Lemma 1.7.2. *Zij $(x_n)_n$ een rij in een eerste aftelbaarheidsruimte X. Dan convergeert een deelrij van $(x_n)_n$ naar $a \in X$ als en slechts als*

$$(\forall U \text{ omgeving van } a)(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \geqslant m)(x_n \in U).^{36}$$

Bewijs. Oefening (D). De implicatie '⇒' geldt in feite in een willekeurige topologische ruimte. □

We kunnen dit in eerste aftelbaarheidsruimten karakteriseren d.m.v. een eigenschap die doet denken aan de *stelling van de vernestelde compacta* in $\mathbb{R}^n$:

Eigenschap 1.7.3. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke dalende rij $(F_n)_n$ van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. ⇒: kies $x_n \in F_n$, voor elke $n \in \mathbb{N}$. Door het gegeven convergeert een deelrij $(x_{n_m})_m$ naar een element $x \in X$. We gaan na dat $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Kies $M \in \mathbb{N}$. Vermits $x_{n_m} \in F_{n_M}$ zodra $m \geqslant M$, is $x \in \overline{F_{n_M}} = F_{n_M}$ door eigenschap 1.4.15. Omdat M willekeurig is en $(F_n)_n$ dalend, is $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
⇐: zij $(x_n)_n$ een rij in X. We gaan na dat $(x_n)_n$ een convergente deelrij heeft. Om het gegeven te kunnen toepassen, definiëren we

$$F_m := \overline{\{x_n : n \geqslant m\}}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.^{37}$$

Dan is $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ een dalende rij van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van X. Door het gegeven bestaat $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. We tonen via lemma 1.7.2 aan dat een deelrij van $(x_n)_n$ convergeert naar x. Kies daartoe een omgeving U van x en $m \in \mathbb{N}$. Omdat $x \in F_m$, bestaat $n \geqslant m$ waarvoor $x_n \in U$. □

Opmerking 1.7.4. 'Niet-lege doorsnede'-eigenschappen zoals de vorige eigenschap zijn nuttig bij het oplossen van een soort van problemen dat *verwisselen van quantoren* genoemd wordt. Zij $P(x, y)$ een eigenschap die afhangt van $x \in V$ en $y \in W$ (V, W verzamelingen). Dikwijls komt het in een probleem voor dat we weten dat

$$(\forall x \in V)(\exists y \in W)P(x, y) \tag{1.1}$$

(of dat dit een haalbaar doel lijkt), maar dat we eigenlijk de sterkere eigenschap

$$(\exists y \in W)(\forall x \in V)P(x, y) \tag{1.2}$$

willen aantonen (met y dus onafhankelijk van x).
Bijvoorbeeld: als $V = \mathbb{R}$ en $W =]0, +\infty[$, dan is de eigenschap '$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is continu' van het eerste type (voorafgegaan door '$\forall \varepsilon > 0$'), en 'f is gelijkmatig continu' van het tweede type (opnieuw voorafgegaan door '$\forall \varepsilon > 0$').
Om het verband met 'niet-lege doorsnede'-eigenschappen te zien, herschrijven we dit verzameling-theoretisch: noteren we $F_x := \{y \in W : P(x, y)\}$, dan is

$$(1.1) \iff (\forall x \in V)(F_x \neq \varnothing)$$

terwijl

$$(1.2) \iff \bigcap_{x\in V} F_x \neq \varnothing.$$

[36] In een willekeurige topologische ruimte wordt een punt a met deze eigenschap een **limietpunt** van de rij genoemd
[37] We creëren de situatie uit het deel '⇒' opnieuw, nl. dat $x_n \in F_n$ voor elke n. We kiezen verder de *kleinst mogelijke* gesloten F_n die hieraan voldoen, omdat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$ dan de *sterkste* informatie oplevert.

We willen dus een ‘niet-lege doorsnede’-eigenschap aantonen!
Neem nu concreet het geval waarin $V = \mathbb{N}$ en $W = X$ een rijcompacte topologische ruimte is. We stellen (zoals hierboven) $F_n := \{x \in X : P(n,x)\}$. Als die F_n gesloten zijn en $(F_n)_n$ dalend is, dan leert eigenschap 1.7.3 dat $F_n \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, m.a.w. dat

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in X)P(n,x) \quad \Longrightarrow \quad (\exists x \in X)(\forall n \in \mathbb{N})P(n,x).$$

Of nog, door contrapositie, met $Q := \neg P$, dat

$$(\forall x \in X)(\exists n \in \mathbb{N})Q(n,x) \quad \Longrightarrow \quad (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in X)Q(n,x).$$

Met het oog op toepassingen, o.a. onder de vorm van *verwisselen van quantoren*, is het nuttig om de voorwaarden op de rij $(F_n)_n$ zo zwak mogelijk te maken. Uit een willekeurige rij $(F_n)_n$ construeert men bijv. eenvoudig de dalende rij $(F_1 \cap \cdots \cap F_n)_n$. Dit brengt ons bij de volgende variant.

Definitie 1.7.5. Een familie $(V_i)_{i\in I}$ (met I een index-verzameling) van verzamelingen heeft de **eindige doorsnede-eigenschap** (kortweg: $(V_i)_i$ **is een EDE-familie**)[38] als voor elke eindige $I_F \subseteq I$, $\bigcap_{i\in I_F} V_i \neq \varnothing$.

Eigenschap 1.7.6. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke EDE-rij $(F_n)_n$ van gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. $\Rightarrow$: pas eigenschap 1.7.3 toe op de rij $(F_1 \cap \cdots \cap F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$\Leftarrow$: door eigenschap 1.7.3, vermits elke dalende rij een EDE-rij is. □

Door overgang op complementen kunnen we dit omzetten in een duale eigenschap van open verzamelingen, die zelf even geschikt is om quantoren mee te verwisselen:

Definitie 1.7.7. Een **bedekking** van een topologische ruimte X is een familie $(U_i)_{i\in I}$ van deelverzamelingen van X waarvoor $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. De bedekking $(U_i)_{i\in I}$ is **open** als elke U_i open is; ze is **eindig** als de index-verzameling I eindig is. Een **deelbedekking** van een bedekking $(U_i)_{i\in I}$ is een bedekking $(U_i)_{i\in J}$ met $J \subseteq I$.

Lemma 1.7.8. *Elke EDE-rij van gesloten deelverzamelingen van X heeft een niet-lege doorsnede als en slechts als elke aftelbare open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.*

Bewijs. We gaan over op complementen:

$$\begin{aligned}
&(\forall (F_n)_n, F_n \subseteq X \text{ gesloten})\Big((F_n)_n \text{ is EDE-rij} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(F_n) \neq \varnothing\Big)\\
\Longleftrightarrow\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big((X \setminus U_n)_n \text{ is EDE-rij} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus U_n) \neq \varnothing\Big)\\
\Longleftrightarrow\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big((\forall F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ eindig})\Big(\bigcup_{n\in F} U_n \neq X\Big) \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq X\Big)\\
\overset{\text{(contrapositie)}}{\Longleftrightarrow}\quad &(\forall (U_n)_n, U_n \subseteq X \text{ open})\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X \Rightarrow (\exists F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ eindig})\Big(\bigcup_{n\in F} U_n = X\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Dit betekent juist dat elke aftelbare open bedekking een eindige deelbedekking heeft. □

[38] Engels: finite intersection property, FIP-family

Gevolg 1.7.9. *Een eerste aftelbaarheidsruimte X is rijcompact als en slechts als elke aftelbare open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.*

Een laatste, niet voor de hand liggende verzwakking betreft de kardinaliteit van de open bedekking:

Stelling 1.7.10 (Lindelöf)**.** *In een topologische ruimte X met een aftelbare basis heeft elke open bedekking een aftelbare deelbedekking.*[39]

Bewijs. Zij $(U_i)_{i\in I}$ een open bedekking van X en $\mathscr{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare basis. Dan is elke $U_i = \bigcup_{j\in J_i} B_{i,j}$ voor zekere $B_{i,j} \in \mathscr{B}$. Neem nu $n \in \mathbb{N}$. Als $B_n = B_{i,j}$ voor zekere $i \in I$ en $j \in J_i$, kies dan zulke i en j, en noem deze i_n en j_n. Noem A de verzameling van alle zulke $n \in \mathbb{N}$.[40] Dan is $X = \bigcup_{i,j} B_{i,j} = \bigcup_{n\in A} B_{i_n,j_n} \subseteq \bigcup_{n\in A} U_{i_n} \subseteq X$. □

Gevolg 1.7.11 (Heine-Borel[41])**.** *In een rijcompacte ruimte met een aftelbare basis heeft elke open bedekking een eindige deelbedekking.*

Bewijs. Combineer gevolg 1.7.9 en stelling 1.7.10. □

Deze verzwakking van de voorwaarden is zo nuttig gebleken voor het oplossen van problemen, dat ze de basis geworden is voor de definitie van compactheid in een topologische ruimte:

Definitie 1.7.12. Een topologische ruimte X is **compact** als elke open bedekking van X een eindige deelbedekking heeft.

Als een eerste aftelbaarheidsruimte X compact is, dan is ze ook rijcompact (gevolg 1.7.9); als X een aftelbare basis heeft, dan geldt ook het omgekeerde.
Door overgang op complementen verkrijgen we ook een verzwakking op de voorwaarden van $(F_n)_n$ in eigenschap 1.7.6:

Gevolg 1.7.13. *Een topologische ruimte X is compact als en slechts als elke EDE-familie $(F_i)_{i\in I}$ van gesloten deelverzamelingen van X een niet-lege doorsnede heeft.*

Bewijs. Zoals het bewijs van lemma 1.7.8. □

Compactheid is (bij definitie) een eigenschap van topologische ruimten (onafhankelijk van de topologische ruimte waarin ze als deelruimte bevat is, anders dan de begrippen *open* of *gesloten*). Een deelverzameling V van een topologische ruimte X is (bij definitie) compact als ze compact is als deelruimte. Men noteert $V \subset\subset X$ of $V \Subset X$ voor 'V is een compacte deelverzameling van X'.

Opmerking 1.7.14. In Analyse II hadden we een open bedekking van $V \subseteq \mathbb{R}^n$ gedefinieerd d.m.v. open verzamelingen in $\mathbb{R}^n$ (en niet in V zoals in definitie 1.7.7). We kunnen gelukkig gemakkelijk van de ene vorm overgaan op de andere (ook in een willekeurige topologische ruimte X):
als $V \subseteq X$ en als $V = \bigcup_i U_i$ met U_i open in V, dan is $U_i = W_i \cap V$ voor zekere W_i open in X, zodat $V \subseteq \bigcup_i W_i$. Omgekeerd, als $V \subseteq \bigcup_i W_i$ met W_i open in X, dan is $V = \bigcup_i U_i$ met $U_i := W_i \cap V$ open in V. We zullen in het vervolg ook van deze equivalente vorm van bedekking (en dus ook van compactheid) van een deelverzameling gebruik maken.

[39] Een topologische ruimte waarin elke open bedekking een aftelbare deelbedekking heeft, wordt een **Lindelöf-ruimte** genoemd.

[40] d.w.z., $A := \{n \in \mathbb{N} : (\exists i, j)(B_n = B_{i,j})\}$

[41] ook genaamd: *Stelling van Borel-Lebesgue*

Verdere ontwikkelingen 1.7.A. D.m.v. een gelijkaardige veralgemening op de kardinaliteit kunnen we het convergentiebegrip van rijen uitbreiden tot families van hogere kardinaliteit. Een aantal eigenschappen van rijen die enkel gelden in eerste aftelbaarheidsruimten krijgen zo een vorm die wel blijft gelden in willekeurige topologische ruimten. Er zijn twee verschillende manieren ontwikkeld om dit te doen: via zgn. *filters* en via zgn. *netten* (§1.13). We bespreken hier convergentie van filters.
Zoals in het bewijs van eigenschap 1.7.3 associëren we met een rij $(x_n)_n$ in (X,τ) de dalende rij van verzamelingen $A_n := \{x_m : m \geqslant n\}$. Dan is

$$x_n \to x \iff (\forall U \in \tau, x \in U)(\exists n \in \mathbb{N})(A_n \subseteq U).$$

Naar analogie hiervan definiëren we:

Definitie 1.7.B. Zij $\mathscr{F}$ een familie van nietlege deelverzamelingen van X die gesloten is onder eindige doorsneden. Dan convergeert $\mathscr{F}$ naar $x \in X$ (notatie: $\mathscr{F} \to x$) als

$$(\forall U \in \tau, x \in U)(\exists A \in \mathscr{F})(A \subseteq U).$$

Deze definitie van convergentie vereenvoudigt (en is daardoor handiger in het gebruik) als we ons beperken tot zgn. filters:

Definitie 1.7.C. Een **filter** $\mathscr{F}$ op een verzameling X is een verzameling van deelverzamelingen van X waarvoor

(F1) $\varnothing \notin \mathscr{F}$

(F2) $\mathscr{F}$ is gesloten onder eindige doorsneden (d.w.z., $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$)

(F3) $A \in \mathscr{F}, A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

Eigenschap 1.7.D (Filter-convergentie)**.** *Een filter $\mathscr{F}$ op X convergeert naar $x \in X$ als en slechts als elke omgeving van x tot $\mathscr{F}$ behoort.*

Opmerking 1.7.E. Als een familie $\mathscr{F}$ van nietlege deelverzamelingen van X gesloten is onder eindige doorsneden, dan kunnen we $\mathscr{F}$ steeds uitbreiden tot de filter $\mathscr{G} = \{A \subseteq X : (\exists B \in \mathscr{F})(B \subseteq A)\}$, en er geldt: $\mathscr{F} \to x \iff \mathscr{G} \to x$.
Men beperkt zich daarom meestal tot convergentie van filters.

Als $\mathscr{F}$ een filter is op X en f een afbeelding $X \to Y$, dan is $f(\mathscr{F}) = \{f(A) : A \in \mathscr{F}\}$ niet noodzakelijk filter op Y. We werken daarom in de plaats met $f_*(\mathscr{F}) := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{F}\}$, hetgeen wel een filter is op Y. Naar analogie van het rijenkenmerk voor continuïteit vinden we

Stelling 1.7.F. *Zij X, Y topologische ruimten. Als f een afbeelding $X \to Y$ is, dan zijn equivalent:*

1. *f is continu in $a \in X$*
2. *$f_*(\mathscr{F}) \to f(a)$ voor elke filter $\mathscr{F}$ op X waarvoor $\mathscr{F} \to a$.*

Bewijs. Noteer de verzameling van alle omgevingen van x d.m.v. $\mathscr{V}_x$. Merk op dat dit zelf een filter is. Dan is f continu in a als en slechts als $f^{-1}(U) \in \mathscr{V}_a$ voor elke $U \in \mathscr{V}_{f(a)}$. Door de definitie van $f_*(\mathscr{V}_a)$ betekent dit juist dat $\mathscr{V}_{f(a)} \subseteq f_*(\mathscr{V}_a)$.
$\Rightarrow$: als $\mathscr{F} \to a$, dan is $\mathscr{V}_a \subseteq \mathscr{F}$, zodat ook $\mathscr{V}_{f(a)} \subseteq f_*(\mathscr{V}_a) \subseteq f_*(\mathscr{F})$, en dus $f_*(\mathscr{F}) \to f(a)$.
$\Leftarrow$: kies $\mathscr{F} := \mathscr{V}_a$. $\square$

D.m.v. dit extra taalgebruik kunnen een aantal eigenschappen over topologische ruimten bewezen worden m.b.v. filters op een analoge manier als eigenschappen over eerste-aftelbaarheidsruimten bewezen worden m.b.v. rijen.

Oefening 1.7.15. (D)

1. Toon aan dat de unie van twee compacte deelverzamelingen van een topologische ruimte compact is.

2. Toon aan dat een eindige deelverzameling van een topologische ruimte compact is.

Oefening 1.7.16. (D)Geef een voorbeeld van een open bedekking van het open interval $]0,1[$ die geen eindige deelbedekking heeft.

Oefening 1.7.17. Zij X, Y topologische ruimten.

1. (B)Zij $(x_n)_n$ een rij in X met $x_n \to a \in X$. Toon aan dat $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ compact is.

2. (M)Zij f een afbeelding $X \to Y$. Toon aan: als X aftelbaar van de eerste soort is, en als de restrictie van f tot elke compacte deelverzameling van X continu is, dan is ook f continu.

3. (M)Zij f een afbeelding $X \to Y$ tussen Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimten met de eigenschap dat $f^{-1}(K)$ compact is, voor elke compacte $K \subseteq Y$. Toon aan dat f gesloten deelverzamelingen van X afbeeldt op gesloten deelverzamelingen van Y.

4. (M)Zij f een injectieve afbeelding $X \to Y$ tussen Hausdorff eerste aftelbaarheidsruimten die compacte verzamelingen afbeeldt op compacte verzamelingen. Toon aan: f is continu.

5. (B)Geef een voorbeeld van een afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die compacte verzamelingen afbeeldt op compacte verzamelingen, maar die niet continu is.

6. (M)Geef een voorbeeld van een afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $f^{-1}(K)$ compact is, voor elke compacte $K \subseteq \mathbb{R}$, maar die niet continu is.

1.8 Compactheid: eigenschappen en voorbeelden

Definitie 1.7.12 laat opnieuw elegante bewijsvoeringen toe in de algemene context van topologische ruimten, eens we enkele basiseigenschappen over compactheid afgeleid hebben. Het *verwisselen van quantoren*, hoewel vrij algemeen toepasbaar, hoeven we niet altijd formeel door te voeren (gelukkig, want zulke bewijzen zijn soms eerder technisch). De formulering met open verzamelingen suggereert, informeel geformuleerd, dat we topologische vragen over een oneindige (compacte) verzameling kunnen herleiden tot vragen over een eindige verzameling. Omdat definitie 1.7.12 nogal abstract is, leiden we eerst een aantal eigenschappen af die helpen om compacte verzamelingen te herkennen:

Stelling 1.8.1.

1. *Een gesloten deelruimte V van een compacte topologische ruimte X is compact.*

2. *Een compacte deelruimte K van een Hausdorff-ruimte X is gesloten.*