1.6 Stellingen van Desargues, constructie van dilataties

In deze paragraaf construeren we translaties en homothetieën van een zogenaamde desarguesiaanse affiene ruimte. Uit deze groep van automorfismen die we bekomen construeren we dan in de volgende paragraaf een lichaam, dat een veld zal zijn indien we het bijkomende Axioma van Pappus aannemen. Na het kiezen van een oorsprong kunnen we dan bewijzen dat een desarguesiaanse affiene ruimte die voldoet aan het Axioma van Pappus altijd kan afgeleid worden uit een vectorruimte van dezelfde dimensie over een veld.

We beginnen met de stellingen van Desargues[7].

DEFINITIE 1.6.1.

- Een verzameling van drie punten die niet bevat zijn in een rechte, samen met de drie rechten die elk twee punten ervan bevatten, wordt een *driehoek* genoemd. De drie punten zijn de *hoekpunten*[8] van de driehoek, de drie rechten de *zijden*. Een driehoek wordt genoteerd door zijn hoekpunten te schrijven na het symbool Δ.
- Twee driehoeken Δabc en Δxyz worden *parallel* of *evenwijdig* genoemd als de zijden twee aan twee evenwijdig zijn. De notatie $\Delta abc \parallel \Delta xyz$ impliceert dat $\langle a,b\rangle \parallel \langle x,y\rangle$, dat $\langle b,c\rangle \parallel \langle y,z\rangle$ en dat $\langle a,c\rangle \parallel \langle x,z\rangle$.
- Twee driehoeken Δabc en Δxyz, met $a \neq x$, $b \neq y$ en $c \neq z$, worden *centraal* genoemd indien de verbindingslijnen van corresponderende hoekpunten ofwel door één punt gaan, ofwel evenwijdig zijn (in het laatste geval noemen we de driehoeken ook *oneigenlijk centraal*). De notatie $\Delta abc \bowtie \Delta xyz$ drukt uit dat de driehoeken centraal zijn en impliceert dus dat de rechten $\langle a,x\rangle$, $\langle b,y\rangle$ en $\langle c,z\rangle$ door één punt gaan (indien niet oneigenlijk centraal), of evenwijdig zijn (indien oneigenlijk centraal).

STELLING 1.6.2 (Affiene Stelling van Desargues). *In een affiene ruimte van dimensie ten minste* 3 *zijn elk paar evenwijdige driehoeken centraal als geen twee overeenkomstige hoekpunten samenvallen.*

Bewijs. Beschouw de driehoeken Δabc en Δxyz waarvoor $\Delta abc \parallel \Delta xyz$. We weten dat $a \neq x$, $b \neq y$ en $c \neq z$. We onderscheiden twee gevallen.

Onderstel eerst dat het vlak $\langle a,b,c\rangle$ verschillend is van het vlak $\langle x,y,z\rangle$. De rechten $L = \langle a,x\rangle$ en $M = \langle b,y\rangle$ liggen in het vlak bepaald door de evenwijdige rechten $\langle a,b\rangle$ en $\langle x,y\rangle$. Aldus zijn L en M ofwel evenwijdig, ofwel snijden ze in een punt. Analoog geldt dat L en $K = \langle c,z\rangle$ ofwel evenwijdig zijn, ofwel snijden in een punt, en dat M en K

[7] Girard Desargues (1591 – 1661) was een Franse wiskundige, ingenieur en architect, die als een van de grondleggers van de projectieve meetkunde wordt beschouwd.

[8] Denk hierbij niet aan ‘hoeken’; die zijn er niet.

ofwel evenwijdig zijn, ofwel snijden in een punt. Indien $L \parallel M \parallel K$, dan zijn Δabc en Δxyz oneigenlijk centraal. Stel, zonder verlies van algemeenheid, dat L en M snijden in het punt p. Dan kan K niet evenwijdig zijn met beide rechten L en M. Stel dat K evenwijdig is aan één ervan, dan snijdt ze de andere en liggen de drie rechten L, M en K in één vlak. Bijgevolg liggen ook de punten a, b, c, x, y, z in één vlak, strijdig met onze onderstelling. Dus snijden L, M en K elkaar twee aan twee. Indien dit in drie verschillende punten gebeurt, dan liggen K, L en M in het vlak bepaald door die drie punten, wat opnieuw tot dezelfde strijdigheid leidt. Dus moeten K, L en M elkaar snijden in één gemeenschappelijk punt en zijn de driehoeken Δabc en Δxyz centraal.

Onderstel nu dat Δabc en Δxyz in een vlak V gelegen zijn. We mogen ook onderstellen dat $\langle a, b\rangle \neq \langle x, y\rangle$, dat $\langle a, c\rangle \neq \langle x, z\rangle$ en dat $\langle b, c\rangle \neq \langle y, z\rangle$, anders is het te bewijzen triviaal. We kiezen een vlak $V' \parallel V$, met $V' \neq V$, en construeren een driehoek Δpqr in V', zodanig dat $\Delta abc \parallel \Delta pqr$, en dus ook $\Delta pqr \parallel \Delta xyz$, en zodat bovendien $\langle p, x\rangle \parallel \langle q, y\rangle$. Uit het eerste deel van het bewijs volgt dat $\Delta abc \bowtie \Delta pqr \bowtie \Delta xyz$. Bovendien zijn Δpqr en Δxyz oneigenlijk centraal wegens de tweede voorwaarde. Er geldt dat $\langle a, x\rangle \subseteq \langle a, p, x\rangle = V_1$, $\langle b, y\rangle \subseteq \langle b, q, y\rangle = V_2$ en $\langle c, z\rangle \subseteq \langle c, r, z\rangle = V_3$. We onderscheiden nu twee mogelijkheden.

- Onderstel eerst dat Δabc en Δpqr oneigenlijk centraal zijn. In dat geval zijn V_1, V_2 en V_3 drie parallelle vlakken wegens Stelling 1.3.6. Bijgevolg liggen $\langle a, x\rangle$, $\langle b, y\rangle$ en $\langle c, z\rangle$ in verschillende parallelle vlakken, en zijn dus twee aan twee disjunct. Maar ze liggen ook in het vlak V, en zijn dus evenwijdig.

- Onderstel als tweede geval dat Δabc en Δpqr niet oneigenlijk centraal zijn. Er bestaat een punt u zodat $\langle a, p\rangle \cap \langle b, q\rangle \cap \langle c, r\rangle = \{u\}$. De rechte evenwijdig met $\langle p, x\rangle$ (en dus ook met $\langle q, y\rangle$ en $\langle r, z\rangle$) die u bevat, noemen we R. In het vlak V_1 snijdt de rechte $\langle a, x\rangle$ de rechte R; evenzo snijden $\langle b, y\rangle$ en $\langle c, z\rangle$ de rechte R. Aangezien R niet in V ligt en ze bijgevolg hoogstens één punt gemeen heeft met V, snijden de rechten $\langle a, x\rangle$, $\langle b, y\rangle$ en $\langle c, z\rangle$, die alledrie in V liggen, de rechte R in hetzelfde punt. Ze hebben dus een gemeenschappelijk punt: $R \cap V$. □

OPMERKING 1.6.3. De Stelling van Desargues neemt een belangrijke plaats in binnen de affiene meetkunde. We weten dat ze geldig is voor affiene ruimten van dimensie ten minste 3, maar er zijn ook affiene vlakken waarvoor deze stelling geldt (bedoeld is, waarvoor alle evenwijdige driehoeken zonder samenvallende hoekpunten centraal zijn). In het algemeen noemen we alle affiene ruimten waarvoor de stelling geldt *desarguesiaans*; dit impliceert wel dat de affiene ruimte dimensie minstens twee heeft. De Stelling van Desargues stelt dan dat alle affiene ruimten van dimensie ten minste 3 desarguesiaans zijn.

STELLING 1.6.4 (Omgekeerde Affiene Stelling van Desargues). *Onderstel dat twee driehoeken Δabc en Δxyz in een desarguesiaanse affiene ruimte $\mathcal{A}$ centraal zijn en dat $\langle a, x\rangle \neq \langle b, y\rangle \neq \langle c, z\rangle \neq \langle a, x\rangle$. Als $\langle a, b\rangle \parallel \langle x, y\rangle$ en $\langle b, c\rangle \parallel \langle y, z\rangle$, dan geldt $\Delta abc \parallel \Delta xyz$.*

Bewijs. We moeten aantonen dat $\langle a,c\rangle \parallel \langle x,z\rangle$. Stel L de rechte door x evenwijdig aan $\langle a,c\rangle$. Het te bewijzen is dan equivalent met $L = \langle x,z\rangle$. Merk op dat $\langle a,b,c\rangle \parallel \langle x,y,z\rangle$ wegens Stelling 1.3.6, en dat de rechte L in het vlak $\langle x,y,z\rangle$ ligt. Definieer het punt z' als het snijpunt van $\langle y,z\rangle$ met L. We hebben dan dat $\Delta abc \parallel \Delta xyz'$. Wegens de Affiene Stelling van Desargues is dan $\Delta abc \bowtie \Delta xyz'$. We onderscheiden nu twee mogelijkheden, wetende dat $\Delta abc \bowtie \Delta xyz$.

- Onderstel eerst dat $\langle a,x\rangle \parallel \langle b,y\rangle \parallel \langle c,z\rangle$ (dus dat Δabc en Δxyz oneigenlijk centraal zijn). Aangezien $\langle a,x\rangle \parallel \langle c,z'\rangle$ geldt dan dat $\langle c,z\rangle = \langle c,z'\rangle$. Het punt z' ligt dan op $\langle c,z\rangle$ en $\langle y,z\rangle$, en dit zijn twee verschillende rechten wegens het gegeven. Dus $z = z'$ en het gestelde volgt.
- Onderstel nu dat $\langle a,x\rangle \cap \langle b,y\rangle \cap \langle c,z\rangle = \{u\}$, met u een punt van $\mathcal{A}$. Dan geldt dat $u \in \langle c,z'\rangle$ omdat $\Delta abc \bowtie \Delta xyz'$ en dus is ook in dit geval $\langle c,z\rangle = \langle c,z'\rangle$. De conclusie volgt dan op dezelfde wijze als in het vorige geval. $\square$

We definiëren nu equipollente puntenkoppels en gebruiken de stellingen van Desargues om te bewijzen dat equipollentie een equivalentierelatie is.

DEFINITIE 1.6.5. Voor punten a, b, x en y van een desarguesiaanse affiene ruimte noemen we de koppels (a,x) en (b,y) *equipollent*, genoteerd door $(a,x) \uparrow (b,y)$, als

- ofwel $a = x$ en $b = y$,
- ofwel $a \neq x \neq y \neq b \neq a$, $\langle a,x\rangle \parallel \langle b,y\rangle$, $\langle a,x\rangle \neq \langle b,y\rangle$ en $\langle a,b\rangle \parallel \langle x,y\rangle$,
- ofwel $a \neq x$ en $b \neq y$, $\langle a,x\rangle = \langle b,y\rangle$ en er een puntenkoppel (c,z) bestaat met $c \neq z$, $\langle c,z\rangle \neq \langle a,x\rangle$, $\langle c,z\rangle \parallel \langle a,x\rangle$, $\langle a,c\rangle \parallel \langle x,z\rangle$ en $\langle c,b\rangle \parallel \langle z,y\rangle$.

Het volgende resultaat volgt onmiddellijk uit de definitie.

GEVOLG 1.6.6. *Onderstel dat a, b, x en y punten van een desarguesiaanse affiene ruimte zijn, met $a \neq b$. Als $(a,x) \uparrow (b,y)$, dan $\langle a,b\rangle \parallel \langle x,y\rangle$ en $\langle a,x\rangle \parallel \langle b,y\rangle$.*

STELLING 1.6.7. *Equipollentie in een desarguesiaanse affiene ruimte is een equivalentierelatie.*

Bewijs. Reflexiviteit volgt uit het eerste puntje voor koppels (a,a), met a een punt, en volgt uit het derde puntje voor koppels (a,x), met a en x verschillende punten. Symmetrie volgt direct. We gaan nu de transitiviteit na.

Onderstel dat $(a,x) \uparrow (b,y) \uparrow (c,z)$. Als $a = x$, dan is ook $b = y$ en $c = z$, en volgt het gestelde. Idem als $b = y$ of als $c = z$. We mogen dus zonder verlies van algemeenheid aannemen dat $a \neq x$, $b \neq y$ en $c \neq z$. Als $\langle a,x\rangle = \langle c,z\rangle \neq \langle b,y\rangle$, dan volgt $(a,x) \uparrow (c,z)$ rechtstreeks uit de definitie. We onderscheiden nu de volgende gevallen.

- Als $\langle a, x\rangle \neq \langle b, y\rangle \neq \langle c, z\rangle \neq \langle a, x\rangle$, dan zijn de driehoeken Δabc en Δxyz oneigenlijk centraal. Daarenboven zijn $\langle a, b\rangle \parallel \langle x, y\rangle$ en $\langle b, c\rangle \parallel \langle y, z\rangle$. Uit Stelling 1.6.4 volgt $\langle a, c\rangle \parallel \langle x, z\rangle$, wat $(a, x) \uparrow (c, z)$ impliceert.

- Onderstel dat $\langle a, x\rangle = \langle b, y\rangle \neq \langle c, z\rangle$. Wegens de definitie vinden we een koppel (d, u) met $\langle d, u\rangle \neq \langle a, x\rangle$ en $(a, x) \uparrow (d, u) \uparrow (b, y)$. Als $\langle d, u\rangle \neq \langle c, z\rangle$, dan hebben we wegens het eerste geval $(d, u) \uparrow (c, z)$ en opnieuw wegens het eerste geval $(a, x) \uparrow (c, z)$.

  Als $\langle d, u\rangle = \langle c, z\rangle$, dan kiezen we een puntenkoppel (e, v) met $\langle e, v\rangle \notin \{\langle a, x\rangle, \langle c, z\rangle\}$, en $(a, x) \uparrow (e, v)$. We hebben achtereenvolgens, allemaal wegens het eerste geval:

$$\begin{aligned}
(e, v) \uparrow (a, x) \uparrow (d, u) &\Longrightarrow (e, v) \uparrow (d, u)\ , \\
(e, v) \uparrow (d, u) \uparrow (b, y) &\Longrightarrow (e, v) \uparrow (b, y)\ , \\
(e, v) \uparrow (b, y) \uparrow (c, z) &\Longrightarrow (e, v) \uparrow (c, z)\ , \\
(a, x) \uparrow (e, v) \uparrow (c, z) &\Longrightarrow (a, x) \uparrow (c, z)\ .
\end{aligned}$$

- Als $\langle a, x\rangle = \langle b, y\rangle = \langle c, z\rangle$, dan bestaat er wegens de definitie een puntenkoppel (d, u) met $\langle d, u\rangle \neq \langle a, x\rangle$, en $(b, y) \uparrow (d, u) \uparrow (c, z)$. Uit het voorgaande geval volgt dat $(a, x) \uparrow (d, u)$ en wegens de definitie is dan $(a, x) \uparrow (c, z)$. □

STELLING 1.6.8. *Elke equivalentieklasse van equipollente puntenkoppels in een desarguesiaanse affiene ruimte bevat juist één koppel met gegeven eerste, resp. laatste punt. In symbolen, met $\mathcal{P}$ de puntenverzameling van de affiene ruimte:* $(\forall x, y, z \in \mathcal{P})(\exists! u \in \mathcal{P})(\exists! v \in \mathcal{P})((x, y) \uparrow (u, z) \uparrow (z, v))$.

Bewijs. We bewijzen dit voor een gegeven laatste punt; het bewijs voor gegeven eerste punt is analoog. Beschouw $x, y, z \in \mathcal{P}$ willekeurig. Het is duidelijk (bij constructie) dat er tenminste één $u \in \mathcal{P}$ bestaat waarvoor $(x, y) \uparrow (u, z)$. Onderstel nu dat ook $(x, y) \uparrow (u', z)$. Wegens Stelling 1.6.7 is dan $(u, z) \uparrow (u', z)$. Uit de definitie van equipollentie volgt dan echter dat $u = u'$. □

DEFINITIE 1.6.9. Een equivalentieklasse van equipollente puntenkoppels in een desarguesiaanse affiene ruimte $\mathcal{A}$ wordt een *vector* genoemd. Een element van de klasse wordt een *representant* van de vector genoemd. Een vector met representant (a, b) stellen we soms voor door $\overrightarrow{ab}$. Is er geen enkele representant gegeven of bekend, dan gebruiken we als notatie een (enkelvoudige) letter met een pijltje boven, zoals $\vec{v}$. De vector met representant $\overrightarrow{aa}$ voor een willekeurig punt a noemen we de *nulvector*.

We gaan nu de verzameling van vectoren structureren tot een vectorruimte. Daarvoor hebben we een optelling in de verzameling van vectoren nodig, en ook een veld. Het zal blijken dat we slechts een lichaam kunnen vinden, dat een veld is onder een bijkomende voorwaarde op de affiene ruimte.

Definitie 1.6.10. Voor een vector $\vec{v}$ van een desarguesiaanse affiene ruimte met puntenverzameling $\mathcal{P}$ definiëren we de afbeelding

$$\tau_{\vec{v}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : x \mapsto y \ ,$$

waarbij y het punt is waarvoor $\overrightarrow{xy} = \vec{v}$. Anders gezegd, $\tau_{\vec{v}}(x) = y \Leftrightarrow \overrightarrow{xy} = \vec{v}$

Uit Stelling 1.6.8 volgt dat deze afbeelding goed gedefinieerd is. Het volgende resultaat volgt onmiddellijk uit de definitie.

Gevolg 1.6.11. *Als a, b en v punten van een desarguesiaanse affiene ruimte zijn, dan geldt er dat $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v, v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}}}$. Als $a = b$, dan $v = v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}}$; als $a \neq b$, dan geldt er dat $\langle a, b\rangle \parallel \langle v, v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}}\rangle$. Als $a = v$, dan is $v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}} = b$; als $a \neq v$, dan is $\langle a, v\rangle \parallel \langle b, v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}}\rangle$. Bovendien geldt er dus dat als $v \neq a \neq b$ en $\langle a, v\rangle \neq \langle a, b\rangle$, dat $v^{\tau_{\overrightarrow{ab}}}$ het snijpunt van de rechte door v parallel aan $\langle a, b\rangle$ en de rechte door b parallel aan $\langle a, v\rangle$ is.*

De aan een vector geassocieerde afbeelding blijkt steeds een verschuiving te zijn.

Stelling 1.6.12. *Voor elke vector $\vec{v}$ van een desarguesiaanse affiene ruimte is de afbeelding $\tau_{\vec{v}}$ een verschuiving.*

Bewijs. Beschouw een vector $\vec{v}$ en noteer $\tau = \tau_{\vec{v}}$. Als $\vec{v} = \overrightarrow{aa}$ voor een zeker punt a, dan is τ de identieke permutatie. Onderstel nu dat $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$ met $a \neq b$. Beschouw een willekeurige rechte L en neem $x, y \in L$ twee verschillende punten. Dan is $L = \langle x, y\rangle \parallel \langle x^\tau, y^\tau\rangle$, wegens Gevolg 1.6.11. We weten dat $\vec{v} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{xx^\tau} = \overrightarrow{yy^\tau}$. We tonen nu aan dat $L^\tau = \langle x^\tau, y^\tau\rangle$.

Kies een punt $z \in L$. Uit Gevolg 1.6.11 volgt dat z^τ op de rechte $\langle x^\tau, y^\tau\rangle$ ligt. Omgekeerd kunnen we voor een punt $w' \in \langle x^\tau, y^\tau\rangle$ steeds een punt w vinden waarvoor $w^\tau = w'$ wegens Stelling 1.6.8. Uit Gevolg 1.6.11 volgt dan dat $w \in L$. Dit bewijst via dubbele inclusie dat $L^\tau = \langle x^\tau, y^\tau\rangle$.

Dus, rechten worden door τ op rechten afgebeeld. Meer zelfs, τ beeldt elke rechte af op een parallelle rechte. Daaruit volgt dat ook elk vlak op een vlak afgebeeld wordt. Hieruit volgt dan dat τ een automorfisme is.

Aangezien τ elke rechte afbeeldt op een parallelle rechte, is τ een dilatatie. Maar klaarblijkelijk heeft τ geen fixpunten als $a \neq b$, waaruit volgt dat τ een verschuiving is. $\square$

We merken nog op dat de fixrechten van de translatie $\tau_{\vec{v}}$ gegeven worden door de rechten $\langle x, x'\rangle$ waarvoor $\vec{v} = \overrightarrow{xx'}$.

Gevolg 1.6.13. *Als $\mathcal{A}$ een desarguesiaanse affiene ruimte is, dan werkt de groep $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$ commutatief en scherp transitief[9] op de puntenverzameling van $\mathcal{A}$.*

[9]Het begrip (scherp) transitief zal ingevoerd worden in de cursus *Discrete Wiskunde II* voor algemene permutatiegroepen. In deze context betekent het dat er juist één translatie bestaat die een gegeven punt op een ander gegeven punt afbeeldt.

Bewijs. Dit volgt direct uit Gevolg 1.5.14 en Stellingen 1.5.15 en 1.6.12. □

Elke translatie komt nu overeen met juist één vector, en omgekeerd bepaalt elke vector juist één translatie. Dit laat ons toe de volgende definitie te geven.

DEFINITIE 1.6.14. We definiëren de som $\vec{v} + \vec{w}$ van twee vectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ via $\tau_{\vec{v}+\vec{w}} = \tau_{\vec{v}}\tau_{\vec{w}}$.

De verzameling der vectoren vormt voor deze optelling dan een commutatieve groep. Bovendien volgen onmiddellijk de betrekkingen van Chasles[10]-Möbius[11].

STELLING 1.6.15 (Chasles-Möbius)**.** *Als a, b, c en d vier willekeurige punten in een desarguesiaanse affiene ruimte zijn, dan geldt*

(i) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$*;*

(ii) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \Leftrightarrow \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$*.*

Bewijs. De translatie $\tau_{\overrightarrow{ab}}$ beeldt a op b af; de translatie $\tau_{\overrightarrow{bc}}$ beeldt b op c. Bijgevolg beeldt de translatie $\tau_{\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bc}} = \tau_{\overrightarrow{ab}}\tau_{\overrightarrow{bc}}$ het punt a op c af. Aangezien ook $\tau_{\overrightarrow{ac}}$ het punt a op c afbeeldt, vallen deze twee translaties samen wegens Stelling 1.5.14. Aldus is $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$. Dit bewijst (i).

Onderstel dat $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$. Dan beeldt $\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\tau_{\overrightarrow{ac}}\tau_{\overrightarrow{ab}}$ het punt b af op het punt d. Maar wegens de commutativiteit is $\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\tau_{\overrightarrow{ac}}\tau_{\overrightarrow{ab}} = \tau_{\overrightarrow{ac}}$. Wegens Stelling 1.5.14 is dan $\tau_{\overrightarrow{ac}} = \tau_{\overrightarrow{bd}}$ en dus $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$. □

We definiëren ook nog evenwijdigheid tussen vectoren, weliswaar verschillend van de vector $\overrightarrow{aa}$. Twee vectoren zijn *evenwijdig* of *parallel* als de corresponderende translaties dezelfde fixrechten hebben. Er volgt dus dat voor vier punten a, b, c, d geldt dat $\overrightarrow{ab} \parallel \overrightarrow{cd}$ (waarbij we met $\parallel$ opnieuw evenwijdigheid noteren) als en slechts als $\langle a, b\rangle \parallel \langle c, d\rangle$.

Het begrip vector laat ons ook toe om het begrip *midden* te definiëren.

DEFINITIE 1.6.16. Voor twee verschillende punten a en b in een desarguesiaanse affiene ruimte, is c het midden van a en b (men zegt ook: van het lijnstuk $[a, b]$) als $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{cb}$.

[10]Michel Floréal Chasles (1793 – 1880) was Frans wiskundige, vooral actief in de meetkunde en de kinematica. Hij is één van 72 Franse wetenschappers wiens naam op de Eiffeltoren staat.

[11]August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) was een Duitse (Saksische) wiskundige. Hij was actief in de getaltheorie (Möbiusfunctie, Möbiusinversieformule), de meetkunde (Mobiüsvlak, Möbiustransformatie) en de sterrenkunde. Hij gaf ook zijn naam aan de Mobiüsband.

Analoge resultaten bestaan voor homothetieën. Daar de bewijzen zeer gelijklopend zijn, om niet te zeggen bijna mutatis mutandis dezelfde, laten we ze weg (ze kunnen eventueel in de oefeningenlessen ter sprake komen).

DEFINITIE 1.6.17. Beschouw een vastgekozen punt o van een desarguesiaanse affiene ruimte. Dan noemen we twee puntenkoppels (a, x) en (b, y), met $o \notin \{a, b, x, y\}$, *equihomoloog vanuit* o, genoteerd als $(a, x) \uparrow_o (b, y)$, als $x \in \langle o, a \rangle$, $y \in \langle o, b \rangle$ en

- ofwel $a = x$ en $b = y$,
- ofwel $a \neq x$, $b \neq y$, $\langle a, x \rangle \neq \langle b, y \rangle$ en $\langle a, b \rangle \parallel \langle x, y \rangle$,
- ofwel $a \neq x$, $b \neq y$, $\langle a, x \rangle = \langle b, y \rangle$ en er een puntenkoppel (c, z) bestaat, met $z \in \langle o, c \rangle$, $o \notin \{c, z\}$, $c \neq z$ waarvoor $\langle c, z \rangle \neq \langle a, x \rangle$, $\langle a, c \rangle \parallel \langle x, z \rangle$ en $\langle b, c \rangle \parallel \langle y, z \rangle$.

Het identieke koppel (o, o) noemen we *equihomoloog vanuit* o met elk puntenkoppel (a, x) waarvoor $o \notin \{a, x\}$, $x \in \langle o, a \rangle$, en we gebruiken ook de (symmetrische) notatie $(a, x) \uparrow_o (o, o)$.

STELLING 1.6.18. *Equihomoloog zijn vanuit een vast gemeenschappelijk punt o in een desarguesiaanse affiene ruimte is een equivalentierelatie in de verzameling van puntenkoppels waarvan beide punten verschillen van o.*

STELLING 1.6.19. *Elke equivalentieklasse van equihomoloog zijn vanuit een vast punt o in een desarguesiaanse affiene ruimte, aangevuld met het koppel (o, o), bevat juist één koppel met gegeven eerste punt. In symbolen, waarbij de puntenverzameling van de affiene ruimte wordt gegeven door $\mathcal{P}$: $(\forall o, x, y, z \in \mathcal{P})(o \notin \{x, y\})(\langle o, x \rangle = \langle o, y \rangle)(\exists! u \in \mathcal{P})((x, y) \uparrow_o (z, u))$.*

DEFINITIE 1.6.20. Beschouw een vast punt o van een desarguesiaanse affiene ruimte met puntenverzameling $\mathcal{P}$. Voor een puntenpaar (a, a') met $o \notin \{a, a'\}$ en $\langle o, a \rangle = \langle o, a' \rangle$ definiëren we de afbeelding

$$h_{a,a'} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : x \mapsto y,$$

waarbij y het punt is waarvoor $(a, a') \uparrow_o (x, y)$.

STELLING 1.6.21. *Gebruik makend van de notatie uit Definitie 1.6.20, en onder de bijhorende voorwaarden, is $h_{a,a'}$ een homothetie met centrum o. De verzameling van alle homothetieën met centrum o van een desarguesiaanse affiene ruimte is een (niet noodzakelijk commutatieve) groep die scherp transitief werkt op de punten $L \setminus \{o\}$, voor elke willekeurige rechte L door o.*

De homothetieën kunnen we nu gebruiken om een verhouding tussen evenwijdige vectoren te definiëren.

STELLING 1.6.22. *Als a, b en c drie punten van een desarguesiaanse affiene ruimte zijn, dan is de afbeelding $\Psi_{a,b}$ van de groep van homothetieën met centrum a naar de groep der homothetieën met centrum b vastgelegd door*

$$\Psi_{a,b} : \theta \mapsto \tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1} \theta \tau_{\overrightarrow{ab}}$$

een isomorfisme[12]*. Er geldt dat $\Psi_{a,b}\Psi_{b,c} = \Psi_{a,c}$.*

Bewijs. Als θ_1 een homothetie is met centrum a, dan is $\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta_1\tau_{\overrightarrow{ab}}$ een dilatatie die b fixeert, dus een homothetie met centrum b. Omgekeerd, als θ_2 een homothetie met centrum b is, dan is $\theta_1 = \tau_{\overrightarrow{ab}}\theta_2\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}$ een homothetie met centrum a en

$$\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta_1\tau_{\overrightarrow{ab}} = \tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\tau_{\overrightarrow{ab}}\theta_2\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\tau_{\overrightarrow{ab}} = \theta_2 \ .$$

Aldus is $\Psi_{a,b}$ bijectief. De afbeelding $\Psi_{a,b}$ is ook een morfisme omdat, voor twee homothetieën θ_1 en θ_2 met centrum a geldt dat

$$\Psi_{a,b}(\theta_1\theta_2) = \tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta_1\theta_2\tau_{\overrightarrow{ab}} = (\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta_1\tau_{\overrightarrow{ab}})(\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta_2\tau_{\overrightarrow{ab}}) = \Psi_{a,b}(\theta_1)\Psi_{a,b}(\theta_2) \ .$$

De laatste bewering volgt uit de eerste betrekking van Chasles-Möbius: als θ een homothetie met centrum a is, dan is

$$(\Psi_{a,b}\Psi_{b,c})(\theta) = \tau_{\overrightarrow{bc}}^{-1}\tau_{\overrightarrow{ab}}^{-1}\theta\tau_{\overrightarrow{ab}}\tau_{\overrightarrow{bc}} = \tau_{\overrightarrow{ac}}^{-1}\theta\tau_{\overrightarrow{ac}} = \Psi_{a,c}(\theta) \ ,$$

waaruit volgt dat $\Psi_{a,b}\Psi_{b,c} = \Psi_{a,c}$. □

DEFINITIE 1.6.23. Een klasse van toegevoegde homothetieën (toevoeging met translaties) wordt een *factor* genoemd.

STELLING 1.6.24. *Beschouw twee parallelle niet-nulvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van een desarguesiaanse affiene ruimte. Als a, b en c drie punten zijn waarvoor $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$ en $\vec{w} = \overrightarrow{ac}$, dan is de factor f van de homothetie met centrum a die b op c afbeeldt, onafhankelijk van de keuze van a, b en c.*

Bewijs. Als a', b' en c' punten zijn waarvoor $\overrightarrow{a'b'} = \vec{v} = \overrightarrow{ab}$ en $\overrightarrow{a'c'} = \vec{w} = \overrightarrow{ac}$, dan is wegens de tweede betrekking van Chasles-Möbius $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{cc'}$. Voor de homothetie h met centrum a die b op c afbeeldt en de translatie $\tau = \tau_{\overrightarrow{aa'}}$ weten we dat

$$a'^{\tau^{-1}h\tau} = a^{h\tau} = a^{\tau} = a' \text{ en}$$
$$b'^{\tau^{-1}h\tau} = b^{h\tau} = c^{\tau} = c' \ .$$

Dit bewijst dat $\tau^{-1}h\tau = h'$, de homothetie met centrum a' die b' op c' afbeeldt. Aangezien h en h' toegevoegd zijn door middel van een translatie, bepalen ze dus bij definitie dezelfde factor. □

[12] Men noemt deze afbeelding de *toevoeging* met $\tau_{\overrightarrow{ab}}$.

Deze stelling bewijst dat volgende definitie zinvol is.

DEFINITIE 1.6.25. Voor twee parallelle niet-nulvectoren $\vec{v}$ en $\vec{w}$ van een desarguesiaanse affiene ruimte, waarvoor a, b en c drie punten zijn zodanig dat $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$ en $\vec{w} = \overrightarrow{ac}$, wordt de factor van de homothetie met centrum a die b op c afbeeldt, de *deelverhouding van $\vec{v}$ en $\vec{w}$* genoemd en genoteerd door $\vec{w} : \vec{v}$.

Als $\vec{w}$ de nulvector is (en dus $a = c$), dan is de deelverhouding $\vec{w} : \vec{v}$ gelijk aan 0, waarbij we dit symbool kunnen opvatten als de factor van de constante afbeelding[13] die alle punten op a afbeeldt (en die factor is dan de verzameling van alle constante transformaties).

1.7 Het Axioma van Pappus

We beschouwen een desarguesiaanse affiene ruimte $\mathcal{A}$. We kiezen een vast punt o, en een vaste rechte $\mathbb{K}$ door o. We kiezen nog een tweede punt op $\mathbb{K}$ dat we voorstellen door e. Kortheidshalve zullen we voor $x \in \mathbb{K}$ de vector $\overrightarrow{ox}$ voorstellen door $\vec{x}$. We definiëren een som in $\mathbb{K}$ als volgt: voor $a, b \in \mathbb{K}$ is $a + b = c$ als $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$, wat via Definitie 1.6.14 equivalent is met $\tau_{\vec{a}}\tau_{\vec{b}} = \tau_{\vec{c}}$. We definiëren ook een product in $\mathbb{K}$ door te stellen dat $o \cdot a = o = a \cdot o$, voor alle $a \in \mathbb{K}$, en verder dat $a \cdot b = c$, voor $o \notin \{a, b\}$, als $h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,b} = \tau_{\vec{c}}$. Dat deze vermenigvuldiging in $\mathbb{K}$ goed gedefinieerd is volgt onder andere gebruik makend van Stelling 1.5.13)

LEMMA 1.7.1. *Met bovenstaande notaties geldt $a \cdot b = c$ als en slechts als $h_{e,a}h_{e,b} = h_{e,c}$.*

Bewijs. Stel dat $a \cdot b = c$. Dan geldt er dat

$$c = o^{\tau_{\vec{c}}} = o^{h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,b}} = o^{\tau_{\vec{a}}h_{e,b}} = a^{h_{e,b}} .$$

Hieruit volgt dan dat $e^{h_{e,a}h_{e,b}} = a^{h_{e,b}} = c$. Daar $h_{e,a}h_{e,b}$ een homothetie is met centrum o en blijkbaar e afbeeldt op c, is ze wegens Stelling 1.5.16 gelijk aan $h_{e,c}$.

Onderstel nu dat $h_{e,a}h_{e,b} = h_{e,c}$. Dan geldt er dat $a^{h_{e,b}} = c$. Hieruit halen we dan dat $o^{h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,b}} = o^{\tau_{\vec{a}}h_{e,b}} = a^{h_{e,b}} = c$. Daar $h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,b}$ een translatie is wegens Stelling 1.5.13, moet ze wegens Stelling 1.5.14 gelijk zijn $\tau_{\vec{c}}$. □

We hebben nu de volgende basisstelling, die steunt op het voorgaande lemma.

STELLING 1.7.2. *Met bovenstaande notatie is $\mathbb{K}, +, \cdot$ een lichaam*[14].

[13] Dit is geen morfisme!

[14] De definitie van een lichaam werd gegeven in *Discrete Wiskunde I*.

Bewijs. Aangezien $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$ een commutatieve groep is, is $\mathbb{K}, +$ een commutatieve groep met eenheidselement o. Uit Stelling 1.5.17 en Lemma 1.7.1 volgt dat ook $\mathbb{K}^*, \cdot$ een groep is (met $\mathbb{K}^*$ noteren we $\mathbb{K} \setminus \{o\}$) met eenheidselement e. We berekenen nu $(a + a') \cdot b$. Dit wordt bepaald door de verschuiving

$$h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}+\vec{a}'}h_{e,b} = h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}\tau_{\vec{a}'}h_{e,b} = h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,b}h_{e,b}^{-1}\tau_{\vec{a}'}h_{e,b} = \tau_{\overrightarrow{a\cdot b}}\tau_{\overrightarrow{a'\cdot b}},$$

wat bewijst dat $(a + a') \cdot b = a \cdot b + a' \cdot b$.

De rechtsdistributiviteit vereist een nieuwe definitie van vermenigvuldiging van homothetieën met centrum o, en een bewijsje dat die definitie overeenstemt met de optelling in $\mathbb{K}$. Dit is wat technisch en zullen we hier niet doen, maar laten we als oefening. $\square$

We hebben al opgemerkt dat de samenstelling van homothetieën met zelfde centrum niet noodzakelijk commutatief is. Dus $\mathbb{K}$ is niet noodzakelijk een veld. Dit is echter wel het geval wanneer het Axioma van Pappus geldt. We voeren dit nu in.

DEFINITIE 1.7.3. Beschouw een affiene ruimte van dimensie ten minste 2. Een *(vlakke) zeshoek* is een cyclisch geordend zestal punten $p_1, p_2, \ldots, p_6$, indices in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (modulo 6), de *hoekpunten* genoemd, alle in eenzelfde vlak gelegen, waarvoor p_i, p_{i+1} en p_{i+2} niet op eenzelfde rechte gelegen zijn, $i = 1, \ldots, 6$, samen met de rechten $\langle p_i, p_{i+1}\rangle$, $i = 1, \ldots, 6$, de *zijden* genoemd. De zijden $\langle p_i, p_{i+1}\rangle$ en $\langle p_{i+3}, p_{i+4}\rangle$, $i = 1, \ldots, 6$, worden *overstaand* genoemd. De zeshoek is *lineair* als de hoekpunten p_i, p_{i+2}, p_{i+4} op eenzelfde rechte gelegen zijn.

We hebben dan volgend axioma.

AXIOMA 1.7.4 (Affien Axioma van Pappus[15])**.** *Als in een lineaire zeshoek twee paar overstaande zijden evenwijdig zijn, dan is ook het derde paar overstaande zijden evenwijdig.*

Een affiene ruimte waarin het Affien Axioma van Pappus geldt wordt een *pappiaanse* affiene ruimte genoemd. De dimensie van een pappiaanse affiene ruimte moet sowieso minstens twee zijn.

STELLING 1.7.5. *In een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte is elke groep van homothetieën met vast centrum commutatief.*

Bewijs. Kies een vast punt o, en twee homothetieën φ_1 en φ_2 met centrum o. Neem twee rechten L en M door o, en kies een punt e op $L \setminus \{o\}$ en een punt e' op $M \setminus \{o\}$. Stel nu $a = e^{\varphi_1}$, $b = e^{\varphi_2}$, $a' = e'^{\varphi_1}$ en $b' = e'^{\varphi_2}$. Dan is $\langle a, a'\rangle \parallel \langle e, e'\rangle \parallel \langle b, b'\rangle$ wegens de definities

[15] Pappos van Alexandrië was een Grieks wiskundige die waarschijnlijk werkzaam was in de vroege vierde eeuw. Hij was voornamelijk werkzaam in de meetkunde. Er is weinig over hem geweten. Het was een periode van terugval op wiskundig vlak, met Pappos als één van de weinige lichtpunten.

van homothetie en equihomologie vanuit o. Stel $c_1 = e^{\varphi_1\varphi_2} = a^{\varphi_2}$ en $c_2 = e^{\varphi_2\varphi_1} = b^{\varphi_1}$. Dan is $\langle a, e'\rangle \parallel \langle c_1, b'\rangle$ en $\langle b, e'\rangle \parallel \langle c_2, a'\rangle$. De zeshoek met hoekpunten a, a', c_2, b', b, e' is dan lineair en heeft twee paar evenwijdige overstaande zijden, namelijk $\langle a, a'\rangle \parallel \langle b, b'\rangle$ en $\langle a', c_2\rangle \parallel \langle b, e'\rangle$. Het Affien Axioma van Pappus impliceert dat dan $\langle c_2, b'\rangle \parallel \langle e', a\rangle$. Dus, $\langle c_1, b'\rangle \parallel \langle c_2, b'\rangle$, waaruit dan volgt dat $c_1 = c_2$. De stelling volgt nu uit het eerste deel van Stelling 1.5.16. □

Met de bovenstaande notatie hebben we nu de volgende stelling.

STELLING 1.7.6. *In een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte is $\mathbb{K}$ een veld.*

Bewijs. Wegens Lemma 1.7.1 geldt voor alle $a, b \in \mathbb{K}^*$ dat

$$h_{e,b\cdot a} = h_{e,b}h_{e,a} = h_{e,a}h_{e,b} = h_{e,a\cdot b}\ .$$

De rechtsdistributiviteit van de vermenigvuldiging ten opzichte van de optelling is nu wel gemakkelijk te bewijzen. Inderdaad $a \cdot (b + b') = (b + b') \cdot a = b \cdot a + b' \cdot a = a \cdot b + a \cdot b'$ voor $a, b, b \in \mathbb{K}$. □

A priori zou het op dit moment nog mogelijk zijn dat twee verschillende rechten door het punt o verschillende velden induceren. We tonen nu aan dat dit niet het geval is.

STELLING 1.7.7. *Als $\mathbb{K}'$ een rechte door o is en e' een punt van $\mathbb{K}' \setminus \{0\}$, met bovenstaande notatie en $\mathcal{A}$ een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte, dan kan het veld $\mathbb{K}', +, \cdot$ op analoge wijze (waarbij e' de rol van e neemt) geconstrueerd worden en is dit isomorf met het veld $\mathbb{K}, +, \cdot$.*

Bewijs. Onderstel dat $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}'$ twee verschillende rechten zijn en noteer de rechte door e en e' als L. De afbeelding $\mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ die een punt $p \in \mathbb{K}$ afbeeldt op het snijpunt van $\mathbb{K}'$ en de rechte door p evenwijdig aan L noteren we als θ. Het is direct duidelijk dat θ een bijectie is.

Kies nu $a, b \in \mathbb{K}$ willekeurig. Het punt $a^\theta + b^\theta$ ligt op $\mathbb{K}'$ en voldoet aan $\overrightarrow{oa^\theta} + \overrightarrow{ob^\theta} = \overrightarrow{o(a^\theta + b^\theta)}$. Gebruik makend van de stelling van Chasles-Mobiüs (Stelling 1.6.15) vinden we dat

$$\overrightarrow{o(a^\theta + b^\theta)} = \overrightarrow{oa^\theta} + \overrightarrow{ob^\theta} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{aa^\theta} + \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{bb^\theta} = \overrightarrow{o(a + b)} + \overrightarrow{aa^\theta} + \overrightarrow{bb^\theta}\ .$$

Aangezien $\langle a, a^\theta\rangle$ en $\langle b, b^\theta\rangle$ allebei evenwijdig zijn met L moet $a^\theta + b^\theta$ het punt op $\mathbb{K}'$ zijn dat op de rechte door $a + b$ evenwijdig aan L ligt, maar dit is per definitie het punt $(a + b)^\theta$. We besluiten dat $(a + b)^\theta = a^\theta + b^\theta$.

Het punt $a' = e'^{h_{e,a}}$ moet op $\mathbb{K}'$ liggen en voor dit punt geldt dat $\langle a, a'\rangle \parallel \langle e, e'\rangle = L$ omdat $h_{e,a}$ een dilatatie is. Dus is $a' = a^\theta$ en bijgevolg geldt dat $h_{e,a} = h_{e',a^\theta}$. Analoog is $h_{e,b} = h_{e',b^\theta}$ en $h_{e,a\cdot b} = h_{e',(a\cdot b)^\theta}$. Hieruit volgt dan onmiddellijk dat $h_{e',a^\theta}h_{e',b^\theta} = h_{e',(ab)^\theta}$, wat via Lemma 1.7.1 equivalent is met $a^\theta b^\theta = (ab)^\theta$. We besluiten dat θ een isomorfisme tussen $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}'$ is.

Als $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$ maar $e \neq e'$ volgt het isomorfisme door eerst over te gaan op een rechte $\mathbb{K}''$ verschillend van beide. $\square$

De optelling defineerden we tot nu toe enkel voor vectoren en voor willekeurige punten op de vaste rechte $\mathbb{K}$, waarbij we o vast gekozen hadden. We breiden dit begrip nu verder uit, nog steeds voor die vaste o.

DEFINITIE 1.7.8. Voor twee punten a en b definiëren we de som $a + b$ als het punt c waarvoor $\overrightarrow{oc} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob}$, of dus, wegens de definitie van som van vectoren,

$$\tau_{\overrightarrow{a+b}} = \tau_{\vec{a}}\tau_{\vec{b}},$$

waarbij we dezelfde notatie gebruiken als voor de punten in $\mathbb{K}$.

OPMERKING 1.7.9. Noteer de puntenverzameling van de affiene ruimte $\mathcal{A}$ als $\mathcal{P}$. Op bovenstaande manier is $\mathcal{P}, +$ een commutatieve groep isomorf met $\mathrm{Tra}(\mathcal{A})$. Deze groep hangt enkel af van het punt o en noteren we daarom als $\mathcal{P}_o$. We noemen o de *oorsprong* en we zeggen vaak dat we een oorsprong gekozen hebben.

We hebben nu de volgende hoofdstelling.

STELLING 1.7.10 (Hoofdstelling van de Affiene Meetkunde)**.** *Als $\mathcal{A}$ een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte is, met puntenverzameling $\mathcal{P}$ en $\mathbb{K}$ zoals hierboven, dan is de groep $\mathcal{P}_o, +$ (met betrekking tot de keuze van het punt o) een $\mathbb{K}$-vectorruimte waarbij de scalaire vermenigvuldiging $\mathbb{K} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} : (\lambda, a) \mapsto \lambda a$ vastgelegd wordt*[16] *door $h_{e,\lambda}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,\lambda} = \tau_{\overrightarrow{\lambda a}}$.*

Bewijs. We hoeven slechts de verbindingseigenschappen van de scalaire vermenigvuldiging na te gaan, namelijk dat $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ en alle $a \in \mathcal{P}$, dat $ea = a$ voor alle $a \in \mathcal{P}$, en dat de scalaire vermenigvuldiging distributief werkt tegenover zowel de optelling in $\mathbb{K}$ als die in $\mathcal{P}$. De eerste twee en de distributiviteit tegenover de optelling $\mathcal{P}$ volgen onmiddellijk uit de definitie en Lemma 1.7.1.

Kies nu $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ en $a \in \mathcal{P}$. We moeten nog aantonen dat $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$. Kies een punt $e^* \in \langle o, a\rangle = \mathbb{K}'$. Dan bestaat er punten $\lambda^*, \mu^* \in \langle 0, a\rangle$ waarvoor $h_{e,\lambda} = h_{e^*,\lambda^*}$ en $h_{e,\mu} = h_{e^*,\mu^*}$. Analoog als in Lemma 1.7.1 hebben we dat $h_{e^*,\lambda^*}h_{e^*,\mu^*} = h_{e^*,\lambda^*\mu^*}$. Merk nu op dat de scalaire vermenigvuldiging $(\lambda + \mu)a$ overeenkomt met de gewone vermenigvuldiging $(\lambda + \mu)a$ in $\mathbb{K}'$ en pas Stelling 1.7.7 toe. We laten de details als oefening. $\square$

OPMERKING 1.7.11. Voor een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte $\mathcal{A}$ met puntenverzameling $\mathcal{P}$ en $o \in \mathcal{P}$, is $\mathcal{P}_o$ een vectorruimte. Dankzij Lemma 1.7.7 is het onderliggende veld eenduidig bepaald binnen deze context.

[16]merk op dat we weer Stelling 1.5.13 gebruiken om vast te stellen dat dit goed gedefinieerd is.

STELLING 1.7.12. *Als o een vast punt in een desarguesiaanse, pappiaanse affiene ruimte is, $\mathbb{K}$ zoals voorheen, en $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{o\}$ en a een punt is, dan is het punt λa gelijk aan het beeld van a onder $h_{e,\lambda}$.*

Bewijs. Het beeld van o onder $h_{e,\lambda}^{-1}\tau_{\vec{a}}h_{e,\lambda}$ is duidelijkerwijs het beeld van a onder $h_{e,\lambda}$, en per definitie is dit λa. □

OPMERKING 1.7.13. Bovenstaande bepaalt ook een scalaire vermenigvuldiging met de vectoren. Inderdaad, we kunnen voor $\lambda \in \mathbb{K}$, en $a, b, c \in \mathcal{P}$ stellen dat $\lambda\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{oc}$ als $\lambda(b - a) = c$. We laten het bewijs dat dit goed gedefinieerd is over als oefening.

OPMERKING 1.7.14. We kunnen ons afvragen wat er gebeurt in dimensie 2 (herinner je dat elk affiene ruimte van dimensie ten minste 3 desarguesiaans is). Het is immers niet zo dat uit elk affien vlak een vectorruimte kan geconstrueerd worden, met andere woorden, niet elk affien vlak bevat genoeg translaties en homothetieën om er een lichaam (laat staan een veld) uit te definiëren. De invloedrijke wiskundige David Hilbert[17] beschreef in 1899 een voorbeeld van zo een vlak, dat achteraf het *Hilbertvlak* werd genoemd. Onderstel dat $\mathcal{E}$ de ellips is in $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd door $X^2 + 4Y^2 = 1$. Stel $x = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Definieer nu een punt-rechtemeetkunde Γ als volgt:

- de punten zijn deze van $\mathbb{R}^2$;
- de rechten zijn enerzijds de rechten van $\mathbb{R}^2$ waarop ten hoogste één punt van $\mathcal{E}$ ligt, en anderzijds rechten van de vorm "$[L] \cup B_L$", waarbij L een rechte is van $\mathbb{R}^2$ die $\mathcal{E}$ in twee verschillende punten u, v snijdt, $[L]$ het deel van L is dat niet in het inwendige van $\mathcal{E}$ ligt, en B_L de boog is van de cirkel door u, v en x, die in het inwendige van de ellips ligt. (Indien x, u en v collineair zijn, bestaat deze cirkel niet, en nemen we gewoon de rechte door u en v.)

Ga zelf als oefening na dat Γ een affien vlak is.

Veel andere oneindige klassen van affiene vlakken (zelfs eindige voorbeelden) die niet over een veld gedefinieerd zijn, zijn gekend.

[17]David Hilbert (1862–1943) was een Duitse (Pruisische) wiskundige. Hij is een van de grondleggers van de wiskundige logica, en was actief in algebra (invariantentheorie) en de functionaalanalyse. Zeer belangrijk was zijn bijdrage aan de axiomatiek van de meetkunde. Als één van de belangrijkste wiskundigen (zo niet dé) rond de voorlaatste eeuwwisseling drukte hij met het zogenaamde Hilberts programma een belangrijke stempel op de wiskunde; het formalisme is er het belangrijkste gevolg van. Hilberts *Grundlagen der Mathematik* zette zijn ideeën daaromtrent uiteen. De kerngedachte *"Wir mussen wissen. Wir werden wissen"* staat ook op zijn grafsteen. In 1900 stelde hij op het tweede *Internationaal Wiskundecongres* zijn bekende lijst van 23 problemen voor; enkele zijn nog steeds onopgelost.

OPMERKING 1.7.15. We weten dat affiene ruimten van dimensie ten minste drie desarguesiaans zijn, en soms pappiaans zijn. In de laatste geval zijn ze afkomstig van een vectorruimte. Affiene vlakken kunnen niet-desarguesiaans of niet-pappiaans zijn. Men kan echter bewijzen dat de Affiene Stelling van Desargues volgt uit het Affien Axioma van Pappus (zie oefeningenlessen), zodat een pappiaans affien vlak automatisch een desarguesiaans vlak is. In de voorwaarde van de Hoofdstelling van de Affiene Meetkunde kunnen we dus de voorwaarde desarguesiaans weglaten. Er bestaan wel niet-pappiaanse, desarguesiaanse vlakken (gedefinieerd over een lichaam dat geen veld is). Deze hebben echter allemaal oneindig veel punten en rechten (als gevolg van de kleine stelling van Wedderburn[18]).

1.8 Vectorruimten als affiene ruimten

We hebben in de voorgaande paragraaf bewezen dat elke pappiaanse affiene ruimte afkomstig is van een vectorruimte. We gaan in deze paragraaf dat verband nader bestuderen. Achtereenvolgens bekijken we deelruimten, evenwijdigheid en dimensie. Maar eerst bewijzen we dat elke vectorruimte V van dimensie ten minste 2 een affiene ruimte definieert, meer precies dat $\mathrm{AG}(V)$, zoals ingevoerd in Voorbeeld 1.2.15, inderdaad een affiene ruimte of een affien vlak is.

STELLING 1.8.1. *Beschouw een vectorruimte W van dimensie $d \geq 2$. Als $d = 2$, dan is $\mathrm{AG}(W)$ een affien vlak. Als $d \geq 3$, dan is $\mathrm{AG}(W)$ een affiene ruimte. In beide gevallen is $\mathrm{AG}(W)$ pappiaans.*

Bewijs. Noteer het onderliggend veld van W als $\mathbb{K}$.

We bewijzen dit eerst voor $d = 2$. We gaan de axioma's na. De notatie $\langle \cdot \rangle$ wordt hier gebruikt in de context van vectorruimten voor het begrip span$(\cdot)$.

(AV1) Als v en w twee verschillende punten (vectoren) zijn, dan bevat de affiene 1-dimensionale deelruimte $v + \langle w - v \rangle$ deze twee vectoren. Onderstel dat $a + \langle b \rangle$ een affiene 1-dimensionale deelruimte is die v en w bevat. Dan bestaan er elementen $k, \ell \in \mathbb{K}$ met $v = a + kb$ en $w = a + \ell b$. Daar $v \neq w$ is ook $k \neq \ell$. We vinden $b = \frac{1}{k-\ell}(v - w)$ en $a = \frac{1}{k-\ell}(kw - \ell v)$. Bijgevolg is $\langle b \rangle = \langle v - w \rangle$ en $v - a = \frac{k}{k-\ell}(v - w) \in \langle w - v \rangle$. Lemma 2.5.10 uit de cursus *Lineaire Algebra en Meetkunde I* toont aan dat $v + \langle w - v \rangle = a + \langle b \rangle$.

[18]Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948) was een Schots wiskundige, voornamelijk werkzaam in de algebra. Hij was vele jaren verbonden aan Princeton University. Hij is vooral bekend van zijn kleine stelling (elk eindig lichaam is een veld) en van de naar hem genoemde stellingen voor lichamen en enkelvoudige ringen. Tijdens de Eerste Wereldoorlog onderbrak hij zijn academische carrière en vocht hij in Frankrijk met het Britse leger. Hij had er de rang van kapitein.