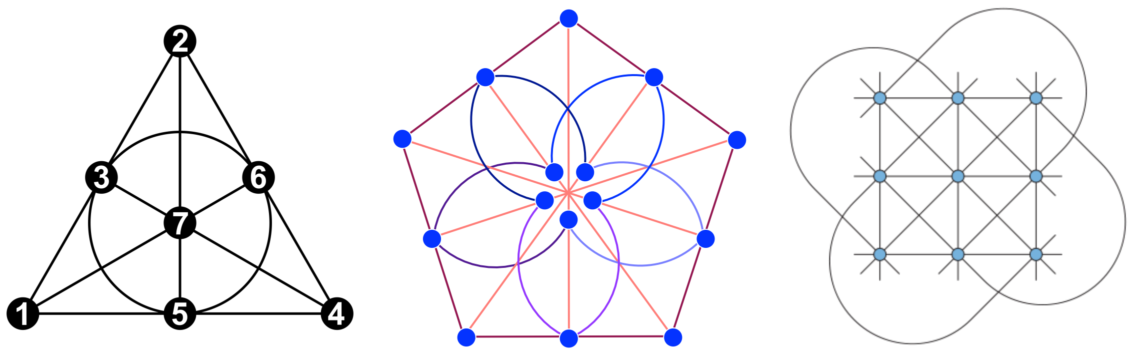
Deel A

Affiene ruimten

A.1 Incidentiemeetkundes

Affiene ruimten, die we hieronder nog veel zullen tegenkomen, zijn nog “vertrouwd” en “realistisch” (wat dat ook moge betekenen), tenminste wanneer we ze beschouwen in 2 of 3 dimensies en over de reële getallen. We geven hieronder enkele voorbeelden van exotischere varianten, die ook dienen ter illustratie van meer abstracte voorstellingen dan deze in de reële ruimte.

Opgave A.1. Beschouw de volgende punt-rechte meetkunden (m.a.w., incidentiemeetkundes van rang 2). Op de tekening worden de punten logischerwijs voorgesteld door bolletjes, de rechten door de lijnen. De rechten zijn niet noodzakelijk recht! Ze zijn echter wel vloeiend: bij scherpe hoeken start een nieuwe rechte. Dit is allemaal kwestie van afspraak.

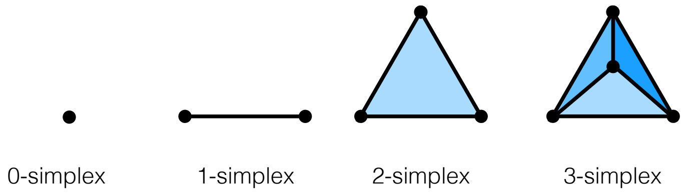


Links zien we een meetkunde met 7 punten en 7 rechten, die men het Fanovlak noemt. Ga na dat dit geen affien vlak is: geef de axioma’s die gelden en deze die niet gelden. Kan je een andere wetmatigheid opmerken?

Centraal staat een meetkunde met 15 punten en 15 rechten afgebeeld, dit is een “GQ(2,2)” met de GQ van “Generalised Quadrangle”. Ga wederom na dat dit geen affien vlak is door alle axioma’s na te gaan. Kan je achterhalen aan welke eigenschap deze meetkunde zijn naam dankt?

Rechts hebben we voor de verandering een affien vlak *van orde drie*: op elke rechte liggen drie punten. Ga na dat de axioma’s van een affien vlak inderdaad voldaan zijn.

Opgave A.2. Gegeven de $n+1$ standaardbasisvectoren $e_0, \ldots, e_n$ van de vectorruimte $\mathbb{R}^{n+1}$, met $n \in \mathbb{N}$. De verzameling $\{(x_0, \ldots, x_n) \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \text{ met } x_i \geqslant 0\}$ is het convexe omhulsel van de $n+1$ punten $e_0, \ldots, e_n$. Dit noemen we een *n-simplex* en is een n-dimensionale variant van een driehoek (wat een 2-simplex is).



Beschouw de volgende incidentiemeetkunde van rang n: de elementen van type k, met $k \in \{0, ..., n-1\}$ zijn de k-simplexen die deel zijn van de n-simplex (we nemen hiervoor dus $k+1$ punten uit $\{e_0, \ldots, e_n\}$); incidentie wordt gegeven door inclusie.

(a) Ga na welke axioma's van affiene ruimten er gelden (gesteld dat de rang minstens 3 is).

(b) Beschouw de punt-rechte meetkunde bekomen door bovenstaande incidentiemeetkunde te restringeren tot type 0 (punten) en type 1 (rechten). Ga na dat dit voor $n = 3$ een affien vlak levert en argumenteer waarom dit niet het geval is wanneer $n \neq 3$.

A.2 Axioma's van een affiene ruimte

Opgave A.3. Beschouw een affien vlak $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$. Stel dat L een rechte is met ℓ punten (hierbij is ℓ een natuurlijk getal groter dan 2).

(a) Toon aan dat er juist $\ell + 1$ rechten door elk punt $p \notin L$ gaan.

(b) Stel dat niet alle punten op twee rechten gelegen zijn. Stelling 1.2.4. zegt ons dat elke rechte ℓ punten bevat. Bewijs nu **op een andere manier** dat elke rechte ℓ punten bevat, steunende op (a).

(c) Toon aan dat ook elk punt $p \in L$ op juist $\ell + 1$ rechten gelegen is.

(d) Toon aan dat $|\mathcal{P}| = \ell^2$ en $|\mathcal{L}| = \ell(\ell + 1)$.

Tip: Maak een tekening.

Opgave A.4. Geef, voor elk van de axioma's (AV1), (AV2) en (AV3), een voorbeeld van een structuur $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ die niét aan dit axioma voldoet maar wel aan de overige twee.

Opgave A.5. Herinner u uit LAM I dat elk (affien) vlak in de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ te schrijven is als $v+D = \{v+d \mid d \in D\}$, waarbij v een vector in $\mathbb{R}^3$ is en D een twee-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^3$, die we de richtingsruimte noemen. Gegeven zijn n richtingsruimten $D_1, \ldots, D_n$, met $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

We beschouwen nu de volgende structuur: $\mathcal{P}$ is de verzameling van alle punten in $\mathbb{R}^3$ en $\mathcal{L}$ is een deelverzameling van de vlakken in $\mathbb{R}^3$: we nemen alle vlakken *behalve* zij die D_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, als richtingsruimte hebben. Toon aan dat $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ voldoet aan (AV2) en (AV3), maar niet aan (AV1). Toon ook aan dat $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ wel aan een minder strikte vorm van (AV1) voldoet: "Elk paar verschillende punten is bevat in een (niet noodzakelijk unieke) rechte."

We hebben hiermee aangetoond dat we het axioma (AV1) niet kunnen verzwakken tot bovenstaand axioma.

A.3 Parallellisme, affiene deelruimten en dimensie

Opgave A.6. We bewijzen Stelling 1.3.10.

(a) Zij L_1 en L_2 twee verschillende rechten van een affiene ruimte. Toon aan dat L_1 en L_2 ofwel *snijdend* zijn, ofwel *parallel* zijn, ofwel *scheef* zijn.

(b) Zij V_1 en V_2 twee verschillende vlakken in een affiene ruimte. Toon aan dat $V_1 \cap V_2$ ofwel één rechte is, ofwel een uniek punt is, ofwel ledig is.

  (i) Gesteld dat $|V_1 \cap V_2| = 1$, ga na dat geen enkele rechte van V_2 parallel is aan V_1.

  (ii) Controleer eveneens dat, wanneer $|V_1 \cap V_2| = 0$, dat de verzameling van rechten in V_2 die parallel zijn aan V_1 ofwel ledig is, ofwel precies één parallelklasse van V_2 is, ofwel alle rechten van V_2 zijn.

(c) Ga voor jezelf na dat Stelling 1.3.10 bewezen is (voor de onderlinge ligging van rechten en vlakken verwijzen we naar Stelling 1.2.10).

Opgave A.7. Zij L en M scheve rechten in een affiene ruimte, m.a.w., L en M zijn niet snijdend noch parallel. Toon aan dat er door M een uniek vlak gaat dat parallel is aan L.

Opgave A.8. Zij $\mathcal{A}$ een affiene ruimte van dimensie 3.

(a) Zij L een rechte en V een vlak waarvoor geldt dat $L \cap V = \emptyset$. Toon aan dat $L \| V$.

(b) Zij V_1 en V_2 verschillende vlakken die een punt gemeen hebben. Toon aan dat V_1 en V_2 een rechte gemeen hebben.

(c) Zij V_1 en V_2 vlakken waarvoor geldt dat $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Toon aan dat $V_1 \| V_2$.

Opgave A.9. Zij $\mathcal{A}$ een affiene ruimte van dimensie 3 en zij L en M scheve rechten. Zij x een willekeurig punt van $\mathcal{A}$ dat niet op een rechte ligt die een punt van L verbindt met een punt van M. Toon aan dat x ofwel bevat is in het unieke vlak α_L door L parallel met M, ofwel in het unieke vlak α_M door M parallel met L.

Tip: Beschouw de onderlinge ligging van het vlak $\langle x, M\rangle$ en de rechte L.

Opgave A.10. Zij D, D_1 en D_2 affiene deelruimten van een affiene ruimte $\mathcal{A}$ en zij x een punt van $\mathcal{A}$, $x \notin D$. Definieer D_x als de affiene deelruimte verkregen door de evenwijdigen te beschouwen door x aan rechten uit D (cf. Stelling 1.4.14). Definieer D_{12} als

$$D_1 \cup D_2 \cup \bigcup_{x_i \in D_i} \langle x_1, x_2\rangle.$$

(a) Toon aan dat D_x en D sterk parallel zijn.

(b) Toon aan dat als D_{12} een affiene deelruimte is en D_1 en D_2 parallel zijn, dat dan D_1 en D_2 sterk parallel zijn.

(c) Stel dat D_1 en D_2 sterk parallel zijn. Toon aan dat D_{12} een affiene deelruimte is.

Tip: Toon aan dat $D_{12} = \langle D_1, x_2 \rangle$ met $x_2 \in D_2$.

A.4 Vrije en voortbrengende delen

Opgave A.11. Zij $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ een affiene ruimte en stel dat $S = \{x_1, \ldots, x_{d+1}\} \subseteq \mathcal{P}$ een vrij deel is. Stel $D = \langle S \rangle$ en zij x een punt dat niet bevat is in D. Toon aan dat de affiene ruimte $\langle D, x \rangle$ gelijk is aan $\langle S \cup \{x\} \rangle$ en dat diens dimensie $d+1$ is.

Opgave A.12. Beschouw een affiene ruimte $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{V})$ met een basis S en een willekeurige $z \in \mathcal{P}$ met $z \notin S$. Zij S' een deelverzameling van S maximaal met de eigenschap dat $z \notin \langle S' \rangle$ (dus voor alle S'' met $S' \subsetneq S'' \subseteq S$ geldt dat $z \in \langle S'' \rangle$). Toon aan dat $\{z\} \cup S'$ een basis voor $\mathcal{A}$ is en dat dus $|S'| = |S| - 1$.

Opgave A.13. Beschouw een affiene ruimte $\mathcal{A}$ met eindige dimensie d.

(a) Zij S een eindige voorbrengende verzameling voor $\mathcal{A}$. Toon aan dat er een deelverzameling van S bestaat die een basis is voor $\mathcal{A}$.

(b) Zij S een (eventueel oneindige) voorbrengende verzameling voor $\mathcal{A}$. Toon aan dat er een deelverzameling van S bestaat die een basis is voor $\mathcal{A}$.

(c) Zij S een vrije verzameling in $\mathcal{A}$. Toon aan dat S kan worden uitgebreid tot een basis voor $\mathcal{A}$.

Opgave A.14. Zij D een affiene deelruimte van een eindigdimensionale affiene ruimte $\mathcal{A}$. Toon aan dat $\dim D \leqslant \dim A$, waarbij gelijkheid optreedt als en slechts als $D = A$.

Opgave A.15. Zij S een verzameling punten van een affiene ruimte waarin elke rechte minstens drie punten bevat. We definiëren $f(S) = \cup_{x,y \in S} \langle x, y \rangle$. Toon aan dat

(a) Als D een deelruimte is zodat $S \subseteq D$, dan $f(S) \subseteq D$.

(b) $f(S) = S$ als en slechts als S een deelruimte is.

(c) $S \cup f(S) \cup f(f(S)) \cup \ldots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^i(S)$ is de doorsnede van alle deelruimten die S bevatten, m.a.w., gelijk aan $\langle S \rangle$.

(d) Als $\dim(\langle S \rangle) < \infty$, dan hebben we $\min\{j \mid \bigcup_{i=0}^{j} f^i(S) = \langle S \rangle\} \leqslant \dim(\langle S \rangle)$.

A.5 Stelling van Desargues en dilataties

Opgave A.16. Zij p, p^θ punten van een affiene ruimte $\mathcal{A}$, met θ een dilatatie en $p \neq p^\theta$.

(a) Stel dat θ een translatie is, construeer het beeld van een punt $q \notin \langle p, p^\theta \rangle$.

(b) Stel nu dat θ een homothetie met centrum c is, construeer het beeld van een punt $q \notin \langle p, p^\theta \rangle$.

(c) Pas dit nu toe op de vectorruimte $\mathbb{R}^2$ (als we aan de oorsprong geen speciale rol hechten is dit een affien vlak) om het beeld te bepalen van de driehoek ABC met $A = (0,0)$, $B = (1,1)$ en $C = (2,0)$ onder volgende dilataties: de translatie die A afbeeldt op C, en de homothetie met centrum A die C afbeeld op $C' = (4,0)$.

Opgave A.17. Zij π een permutatie van de puntenverzameling $\mathcal{P}$ van een affiene ruimte $\mathcal{A}$ van dimensie minstens 3.

(a) Stel dat elke rechte minstens drie punten heeft en dat π rechten op rechten afbeeldt. Toon aan dat π ook vlakken op vlakken afbeeldt.

(b) Stel nu dat π vlakken op vlakken afbeeldt. Toon aan dat π ook rechten op rechten afbeeldt.

(c) Gesteld dat π rechten op parallelle rechten afbeeldt, toon aan dat π een dilatatie is.

Opgave A.18. Stel dat θ_1 en θ_2 homothetieën zijn met respectieve centra c_1 en c_2 met $c_1 \neq c_2$. Toon aan dat, als $\theta_1\theta_2$ een homothetie is, dat het centrum van deze homothetie dan op de rechte $\langle c_1, c_2 \rangle$ ligt.

Opgave A.19. Zij $\Delta_1 = \Delta abc$ en $\Delta_2 = \Delta xyz$ driehoeken in een affien vlak $\mathcal{A}$. Beschouw volgende eigenschap (in een affiene ruimte van *dimensie ten minste 3* is deze steeds geldig, zie Stelling 1.6.2).

(Des) Als Δ_1 en Δ_2 evenwijdig zijn, dan zijn ze ook centraal.

Beschouw ook volgende twee eigenschappen (samen vormen zij in een affiene ruimte van *dimensie ten minste 3* "De omgekeerde affiene stelling van Desargues").

(OD1) Als Δ_1 en Δ_2 *oneigenlijk* centraal zijn en twee paar evenwijdige zijden hebben, dan zijn Δ_1 en Δ_2 evenwijdig.

(OD2) Als Δ_1 en Δ_2 *eigenlijk* centraal zijn en twee paar evenwijdige zijden hebben, dan zijn Δ_1 en Δ_2 evenwijdig.

Bewijs dat, als (OD2) geldt in $\mathcal{A}$, dan ook (Des). Toon hiervoor aan dat, als Δ_1 en Δ_2 evenwijdige driehoeken zijn in $\mathcal{A}$, en p een punt is dat tot twee van de rechten $\langle a, x \rangle$, $\langle b, y \rangle$, $\langle c, z \rangle$ behoort, dat p dan tot alle drie deze rechten behoort.

Hint. Zij $p = \langle a, x \rangle \cap \langle b, y \rangle$. Toon aan dat $c \in \langle p, z \rangle$.

Opgave A.20. Zij $\Delta_1 = \Delta abc$ en $\Delta_2 = \Delta xyz$ driehoeken in een affiene ruimte $\mathcal{A}$ van dimensie ten minste 3. Stel dat Δ_1 en Δ_2 oneigenlijk centraal zijn en dat $\langle a,c\rangle$ evenwijdig is met $\langle x,z\rangle$, dat $\langle b,c\rangle \cap \langle y,z\rangle = \{p\}$ en $\langle a,b\rangle \cap \langle x,y\rangle = \{q\}$ voor punten p en q met $p \neq q$.

Gesteld dat Δ_1 en Δ_2 niet in eenzelfde vlak gelegen zijn, toon aan dat $\langle p,q\rangle \| \langle a,c\rangle$.

Hint. Merk op dat $\langle p,q\rangle$ bevat is in $\langle a,b,c\rangle$ en in $\langle x,y,z\rangle$.

Opgave A.21. Een Moulton-vlak wordt als volgt gedefinieerd. De punten zijn deze van $\mathbb{R}^2$, de rechten zijn deze van $\mathbb{R}^2$ waarbij elke rechte $L_{a,b} = \{(x, ax+b) \mid x \in \mathbb{R}\}$ met $a < 0$ vervangen wordt door de gebroken lijn

$$\{(x, 2ax+b) \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\} \cup \{(x, ax+b) \mid x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}.$$

Dit vlak is een affien vlak (overtuig jezelf hiervan). Toon aan dat het niet desarguesiaans is.

A.6 Axioma van Pappus, lichamen en velden

Opgave A.22. Zij $\mathcal{A}$ een affien vlak waarin het axioma van Pappus voldaan is (dus een pappiaans vlak). Bewijs op meetkundige wijze dat $\mathcal{A}$ dan ook desarguesiaans is, m.a.w., dat eigenschap (Des) geldt. Het volstaat wegens Oefening A.19 om eigenschap (OD2) aan te tonen. We starten met twee eigenlijk centrale driehoeken Δabc en $\Delta a'b'c'$ met $\langle a,b\rangle \| \langle a',b'\rangle$ en $\langle b,c\rangle \| \langle b',c'\rangle$.

(a) Kies een punt $p \in \langle a,c\rangle$ zo dat $\langle o,p\rangle \| \langle b,c\rangle$ en neem $q \in \langle o,b\rangle$ zo dat $\langle p,q\rangle \| \langle a,b\rangle$. Toon aan dat $\langle o,a\rangle \| \langle q,c\rangle$.

(b) Toon aan dat het punt r, dat gedefinieerd wordt als de doorsnede van de rechten $\langle p,a'\rangle$ en $\langle b',c'\rangle$, gelegen is op $\langle q,c\rangle$.

(c) Toon tot slot aan dat $\langle a,c\rangle$ evenwijdig is aan $\langle a',c'\rangle$.