γ even graad heeft. We tonen aan dat Γ euleriaans is door een euleriaans circuit te construeren. Selecteer een top v van Γ en start een spoor T in v. We bouwen dit spoor zo ver mogelijk op, totdat we een top w bereiken zodanig dat de enige bogen incident met w reeds tot T behoren. We beweren dat $w = v$. Veronderstel dat $w \neq v$. Iedere keer als w optreedt in T vóór de laatste keer wordt één boog gebruikt om w binnen te komen en wordt een andere boog gebruikt om w te verlaten. De voorkomens van w in T vóór de laatste keer komen dus overeen met een even aantal bogen incident met w. Wanneer w echter voor de laatste keer in T optreedt, wordt slechts één boog incident met w gebruikt. M.a.w. het spoor T bevat een oneven aantal bogen incident met w. Aangezien w even graad heeft, moet er dus minstens één boog incident met w zijn die niet tot T behoort. Dit is in strijd met het feit dat alle bogen incident met w in T voorkomen. Dus, de bewering dat $w = v$ is correct, en T is dus eigenlijk een circuit. Als T alle bogen van Γ bevat, dan is T een euleriaans circuit en is Γ dus een euleriaanse graaf.

Veronderstel nu dat T niet alle bogen van Γ bevat. Aangezien Γ samenhangend is, bestaat er een top u in T die incident is met bogen die niet tot T behoren. Beschouw de graaf H bekomen door de bogen van T uit Γ te verwijderen. Aangezien T niet alle bogen van Γ bevat, is de graaf H niet-leeg. Bovendien is elke top van T incident met een even aantal bogen van T, zodat elke top in H ook even graad heeft. Zij H_1 de component van H die de top u bevat. Wanneer we een spoor T' in u beginnen, en dit zo ver mogelijk opbouwen, dan bekomen we net zoals voordien dat T' eindigt in u, zodat T' een circuit is. Wanneer we het circuit T' tussenvoegen in T op een plaats waar u voorkomt, dan bekomen we een circuit T_1 dat begint en eindigt in v, en dat meer bogen dan T bevat.

Als T_1 alle bogen van Γ bevat, dan is T_1 een euleriaans circuit en is Γ een euleriaanse graaf. In het andere geval, wanneer T_1 niet alle bogen van T bevat, dan herhalen we bovenstaande procedure totdat we een euleriaans circuit bekomen. □

Volgende stelling karakteriseert grafen die een open euleriaans spoor bevatten.

Stelling 3.2.4. *Een samenhangende graaf* Γ *bevat een open euleriaans spoor als en slechts als* Γ *precies twee toppen met oneven graad heeft. Bovendien begint het euleriaans spoor dan in één van de toppen met oneven graad en eindigt het in de andere top met oneven graad.*

Bewijs. Dat de voorwaarde nodig is, volgt uit de discussie in het bewijs van stelling 3.2.3 (eerste paragraaf). Omgekeerd, onderstel dat Γ precies twee toppen v, w heeft met oneven graad.

Indien v en w niet adjacent zijn, voegen we een boog b toe tussen v en w, en we verkrijgen een samenhangende graaf waarvan alle toppen even graad hebben. Er is dus een euleriaans circuit. Nemen we de boog b weg uit het circuit, dan hebben we een euleriaans spoor tussen v en w.

Indien v en w wel adjacent zijn, dan nemen we de boog vw weg en verkrijgen opnieuw een graaf waarvan alle toppen even graad hebben. Is deze graaf samenhangend, dan is er dus opnieuw een euleriaans circuit. Voegen we nu de boog vw weer toe, dan hebben we een euleriaans spoor tussen v en w door bijvoorbeeld eerst het circuit te doorlopen van v naar zichzelf, en dan de boog vw naar w. Is de graaf $\Gamma - vw$ niet samenhangend, dan bestaat deze uit twee samenhangende componenten, één die v bevat en één die w bevat. Elk van die componenten heeft een euleriaans circuit. Voegen we opnieuw de boog vw toe, dan hebben we een euleriaans spoor tussen v en w door eerst de eerste component te doorlopen van v naar zichzelf, vervolgens de boog vw te nemen, en tenslotte het circuit in de tweede component te doorlopen startend en eindigend in de top w. □

3.3 Hamiltoniaanse grafen

3.3.1 Eerste eigenschappen

In voorgaande paragrafen zagen we euleriaanse grafen, m.a.w. grafen met circuits die elke boog bevatten. In dit hoofdstuk beschouwen we grafen die cykels hebben die elke top bevatten, m.a.w. hamiltoniaanse grafen. We bespreken eigenschappen van hamiltoniaanse grafen, maar een eenvoudige praktische karakterisatie ontbreekt.

Zoals gezien in hoofdstuk 1 (zie definitie 1.6.20) is een graaf Γ een **hamiltoniaanse graaf** als Γ een opspannende cykel heeft; een dergelijke cykel wordt een **hamiltoniaanse cykel** genoemd.

Elke graaf die zelf een cykel is, is hamiltoniaans, evenals elke complete graaf met minstens 3 toppen. Anderzijds is geen enkele samenhangende graaf die scharniertoppen bevat, hamiltoniaans. Deze laatste observatie is een speciaal geval van de volgende stelling.

Stelling 3.3.1. *Als een graaf Γ hamiltoniaans is, dan is $k(\Gamma - S) \leq |S|$ voor elke niet-ledige eigenlijke deelverzameling S van $V(\Gamma)$.*

Bewijs. Zij Γ een hamiltoniaanse graaf, en zij S een niet-ledige eigenlijke deelverzameling van $V(\Gamma)$. Aangezien Γ hamiltoniaans is, bevat Γ een hamiltoniaanse cykel C die vertrekt uit een top van S. We mogen onderstellen dat $\ell := k(\Gamma - S) > 1$. Noem $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\ell$ de componenten van $\Gamma - S$. Zij u_i, voor $1 \leq i \leq \ell$, de laatste top van C die tot Γ_i behoort, en zij v_i de top die in C onmiddellijk op u_i volgt. Dan is noodzakelijkerwijs $v_i \in S$, voor $1 \leq i \leq \ell$, en $v_j \neq v_k$ voor $j \neq k$. Dus S bevat minstens evenveel toppen als er componenten in $\Gamma - S$ zijn, m.a.w. $k(\Gamma - S) \leq |S|$. □

De contrapositie van stelling 3.3.1 stelt dat wanneer een graaf Γ een niet-ledige eigenlijke deelverzameling S van toppen bevat waarvoor $k(\Gamma - S) > |S|$, dan Γ niet hamiltoniaans is. Niettegenstaande het feit dat stelling 3.3.1 kan gebruikt worden om voor bepaalde grafen aan te tonen dat ze niet hamiltoniaans zijn, volstaat ze niet voor alle niet-hamiltoniaanse grafen.

Bijvoorbeeld, er is geen niet-ledige eigenlijke deelverzameling S van de Petersen-graaf P (zie figuur 1.4) te vinden zodanig dat $k(P - S) > |S|$ (bewijs dit als oefening); nochtans is de Petersen-graaf niet hamiltoniaans, zoals in de volgende stelling aangetoond wordt.

Stelling 3.3.2. *De Petersen-graaf is niet hamiltoniaans.*

Bewijs. Een hamiltoniaanse cykel bestaat uit 10 bogen en 10 toppen die een tienhoek vormen. Er blijven dus nog vijf bogen over en daar elke top graad 3 heeft in de Petersen-graaf, zijn die vijf bogen eigenlijk vijf verschillende diagonalen die samen alle toppen van de tienhoek aandoen. Daar er geen vierhoeken en geen driehoeken zijn in de Petersen-graaf, verbinden de diagonalen punten op afstand 4 of 5 (gemeten in de tienhoek) van elkaar. Indien alle diagonalen punten op afstand 5 verbinden, dan krijgen we vierhoeken, dus minstens één diagonaal verbindt twee toppen v en w op afstand 4 in de tienhoek. Maar elke diagonaal die vertrekt vanuit de top v' op afstand 5 (gemeten in de tienhoek) van w (en dus adjacent met v) en die een top op afstand 4 of 5 van v' bevat, ligt samen met de boog vw in een drie- of vierhoek. Dit is een strijdigheid en we besluiten dat de Petersen-graaf niet hamiltoniaans is. □

Merk op dat, ook al is de Petersen-graaf P niet hamiltoniaans, hij wel een hamiltoniaans pad bezit. Vind er zelf zo één. In feite vertrekt er een hamitoniaans pad uit elke top van P. Dit laatste kan gebruikt worden om aan te tonen dat $k(P - S) \leq |S|$ voor elke niet-ledige eigenlijke deelverzameling toppen S van $V(P)$.

Aangezien de definities van euleriaanse en hamiltoniaanse grafen zo gelijkaardig zijn, en aangezien er een eenvoudige en bruikbare karakterisatie van euleriaanse grafen bestaat, zou men kunnen verwachten dat er voor hamiltoniaanse grafen een even eenvoudige karakterisatie bestaat. Jammer genoeg is dat niet het geval. Tot op heden is er geen praktische karakterisatie van hamiltoniaanse grafen gevonden.

In de volgende paragrafen geven we wel enkele stellingen die voorwaarden geven waaronder een graaf hamiltoniaans is.

3.3.2 De sluiting van een graaf

Het lijkt logisch te veronderstellen dat hoe meer bogen een graaf Γ heeft, hoe groter de kans is dat Γ hamiltoniaans is. De meeste voorwaarden die voldoende zijn opdat een graaf hamiltoniaans zou zijn, veronderstellen inderdaad een relatief groot aantal bogen in de graaf. Daarom zullen we eerst proberen zoveel mogelijk bogen toe te voegen aan een graaf zonder het hamiltoniaans zijn te veranderen; indien we dan alzo bijvoorbeeld een complete graaf bekomen, dan weten we dat onze oorspronkelijke graaf hamiltoniaans is, want de complete graaf is hamiltoniaans. Het proces van bogen toe te voegen zonder het hamiltoniaans zijn te wijzigen, noemt men *de graaf sluiten*.

De volgende stelling van Bondy en Chvátal ligt aan de basis van het concept “sluiting van een graaf”.

Stelling 3.3.3 (Bondy en Chvátal)**.** *Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen. Veronderstel dat u en v niet-adjacente toppen van Γ zijn waarvoor $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Dan is Γ hamiltoniaans als en slechts als $\Gamma + uv$ hamiltoniaans is.*

Bewijs. Het is duidelijk dat, indien Γ hamiltoniaans is, dan ook $\Gamma + uv$, zelfs ongeacht de voorwaarde op de graden.

Onderstel nu dat $\Gamma + uv$ hamiltoniaans is, en $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Zij $P : v_1, v_2, \ldots, v_n$ een pad in Γ, met $v_1 = u$ en $v_n = v$. Zo een pad bestaat omdat $\Gamma + uv$ hamiltoniaans is, en omdat we mogen onderstellen dat een hamiltoniaanse cykel de boog uv bevat; zoniet is Γ al hamiltoniaans en hoeven we niets meer te bewijzen. Het pad P is dan bekomen door uit de hamiltoniaanse cykel de boog uv weg te laten.

Onderstel, uit het ongerijmde, dat voor elke top v_i, met $2 \leq i \leq n$, adjacent met u, de top v_{i-1} niet adjacent is met v. Aangezien $\deg(u)$ toppen v_i adjacent zijn met u, zouden dus minstens $\deg(u)$ van de $n-1$ toppen verschillend van v niet adjacent zijn met v. M.a.w. dan zou $\deg(v) \leq (n-1) - \deg(u)$, hetgeen in strijd is met de veronderstelling dat $\deg(v) + \deg(v) \geq n$. Er moet dus een top v_i zijn die adjacent is met u, waarbij v_{i-1} adjacent is met v.

We zien nu dat Γ een cykel $C : v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1$ bevat, die alle toppen van P, en dus ook van Γ bevat, en niet de boog uv. Met andere woorden, C is een hamiltoniaanse cykel, en het bewijs is volledig. □

Deze stelling suggereert het volgende nieuwe concept.

Definitie 3.3.4. Een **sluiting** $c(\Gamma)$ van een graaf Γ met n toppen is een graaf die bekomen wordt uit Γ door recursief paren van niet-adjacente toppen waarvan de som van de graden minstens n is, te verbinden totdat geen dergelijke paren meer overblijven.

De volgende stelling toont aan dat elke graaf een unieke sluiting heeft, zodat we dus kunnen spreken van *de* sluiting van een graaf.

Stelling 3.3.5. *Zij Γ een graaf met n toppen. Veronderstel dat Γ_1 en Γ_2 twee grafen zijn die bekomen werden door recursief paren van niet-adjacente toppen te verbinden waarvan de som van de graden minstens n is (totdat geen dergelijke paren meer overblijven). Dan is $\Gamma_1 = \Gamma_2$.*

Bewijs. Zij $e_1, e_2, \ldots, e_p$ en $f_1, f_2, \ldots, f_q$ de bogen die aan Γ zijn toegevoegd om Γ_1 respectievelijk Γ_2 te bekomen. We tonen aan dat elke e_i een boog van Γ_2 is, en dat elke f_j een boog van Γ_1 is.

Onderstel dat er een zekere boog in de sequentie $e_1, e_2, \ldots, e_p$ is die niet tot Γ_2 behoort. Zij k de kleinste index waarvoor e_{k+1} niet tot Γ_2 behoort. Zij $e_{k+1} = uv$. Beschouw dan de graaf $\Psi = \Gamma + \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. De graaf Ψ is een deelgraaf van zowel Γ_1 als Γ_2. Bovendien, door de manier waarop Γ_1 geconstrueerd is, geldt dat

$$\deg_\Psi(u) + \deg_\Psi(v) \geq n\,.$$

Daarom is

$$\deg_{\Gamma_2}(u) + \deg_{\Gamma_2}(v) \geq \deg_\Psi(u) + \deg_\Psi(v) \geq n\,.$$

Dit is een contradictie aangezien u en v niet adjacent zijn in Γ_2.

Hiermee is dus bewezen dat elke e_i tot Γ_2 behoort. Op dezelfde manier toont men aan dat elke f_j tot Γ_1 behoort. Hieruit volgt dat $\Gamma_1 = \Gamma_2$. $\square$

Gebruik makend van de Stelling 3.3.3 en Stelling 3.3.5 bekomen we de volgende karakterisatie van hamiltoniaanse grafen.

Stelling 3.3.6. *Een graaf Γ is hamiltoniaans als en slechts als zijn sluiting $c(\Gamma)$ hamiltoniaans is.*

Bewijs. Wanneer we Stelling 3.3.3 gebruiken iedere keer als een boog toegevoegd wordt bij het construeren van de sluiting, dan zien we dat een graaf Γ hamiltoniaans is als en slechts als $c(\Gamma)$ hamiltoniaans is. $\square$

Deze stelling heeft een aantal interessante gevolgen.

Gevolg 3.3.7. *Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen. Als $c(\Gamma) \cong K_n$, dan is Γ hamiltoniaans.*

Bewijs. Aangezien K_n hamiltoniaans is, volgt het gestelde onmiddellijk uit Stelling 3.3.6. $\square$

Gevolg 3.3.8. *Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen. Als $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ voor alle paren $\{u, v\}$ van niet-adjacente toppen van Γ, dan is Γ hamiltoniaans.*

Bewijs. Daar $c(\Gamma)$ compleet is, volgt het resultaat onmiddellijk uit gevolg 3.3.7. $\square$

De volgende stelling is een direct gevolg van voorgaand gevolg, maar is historisch gezien belangrijk.

Stelling 3.3.9 (Dirac)**.** *Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen. Als $\deg(v) \geq n/2$ voor elke top v van Γ, dan is Γ hamiltoniaans.*

Het is gemakkelijk aan te tonen dat de graaf $\Gamma \cong K_{k,k+1}$ niet hamiltoniaans is, voor elke positief geheel getal k. Aangezien in dit geval geldt dat $\delta(\Gamma) = (n-1)/2$, zien we dat het verlagen van de grens in Stelling 3.3.9 van $n/2$ tot $(n-1)/2$ niet meer garandeert dat de graaf Γ hamiltoniaans is. Met andere woorden, de grens $n/2$ uit Stelling 3.3.9 is een "scherpe grens".

Meestal heeft een voorwaarde die impliceert dat een graaf hamiltoniaans is, een corresponderende voorwaarde die impliceert dat een graaf een hamiltoniaans pad bezit. We illustreren dit in de volgende stelling.

Gevolg 3.3.10. *Zij Γ een graaf met n toppen. Als $\deg(v) \geq (n-1)/2$, voor elke top v van Γ, dan bevat Γ een hamiltoniaans pad.*

Bewijs. Als $n = 1$, dan is $\Gamma \cong K_1$, zodat Γ een triviaal hamiltoniaans pad bevat. Veronderstel dat $n \geq 2$. We vormen een nieuwe graaf Ψ met $n+1$ toppen door aan Γ één top v toe te voegen en die te verbinden met elke top van Γ. Dan is $\deg_\Psi(v) = n$, en bovendien geldt voor elke top u van Γ dat

$$\deg_\Psi(u) = \deg_\Gamma(u) + 1 \geq \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} = \frac{|V(\Psi)|}{2}\,.$$

Wegens Stelling 3.3.9 bevat Ψ dus een hamiltoniaanse cykel C. Door de top v uit C te verwijderen bekomen we een hamiltoniaans pad in Γ. $\square$

Voor heel wat hamiltoniaanse grafen kan Stelling 3.3.9 niet worden gebruikt om aan te tonen dat ze hamiltoniaans zijn. De cykelgrafen C_n, voor $n \geq 5$, zijn hiervan een voorbeeld.

We hebben reeds eerder opgemerkt dat wanneer een graaf een voldoende aantal bogen heeft, hij hamiltoniaans is. Gebruik makend van gevolg 3.3.8 kunnen we een dergelijk resultaat verifiëren.

Gevolg 3.3.11. *Zij Γ een graaf met $n \geq 3$ toppen en m bogen. Als*

$$m \geq \binom{n-1}{2} + 2\,,$$

dan is Γ hamiltoniaans.

Bewijs. Wegens gevolg 3.3.8 volstaat het aan te tonen dat $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ voor alle paren $\{u, v\}$ van niet-adjacente toppen. Definieer $\Psi = \Gamma - \{u, v\}$. Noteren we door $m(G)$ het aantal bogen van een graaf G, dan geldt dat

$$m(\Gamma) = m(\Psi) + \deg(u) + \deg(v)\,.$$

Dus, aangezien

$$m(\Psi) \leq \binom{n-2}{2}\,,$$

volgt hieruit dat

$$\deg(u) + \deg(v) = m(\Gamma) - m(\Psi) \geq \binom{n-1}{2} + 2 - \binom{n-2}{2} = n\,.$$

□

3.3.3 Bipartiete grafen

Voor een bipartiete hamiltoniaanse graaf Γ met bipartitieverzamelingen V_1 en V_2 is gemakkelijk in te zien dat $|V_1| = |V_2| \geq 2$ (bewijs als oefening). De volgende stelling is een uitbreiding van de stelling van Dirac voor de klasse van bipartiete grafen.

Stelling 3.3.12. *Zij Γ een bipartiete graaf met bipartitieverzamelingen V_1 en V_2 zodanig dat $|V_1| = |V_2| = k \geq 2$. Zij δ_i de minimale graad van de toppen in V_i, $i = 1, 2$. Indien $\delta_1 + \delta_2 > k$, dan is Γ hamiltoniaans.*

Bewijs. We tonen aan dat het toevoegen van een boog $\{v_1, v_2\} \notin E(\Gamma)$ waarbij $v_1 \in V_1$ en $v_2 \in V_2$ het al of niet hamiltoniaans zijn van de graaf ongewijzigd laat.

Als Γ hamiltoniaans is, dan is $\Gamma + v_1v_2$ dat vanzelfsprekend ook. Omgekeerd onderstel dat $\Gamma + v_1v_2$ hamiltoniaans is. Bevat een hamiltoniaanse cykel van $\Gamma + v_1v_2$ de boog v_1v_2 niet, dan is ook Γ hamiltoniaans. Onderstel nu dat de hamiltoniaanse cykel van $\Gamma + v_1v_2$ de boog v_1v_2 wel bevat. Dan hebben we het deelpad $(v_1 = w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{2k} = v_2)$ van deze cykel, en deze ligt volledig in Γ. We nemen nu alle toppen w_{2i} die adjacent zijn in Γ aan v_1 en we beschouwen de verzameling $W_1 = \{w_{2i-1} : w_{2i} \sim v_1\}$. Beschouw ook de verzameling $W_2 = \{w_{2j-1} : w_{2j-1} \sim v_2\}$. Dan zijn W_1 en W_2 deelverzamelingen van V_1 waarvan de som van de kardinaalgetallen strikt groter is dan k. Ze moeten dus minstens één element gemeen hebben, zegge $w_{2\ell-1}$. Maar dan hebben we de hamiltoniaanse cykel $(w_1, w_2, \ldots, w_{2\ell-1}, w_{2k}, w_{2k-1}, \ldots, w_{2\ell}, w_1)$ in de oorspronkelijke graaf Γ.

Noem nu $K_{k,k}$ de complete bipartiete graaf met bipartitieverzamelingen V_1 en V_2. Dan geldt $K_{k,k} = \Gamma + \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ voor bepaalde onderling verschillende bogen $b_1, b_2, \ldots, b_l$ van $K_{k,k}$. Stellen we $\Gamma_i = \Gamma + \{b_1, b_2, \ldots, b_i\}$ voor elke $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$ (met $\Gamma_0 = \Gamma$) dan weten we uit het bovenstaande dat ofwel geen ofwel beide van de grafen Γ_{i-1}, Γ_i hamiltoniaans zijn ($i \in \{1, 2, \ldots, l\}$). Daar $\Gamma_l = K_{k,k}$ hamiltoniaans is, volgt hieruit dat elke Γ_i hamiltoniaans moet zijn, in het bijzonder ook de graaf $\Gamma_0 = \Gamma$. □