1.5 Samenhang

In de cursus Analyse II werd een *open gebied* U in $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd als een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ met de eigenschap dat elke twee punten $x, y \in U$ verbonden kunnen worden door een gebroken lijn die volledig in U ligt. Een typisch voorbeeld van een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ die geen gebied is, is de unie van twee disjuncte open ballen. Dit geldt in feite voor de disjuncte unie van twee willekeurige niet-lege open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$:

Eigenschap 1.5.1. *Een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ is een gebied als en slechts als U niet de disjuncte unie is van twee niet-lege open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$.*

Bewijs. $\Rightarrow$: veronderstel dat $U = V \sqcup W$, met V, W niet-lege, open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$. Zij f de afbeelding $U \to \mathbb{R}$ waarvoor $f(x) = 1$, als $x \in V$ en $f(x) = -1$, als $x \in W$. Dan is f continu, maar f neemt niet de waarde 0 aan, in strijd met de tussenwaardestelling (stelling van Bolzano, cursus Analyse II).
$\Leftarrow$: veronderstel dat U geen gebied is. Zij $x \in U$. Zij V de verzameling van alle $y \in U$ die met x kunnen verbonden worden door een gebroken lijn bevat in U. Dan is V open, want als $y \in V$, dan bestaat $r > 0$ zo dat $B(y, r) \subseteq U$. Elk punt in $B(y, r)$ kan met y verbonden worden door een lijnstuk bevat in U, zodat $B(y, r) \subseteq V$. Ook is $W := U \setminus V$ open, want als $y \in W$, dan bestaat $r > 0$ zo dat $B(y, r) \subseteq U$. Zou $z \in B(y, r) \cap V$, dan zou (analoog als hierboven) ook $y \in V$, een strijdigheid. Bijgevolg is $B(y, r) \subseteq W$. □

We vinden dus opnieuw een verrassend eenvoudige karakterisering a.d.h.v. open verzamelingen. We veralgemenen dit tot de volgende topologische eigenschap:

Definitie 1.5.2. Een topologische ruimte X is **samenhangend** als X niet de disjuncte unie is van twee niet-lege open deelverzamelingen van X, of, equivalent, als $\emptyset$ en X de enige deelverzamelingen van X zijn die tegelijkertijd open en gesloten zijn.

Samenhang is dus (bij definitie) een eigenschap van topologische ruimten (onafhankelijk van de topologische ruimte waarin ze als deelruimte bevat is, anders dan de begrippen *open* of *gesloten*). Een deelverzameling V van een topologische ruimte X is (bij definitie) samenhangend als ze samenhangend is als deelruimte.
Bovendien laat dit begrip opnieuw beknopte en elegante bewijsvoeringen toe, in dit geval om globale informatie af te leiden uit lokale informatie:

Eigenschap 1.5.3. *Zij X een samenhangende topologische ruimte, A een verzameling en f een afbeelding $X \to A$. Als f lokaal constant is (d.w.z., voor elke $x \in X$ bestaat een omgeving van x waarop f constant is), dan is f constant op heel X.*

Bewijs. Kies $x \in X$ en noem
$$V := \{y \in X : f(y) = f(x)\}.$$
Dan is V open, want als $y \in V$, dan bestaat een omgeving U van y waarop f constant is (en dus de waarde $f(y) = f(x)$ aanneemt), zodat $U \subseteq V$. Analoog is $X \setminus V = \{y \in X : f(y) \neq f(x)\}$ open. Omdat $V \neq \emptyset$ en X samenhangend is, is $V = X$. □

Opmerking 1.5.4. Het bewijs van de vorige eigenschap voor een open gebied $X \subseteq \mathbb{R}^n$ is opnieuw minder technisch dan een direct argument via gebroken lijnen. We zien nu de essentie van situaties waarin we globale uit lokale informatie kunnen afleiden d.m.v. samenhang: een eigenschap $P(x)$

(van elementen $x \in X$) geldt globaal op een samenhangende verzameling X zodra $\{x \in X : P(x)\}$ en $\{x \in X : \neg P(x)\}$ (doorgaans wegens een lokaal argument) open zijn.

Ook een willekeurig gebied in $\mathbb{R}^n$ (in Analyse II gedefinieerd als de unie van een open gebied met delen van haar rand) is samenhangend:

Lemma 1.5.5. *Zij X een topologische ruimte en $U \subseteq Y \subseteq X$. Dan is de sluiting van U in Y gelijk aan $\overline{U} \cap Y$ (hierbij is $\overline{U}$ de sluiting in X).*

Bewijs. Oefening (D)/(B). □

Eigenschap 1.5.6. *Zij U een samenhangende deelverzameling van een topologische ruimte X. Als $U \subseteq U' \subseteq \overline{U}$, dan is ook U' samenhangend.*

Bewijs. Veronderstel dat U' niet samenhangend is. Dan is $U' = V \sqcup W$ met V, W niet-lege open deelverzamelingen in U'. Dan zijn $V \cap U$ en $W \cap U$ open in U (als doorsnede van U met een open verzameling in U') en disjunct. Zij $x \in V$. Omdat x behoort tot de sluiting van U in de deelruimte U' (lemma 1.5.5), is $V \cap U \neq \emptyset$. Analoog is $W \cap U \neq \emptyset$. Bijgevolg is $U = (V \cap U) \sqcup (W \cap U)$ niet samenhangend, strijdig met het gegeven. □

Eigenschap 1.5.7. *$V \subseteq \mathbb{R}$ is samenhangend als en slechts als V een interval is.*

Bewijs. $\Rightarrow$: als V geen interval is, dan bestaan $a < c < b \in \mathbb{R}$ zo dat $a, b \in V$ en $c \notin V$ (karakterisering van intervallen, cursus Analyse I). Dan is $V = U \sqcup W$ met $U := V \cap \,]-\infty, c[$ en $W := V \cap \,]c, +\infty[$. Vermits U, W niet-leeg en open zijn in V, is V niet samenhangend.
$\Leftarrow$: als V een interval is, dan is V° een open interval, en dus samenhangend wegens eigenschap 1.5.1. Omdat $V^\circ \subseteq V \subseteq \overline{V^\circ}$, is ook V samenhangend door eigenschap 1.5.6. □

Stelling 1.5.8 (Samenhang is een continue invariant)**.** *Zij X, Y topologische ruimten. Zij f een continue afbeelding $X \to Y$. Als X samenhangend is, dan is ook $f(X)$ samenhangend.*

Bewijs. Veronderstel dat $f(X)$ niet samenhangend is. Dan bestaat een niet-lege $U \subsetneq f(X)$ die open en gesloten is in $f(X)$. Wegens stelling 1.4.2 (toegepast op f als continue afbeelding $X \to f(X)$) is de niet-lege verzameling $f^{-1}(U) \subsetneq X$ dan open en gesloten in X. □

Stelling 1.5.9 (Tussenwaardestelling)**.** *Zij X een samenhangende topologische ruimte en f een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$. Als $a, b \in f(X)$ en $a < c < b$, dan is ook $c \in f(X)$.*

Bewijs. Wegens stelling 1.5.8 is $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ samenhangend, en dus een interval (eig. 1.5.7). □

Opmerking 1.5.10. Stelling 1.5.8 kan ook beschouwd worden als een veralgemening van eigenschap 1.5.3. Inderdaad, onder de voorwaarden van eigenschap 1.5.3 is f een continue afbeelding als A voorzien wordt van de discrete metriek. Wegens stelling 1.5.8 is $f(X)$ samenhangend in A, en dus een singleton (vermits alle deelverzamelingen van A open zijn).

Merk op dat het begrip *lijnstuk* in een willekeurige topologische ruimte niet gedefinieerd is (zelfs niet in een willekeurige metrische ruimte). Toch is er ook een veralgemening van 'open gebied in $\mathbb{R}^n$' die dicht aanleunt bij de originele definitie:

Definitie 1.5.11. Een **pad** of continue **kromme** in een topologische ruimte X is een continue afbeelding $[0,1] \to X$.
Een topologische ruimte X is **padsamenhangend** als elke twee punten $x, y \in X$ door een pad in X verbonden kunnen worden (d.w.z., er is een $\varphi \in \mathscr{C}([0,1], X)$ met $\varphi(0) = x$ en $\varphi(1) = y$).

Stelling 1.5.12. *Een padsamenhangende topologische ruimte X is samenhangend.*

Bewijs. Veronderstel dat $X = V \sqcup W$ met V, W niet-leeg en open in X. Kies $x \in V$ en $y \in W$. Door het gegeven bestaat $\varphi \in \mathscr{C}([0,1], X)$ met $\varphi(0) = x$ en $\varphi(1) = y$. Dan is

$$\varphi([0,1]) = (\varphi([0,1]) \cap V) \sqcup (\varphi([0,1]) \cap W),$$

met $\varphi([0,1]) \cap V$, $\varphi([0,1]) \cap W$ niet-leeg en open in $\varphi([0,1])$, in strijd met stelling 1.5.8. □

Eigenschap 1.5.13. *Een* open $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *is padsamenhangend als en slechts als U samenhangend is als en slechts als U een gebied is.*

Bewijs. $(1) \Rightarrow (2)$: wegens stelling 1.5.12.
$(2) \Rightarrow (3)$: wegens eigenschap 1.5.1.
$(3) \Rightarrow (1)$: elke gebroken lijn in $\mathbb{R}^n$ is het beeld van een continue kromme in $\mathbb{R}^n$. □

Vermits een interval in $\mathbb{R}$ padsamenhangend is, volgt uit stelling 1.5.7 en stelling 1.5.12 dat een deelverzameling van $\mathbb{R}$ samenhangend is als en slechts als ze padsamenhangend is. Net zoals samenhang, is padsamenhang een continue invariant (oef. 1.5.32). Ondanks deze gelijkenissen is samenhang *niet* equivalent met padsamenhang. Meer bepaald geldt eigenschap 1.5.6 niet voor padsamenhangende ruimten (oef. 1.5.36).
Omdat meer verzamelingen samenhangend zijn dan padsamenhangend, en omdat samenhang dikwijls beknopte bewijzen oplevert, wordt samenhang als een iets fundamentelere notie beschouwd dan padsamenhang.
Padsamenhang geeft wel een voldoende voorwaarde voor samenhang die in sommige gevallen eenvoudiger na te gaan is:

Definitie 1.5.14. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is convex als voor elke $x, y \in U$ ook het lijnstuk $[x, y] \subseteq U$.

Voorbeeld 1.5.15. Elke convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is padsamenhangend.

We gebruiken nu de visueel meer intuïtieve notie van padsamenhang om enkele concepten te ontwikkelen i.v.m. samenhang. We bekijken in een topologische ruimte X de relatie

$$x \sim_p y \iff \text{er bestaat pad in } X \text{ dat } x \text{ met } y \text{ verbindt.}$$

Deze relatie is reflexief en symmetrisch. Ze is ook transitief, want als $\varphi, \psi \in \mathscr{C}([0,1], X)$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = \psi(0) = y$ en $\psi(1) = z$, dan is de 'aaneenschakeling' van deze krommen

$$\chi(t) := \begin{cases} \varphi(2t), & \text{voor } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \psi(2t-1), & \text{voor } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

een pad in X dat x met z verbindt. De relatie $\sim_p$ is dus een equivalentierelatie. Omdat elk pad padsamenhangend is, is $x \sim_p y$ als en slechts als er een padsamenhangende deelverzameling van X bestaat die x en y bevat. We kunnen een analoge relatie invoeren i.v.m. samenhang (i.p.v. padsamenhang):

$$x \sim_s y \iff \text{er bestaat een samenhangende deelverzameling van } X \text{ die } x \text{ en } y \text{ bevat.}$$

Ook deze relatie is reflexief (elk singleton is samenhangend) en symmetrisch. Door de verwantschap tussen samenhangende en padsamenhangende ruimten verwachten we dat ook $\sim_s$ een equivalentie-relatie is. Dit volgt uit

Eigenschap 1.5.16. *Zij $(V_i)_{i\in I}$ een familie van samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte X. Als voor elke $i, j \in I$ geldt dat $V_i \cap V_j \neq \varnothing$, dan is ook $\bigcup_{i\in I} V_i$ samenhangend.*

Bewijs. Als $V := \bigcup_{i\in I} V_i$ niet samenhangend is, dan is $V = U \sqcup W$, met U, W niet-leeg en open in V. Dan is ook $V_i = (U \cap V_i) \sqcup (W \cap V_i)$ met $U \cap V_i$ en $W \cap V_i$ open in V_i (def. 1.4.4), voor elke $i \in I$. Omdat elke V_i samenhangend is, is dus $U \cap V_i = \varnothing$ of $W \cap V_i = \varnothing$, voor elke $i \in I$. Omdat $U \neq \varnothing$ bestaat $i \in I$ waarvoor $U \cap V_i \neq \varnothing$, en dus $W \cap V_i = \varnothing$, m.a.w. $V_i \subseteq U$. Omdat $W \neq \varnothing$ bestaat analoog $j \in I$ waarvoor $V_j \subseteq W$. Maar dan is $V_i \cap V_j \subseteq U \cap W = \varnothing$, een strijdigheid. □

Opmerking 1.5.17. De relaties $\sim_p$, $\sim_s$ hangen af van de topologische ruimte X.

Definitie 1.5.18. De **samenhang-componenten** (resp. **padsamenhang-componenten**) van een topologische ruimte X zijn de equivalentie-klassen van $\sim_s$ (resp. $\sim_p$).

De (pad)samenhang-componenten van X vormen een partitie van X.

Eigenschappen 1.5.19. *Zij X een topologische ruimte.*

1. *Elke samenhangende $V \subseteq X$ is bevat in een samenhang-component van X.*
2. *Een samenhang-component van X is samenhangend.*

Bewijs. 1. Voor elke $x, y \in V$ is $x \sim_s y$, zodat $V \subseteq \{y \in X : x \sim_s y\}$ voor elke $x \in V$.
2. Zij C een samenhang-component van X, d.w.z., $C = \{y \in X : x \sim_s y\}$ voor zekere $x \in X$. Voor elke $y \in C$ bestaat een samenhangende $V_y \subseteq X$ met $x, y \in V_y$. Omdat $x \sim_s z$ voor elke $z \in V_y$, is $C = \bigcup_{y\in C} V_y$, zodat C samenhangend is wegens eigenschap 1.5.16. □

De samenhang-componenten zijn dus de maximale samenhangende deelverzamelingen (voor de orde-relatie $\subseteq$).

Oefening 1.5.20 (Karakterisering van samenhangende deelverzamelingen van X in termen van open verzamelingen in X)**.** (D)Toon aan dat een deelverzameling V van een topologische ruimte X niet samenhangend is als en slechts als V bedekt wordt door twee deelverzamelingen $U, W \in \tau_X$ waarvan de doorsneden met V disjunct en niet leeg zijn (d.w.z., $V \subseteq U \cup W$, $V \cap U \cap W = \varnothing$, $V \cap U \neq \varnothing$ en $V \cap W \neq \varnothing$).

Oefening 1.5.21. (B)

1. Geef een voorbeeld van een samenhangende $V \subseteq \mathbb{R}^2$ waarvoor V° niet samenhangend is.
2. Geef een voorbeeld van twee samenhangende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$ waarvan de doorsnede niet samenhangend is.

Oefening 1.5.22. (B)Zij $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte. Toon aan: als $V_n \cap V_{n+1} \neq \emptyset$ voor elke $n \in \mathbb{N}$, dan is $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ samenhangend.

Oefening 1.5.23 (Douane-stelling)**.** (B)Zij X een topologische ruimte. Zij $V, W \subseteq X$. Zij V samenhangend, $V \cap W \neq \emptyset$ en $V \setminus W \neq \emptyset$. Toon aan dat dan ook $V \cap \partial W \neq \emptyset$.

Oefening 1.5.24. (M)(resp. (B)) Zij X, Y topologische ruimten. Toon aan dat de productruimte $X \times Y$ samenhangend (resp. padsamenhangend) is als en slechts als X en Y samenhangend (resp. padsamenhangend) zijn.

Oefening 1.5.25. (M)Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ open. Toon aan dat V de unie is van een rij van disjuncte open intervallen.

Oefening 1.5.26. Zij X een topologische ruimte en $V \subseteq X$ open en gesloten (in X).

1. (B)Als $W \subseteq X$ samenhangend is, toon dan aan dat $W \subseteq V$ of $W \cap V = \emptyset$.

2. (M)Toon aan dat V een unie is van samenhang-componenten van X.

Oefening 1.5.27. (M)

1. Toon aan dat de samenhang-componenten van een topologische ruimte gesloten zijn.

2. Toon aan: als een topologische ruimte eindig veel samenhang-componenten heeft, dan zijn haar samenhang-componenten open.

3. Geef een voorbeeld van een topologische ruimte X en een samenhang-component van X die niet open is in X.

Oefening 1.5.28. (B)Toon aan dat alle samenhang-componenten van $\mathbb{Q}$ singletons zijn. Een topologische ruimte met deze eigenschap wordt **totaal onsamenhangend** genoemd.

Oefening 1.5.29. (M)Gegeven is een open interval $I \subseteq \mathbb{R}$ en een afbeelding $f\colon I \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat f in een omgeving van elk punt $x \in I$ een veelterm is. Toon aan dat f een veelterm is (op heel I).

Oefening 1.5.30. (M)

1. Zij X een samenhangende topologische ruimte en zij f een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat elke $x \in X$ een omgeving U heeft met $f(x) = \min_{y\in U} f(y)$. Toon aan dat f constant is.

2. Geef een voorbeeld van een niet-constante afbeelding $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat elke $x \in [0,1]$ een omgeving U heeft met $f(x) = \min_{y\in U} f(y)$.

Oefening 1.5.31. (B)Een topologische ruimte X wordt **lokaal samenhangend** genoemd als voor elke $x \in X$ de volgende eigenschap geldt: elke omgeving van x bevat een samenhangende omgeving van x.
Toon aan: als X, Y topologische ruimten zijn, X lokaal samenhangend en f een continue, open afbeelding $X \to Y$, dan is ook $f(X)$ lokaal samenhangend.

Oefening 1.5.32 (Padsamenhang is een continue invariant)**.** (B)Zij X, Y metrische ruimten. Zij f een continue afbeelding $X \to Y$. Als X padsamenhangend is, toon dan aan dat ook $f(X)$ padsamenhangend is.

Oefening 1.5.33. (B)Zij X een topologische ruimte. Toon aan:

1. Elke padsamenhangende $V \subseteq X$ is bevat in een padsamenhang-component van X.

2. Een padsamenhang-component van X is padsamenhangend.

Oefening 1.5.34. (B)Toon aan dat voor een samenhangende topologische ruimte X de volgende uitspraken equivalent zijn:

1. X is padsamenhangend

2. elke padsamenhang-component van X is open

3. elke $x \in X$ heeft een padsamenhangende omgeving.

Oefening 1.5.35. (B)Zij $f: X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten. Toon aan: als X samenhangend is, dan is de grafiek $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ van f samenhangend.

Oefening 1.5.36. (M)

1. Zij $V := (\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^2$. Toon aan dat V padsamenhangend is, maar $W := V \cup \{(0,0)\}$ niet.

2. Toon aan dat de grafiek $G \subseteq \mathbb{R}^2$ van de afbeelding $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}\colon f(x) = \sin\frac{1}{x}$ padsamenhangend is, maar $G \cup \{(0,0)\}$ niet.

3. Geef een voorbeeld van een samenhangende, niet padsamenhangende metrische ruimte.

Oefening 1.5.37. (M)Zij V, W samenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte. Toon aan: als $\overline{V} \cap W \neq \varnothing$, dan is $V \cup W$ samenhangend.

Oefening 1.5.38.

1. (M)Zij V en W niet-lege gesloten deelverzamelingen van een topologische ruimte X. Toon aan: als $V \cup W$ en $V \cap W$ samenhangend zijn, dan zijn ook V en W samenhangend.

2. (B)Geef een voorbeeld van niet-samenhangende deelverzamelingen V, W van $\mathbb{R}$ met $V \cup W$ en $V \cap W$ samenhangend.

1.6 Morfismen

Een topoloog is iemand die geen koffiekop van een donut kan onderscheiden.

Definitie 1.6.1. In het algemeen is een **morfisme**[24] tussen verzamelingen met een gegeven structuur een afbeelding die die structuur behoudt. Een morfisme tussen metrische ruimten is dan ook een afbeelding die **isometrisch**[25] is, d.w.z. een afbeelding die de afstand bewaart (φ: $(M,d) \to (M',d')$ bewaart de afstand als $d'(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$, voor elke $x, y \in M$).

[24] soms ook *homomorfisme* genaamd; om verwarring te vermijden met de term *homeomorfisme* (die we in deze paragraaf zullen ontmoeten), gebruiken we deze benaming niet

[25] er zijn verschillende conventies in de literatuur: soms wordt een afstandbewarende afbeelding pas isometrisch genoemd als ze ook bijectief is.

Eigenschap 1.6.2. *Een metrisch morfisme is injectief.*

Bewijs. Als $\varphi\colon (M,d) \to (M',d')$ isometrisch is en $\varphi(x) = \varphi(y)$, dan is $d(x,y) = d'(\varphi(x),\varphi(y)) = 0$. □

Definitie 1.6.3. Een **inbedding**[26] is een injectief morfisme. Wegens de vorige eigenschap noemt men een metrisch morfisme meestal een **isometrische inbedding**.
Een **isomorfisme** tussen twee verzamelingen met een gegeven structuur is een bijectief morfisme waarvoor ook de inverse een morfisme is.[27] Die twee verzamelingen zijn dan niet van elkaar te onderscheiden wat betreft de eigenschappen van die structuur.[28] Twee verzamelingen waartussen een isomorfisme bestaat, worden **isomorf** genoemd.
Een metrisch isomorfisme is dan ook een bijectieve isometrische afbeelding (vermits de inverse afbeelding dan ook de afstand bewaart), en wordt gewoonlijk een **isometrie** genoemd. Metrisch isomorfe ruimten worden gewoonlijk **isometrisch** genoemd.

Men beschouwt doorgaans de *continue afbeeldingen* als de morfismen tussen topologische ruimten. Op het eerste zicht lijkt dit vreemd, want zij bewaren de open verzamelingen niet noodzakelijk (zie oef. 1.2.21, enkel het *invers* beeld van een open verzameling is open).[29] Wat bewaren continue afbeeldingen dan wel? In een eerste aftelbaarheidsruimte wordt het antwoord gegeven door het rijenkenmerk: ze bewaren de convergentie van rijen.[30]

Definitie 1.6.4. Een isomorfisme tussen topologische ruimten wordt een **homeomorfisme** genoemd: het is een bijectieve continue afbeelding waarvoor ook de inverse continu is. Topologisch isomorfe ruimten worden **homeomorf** genoemd.
Een begrip (resp. eigenschap) dat behouden blijft onder homeomorfismen wordt een **topologisch** begrip (resp. eigenschap) genoemd. Een begrip (resp. eigenschap) dat behouden blijft onder isometrieën wordt een **metrisch** begrip (resp. eigenschap) genoemd.

In een topologische ruimte zijn alle begrippen die enkel afgeleid zijn uit het begrip *open verzameling* topologisch (want zij worden dan ook, zoals de open verzamelingen, bewaard onder homeomorfismen). Alle begrippen die gedefinieerd zijn enkel a.d.h.v. topologische begrippen en alle eigenschappen die enkel gebruik maken van topologische begrippen zijn ook topologisch. I.h.b. geldt dit voor de begrippen en eigenschappen uit §1.3 en §1.4.

Voorbeeld 1.6.5. 1. Het begrip *open bal* is geen topologisch begrip: bijv. in $\mathbb{R}^2$ wordt een open bal door het homeomorfisme $(x,y) \mapsto (x,2y)$ omgezet in een ellips.[31]
2. Het begrip *begrensde deelverzameling* in $\mathbb{R}$ is geen topologisch begrip (oefening (B)).

---

[26] soms ook **monomorfisme** genaamd

[27] Voor heel wat structuren is een bijectief morfisme steeds een isomorfisme, omdat de inverse automatisch ook een morfisme is (bijv. groepen, ringen, vectorruimten, metrische ruimten).

[28] Men kan de inwerking van een morfisme φ ook 'passief' bekijken als het hernoemen van de elementen in een gegeven verzameling (x wordt hernoemd in $\varphi(x)$, ...); de structuur die op de oorspronkelijke elementen lag, is dezelfde na hernoemen.

[29] Abstract gezien houdt niets ons tegen om de open afbeeldingen (afbeeldingen die open verzamelingen afbeelden op open verzamelingen) als de morfismen te beschouwen, maar continuïteit is gewoon een veel centraler begrip.

[30] In een willekeurige topologische ruimte bewaren ze de convergentie van netten of filters; of nog: ze bewaren de relatie '$x \in \overline{V}$' (zie oef. 1.4.30).

[31] Men noemt topologie daarom wel eens informeel 'meetkunde van rubberen lichamen': men mag een verzameling (beschouwd als topologische ruimte) onder homeomorfismen vervormen zoveel men wil, zoals het trekken aan (maar niet scheuren van) een rubberen object, haar topologische eigenschappen blijven dezelfde.

Vermits we een open verzameling in een metrische ruimte gedefinieerd hebben a.d.h.v. de metriek, is een isometrie tussen metrische ruimten ook een homeomorfisme en is elke topologische eigenschap in metrische ruimten ook een metrische eigenschap.
Dit geeft ook een belangrijke motivatie om topologische ruimten te bestuderen: heel wat concrete topologische ruimten in de praktijk zijn (zeker in de analyse) wel metrische ruimten, maar dan nog is het belangrijk te weten welke eigenschappen in metrische ruimten eigenlijk topologisch zijn. Men moet maar één homeomorfisme kunnen definiëren tussen twee topologische (i.h.b. metrische) ruimten om te weten dat *alle* topologische eigenschappen en begrippen (en dat zijn er heel wat!) in die ruimten dezelfde zijn.

Verdere ontwikkelingen 1.6.A. Voor een oriënteerbaar compact samenhangend (tweedimensionaal) oppervlak zonder rand[32] kan men aantonen dat het aantal handvatten op het oppervlak een topologische eigenschap is. Het aantal handvatten wordt het **genus** van het oppervlak genoemd.

Figuur 1.2: Oppervlakken met genus 1, 2 en 3

Omgekeerd kan men aantonen dat twee zulke oppervlakken met hetzelfde aantal handvatten homeomorf zijn. Het genus bepaalt m.a.w. de homeomorfieklasse van zulk oppervlak volledig. In het bijzonder is een oriënteerbaar compact samenhangend oppervlak zonder handvatten steeds homeomorf met het boloppervlak $\partial B_{\mathbb{R}^3}(0,1)$.
(De rand van) een koffiekop en de binnenband van een fietsband hebben allebei genus 1. De homeomorfieklasse van dit oppervlak wordt de (tweedimensionale) **torus** genoemd.

Gaan we een dimensie hoger, dan wordt het analoge probleem veel moeilijker:

Definitie 1.6.B. Een topologische ruimte X is **enkelvoudig samenhangend** als X samenhangend is en als elk gesloten pad in X continu vervormd kan worden tot een punt (zie cursus *Algebraïsche topologie*).

Een oriënteerbaar compact samenhangend (2-dimensionaal) oppervlak zonder rand is enkelvoudig samenhangend juist als haar genus 0 is.

Voorbeeld 1.6.C (Vermoeden van Poincaré)**.** Elke enkelvoudig samenhangende compacte driedimensionale variëteit (zie cursus *Differentiaalmeetkunde*) zonder rand is homeomorf met de zgn. 3-sfeer $S^3 := \partial B_{\mathbb{R}^4}(0,1)$.[33]

[32] *Rand* is hier niet gebruikt in de topologische betekenis (die afhangt van de ruimte waarin de variëteit ingebed is), maar in de intrinsieke betekenis (zie cursus Analyse II, bijv. een open schijf heeft geen rand, een gesloten schijf heeft enkel een cirkel als rand).
[33] we bekijken hier $\mathbb{R}^4$ met de Euclidische afstand

Henri Poincaré formuleerde deze stelling als een vermoeden in het begin van de 20ste eeuw. Een bewijs werd pas in 2003 gegeven door Grigori Perelman[34] gebruik makend van voorbereidend werk van Richard Hamilton. Opmerkelijk genoeg was de analoge stelling voor elke dimensie $d > 4$ al bewezen in 1961 door Stephen Smale en voor dimensie $d = 4$ in 1982 door Michael Freedman.

Oefening 1.6.6. (D)Toon aan dat twee metrieken d, d' op een verzameling M equivalent zijn als en slechts als de identieke afbeelding $(M,d) \to (M,d')$: $x \mapsto x$ een homeomorfisme is.

Oefening 1.6.7. (D)Toon aan: elke bijectieve afbeelding tussen discrete topologische ruimten is een homeomorfisme.

Oefening 1.6.8. (D)Gegeven zijn topologische ruimten X en Y. Als een bijectie $f: X \to Y$ een basis van X omzet in een basis van Y (d.w.z., er bestaat een basis $\mathscr{B}$ van X waarvoor $\{f(U) : U \in \mathscr{B}\}$ een basis is van Y), toon dan aan dat f een homeomorfisme is.

Oefening 1.6.9. (D)

1. Zij M een verzameling en (M', d') een metrische ruimte. Zij φ een bijectie $M \to M'$. Toon aan dat d: $M \times M \to \mathbb{R}$: $d(x, y) := d'(\varphi(x), \varphi(y))$ een afstand definieert op M en dat de ruimten (M, d) en (M', d') isometrisch zijn. (M.a.w., we kunnen de afstand d' op M 'overdragen' d.m.v. de afbeelding φ.)

2. Zij X een verzameling en (X', τ') een topologische ruimte. Zij φ een bijectie $X \to X'$. Toon aan dat $\tau := \{\varphi^{-1}(U) : U \in \tau'\}$ een topologie definieert op X en dat de ruimten (X, τ) en (X', τ') homeomorf zijn. (M.a.w., we kunnen de topologie τ' op X 'overdragen' d.m.v. de afbeelding φ.)

Oefening 1.6.10. (M)

1. Toon aan dat geen injectieve continue afbeelding van de cirkel $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ naar $\mathbb{R}$ bestaat. (De gewone topologie op de cirkel is de relatieve topologie uit $\mathbb{C}$.)

2. Toon aan dat volgende ruimten noch met $[0, 1]$, noch met $\mathbb{R}$ homeomorf zijn: (a) S^1; (b) $\mathbb{R}^n$ als $n > 1$.

1.7 Compactheid: definities

We kunnen de definitie van een compacte deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ als een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ (cursus Analyse II) niet gebruiken in willekeurige topologische ruimten omdat het begrip *begrensd* daar niet gedefinieerd is.[35] We laten de eigenschap *gesloten en begrensd* daarom (voorlopig) links liggen.
Geïnspireerd door een andere eigenschap van compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ (Bolzano-Weierstrass) definiëren we:

Definitie 1.7.1. Een topologische ruimte X is **rijcompact** als elke rij in X een convergente deelrij heeft.

[34]Perelman kreeg hiervoor een *Fields Medaille* en een *Millennium Prize*, die hij beide weigerde, naar verluidt omdat hij vond dat de bijdrage van Hamilton minstens zo groot was als zijn eigen bijdrage.

[35]Wegens voorbeelden 1.6.5 is gelijk welke eigenschap die samenvalt met *begrensd* in $\mathbb{R}$ niet topologisch.